Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 511

ДИСКРЕТНАЯ УНИВЕРСАЛЬНОСТЬ L–ФУНКЦИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

В. Гарбаляускене, Й. Генис, А. Лауринчикас

Аннотация. Получена дискретная универсальная теорема типа Воронина для L-функций эллиптических кривых. Использован шаг $h > 0$ такой, что $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ при некотором $k \neq 0$ рационально. В доказательстве основную роль играет предельная теорема в пространстве аналитических функций.

Ключевые слова: эллиптическая кривая, L-функция, предельная теорема, вероятностная мера, случайный элемент, пространство аналитических функций, универсальность, слабая сходимость.

1. Введение

Символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ будем обозначать множества всех целых положительных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел соответственно. Пусть E — эллиптическая кривая, задаваемая уравнением Вейерштрасса

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Предположим, что дискриминант $\Delta = -16(4a^3 + 27b^2)$ кривой E ненулевой. Тогда известно, что кривая E несингулярна.

Для каждого простого p обозначим через $\nu(p)$ число решений сравнения

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \pmod p$$

и положим $\lambda(p) = p - \nu(p)$. Классический результат Хассе утверждает, что

$$|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p}. \tag{1}$$

Пусть $s = \sigma + it$ — комплексная переменная. Тогда L-функция $L_E(s)$ эллиптической кривой E определяется для $\sigma > 3/2$ произведением

$$L_E(s) = \prod_{p|\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Ввиду (1) задающее $L_E(s)$ произведение сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 3/2\}$ и определяет там аналитическую функцию. Кроме того, недавно была доказана [1] гипотеза Шимуры,

Работа третьего автора выполнена при поддержке Литовского фонда высшего образования и науки.

Таниямы и Вейля об аналитическом продолжении и функциональном уравнении для $L_E(s)$. Тем самым стало известно, что функция $L_E(s)$ аналитически продолжаема до целой функции и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{s}\Gamma(s)L_E(s) = \pm\left(\frac{\sqrt{N}}{2\pi}\right)^{2-s}\Gamma(2-s)L_E(2-s),$$

где N — ведущий модуль кривой E и $\Gamma(s)$, как обычно, гамма-функция. Об этих и других фактах теории эллиптических кривых см., например, [2].

В [3] получена универсальность функции $L_E^k(s)$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\operatorname{meas}\{A\}$ — мера Лебега измеримого множества $A \subset \mathbb{R}$.

Теорема 1 [3]. *Пусть K — компактное подмножество полосы $D = \left\{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\right\}$, обладающее связным дополнением, и $f(s)$ — непрерывная не имеющая нулей функция в K, аналитическая внутри K. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}\left|L_E^k(s+i\tau) - f(s)\right| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Для $k = 1$ эта теорема следует также из основного результата в [4].

Если справедлив аналог гипотезы Римана для $L_E(s)$, т. е. все нетривиальные нули $L_E(s)$ лежат на критической прямой $\sigma = 1$, то [3] функция $L_E^{-k}(s)$, $k \in \mathbb{N}$, также универсальна в смысле теоремы 1.

Напомним, что С. М. Воронин доказал [5] универсальность дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Многие математики, среди которых Рейх, Гонек, Багчи, Матсумото, Стеудинг, Шварц, Мишу, Бауэр, Гарункштис, Слежявичене, Качинскайте, Генис и др., улучшали и обобщали теорему Воронина для других классических дзета-функций и некоторых классов рядов Дирихле. Гипотеза Линника — Ибрагимова состоит в том, что любая функция, заданная рядом Дирихле в некоторой полуплоскости, аналитически продолжаемая влево от полуплоскости абсолютной сходимости и удовлетворяющая некоторым естественным условиям роста, универсальна в смысле Воронина.

Дискретная универсальность функции $L_E(s)$ получена в [6]. Для $N \in \mathbb{N}$ положим

$$\mu_N(\dots) = \frac{1}{N+1}\sharp\left\{0 \le m \le N : \dots\right\},$$

где вместо многоточия записывается условие, которому удовлетворяет m. Пусть $h > 0$ — фиксированное число.

Теорема 2 [6]. *Пусть $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ иррационально для любого $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Пусть K и $f(s)$, как в теореме 1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\bigl(\sup_{s\in K}|L_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon\bigr) > 0.$$

Так как по теореме Эрмита — Линдемана e^k, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, иррационально, в теореме 2 можно взять, например, $h = 2\pi$.

В этой работе мы рассмотрим общий случай для h, где $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ может быть рациональным для некоторых значений $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Теорема 3. *Предположим, что существует целое $k \neq 0$ такое, что $\exp\left\{\frac{2\pi k}{h}\right\}$ рационально. Пусть K и $f(s)$, как в теореме 2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N\bigl(\sup_{s\in K}|L_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon\bigr) > 0.$$

Замечание. Аналогичная теорема тем же методом может быть доказана для L-функций новых форм.

2. Предельная теорема

Доказательство теоремы 3 основано на предельной теореме для функции $L_E(s)$ в пространстве аналитических функций. Однако дискретная предельная теорема с h, удовлетворяющим условиям теоремы 3, в упомянутом пространстве для функции $L_E(s)$ неизвестна.

Если $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ рационально для некоторого $k \neq 0$, достаточно рассмотреть лишь положительные k с указанным свойством. Пусть k_0 — наименьшее из таких чисел. В [7] отмечено, что другие k суть кратные k_0. Положим $\exp\{\frac{2\pi k_0}{h}\} = \frac{m_0}{n_0}$ с $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$, $(m_0, n_0) = 1$.

Возьмем единичную окружность $\gamma \subset \mathbb{C}$ и определим бесконечномерный тор

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

где $\gamma_p = \gamma$ для всех простых p. С топологией произведения и операцией поточечного перемножения Ω является компактной топологической абелевой группой. Пусть $\omega(p)$ — проекция $\omega \in \Omega$ на координатное пространство γ_p. Для $m \in \mathbb{N}$ положим

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha || m} \omega^\alpha(p),$$

где $p^\alpha || m$ означает, что $p^\alpha \mid m$, но $p^{\alpha+1} \nmid m$. Таким образом, $\omega(m)$ — вполне мультипликативная функция, и $|\omega(m)| = 1$.

Обозначим через $\mathscr{B}(S)$ класс борелевских множеств пространства S.

Положим $\Omega_h = \{\omega \in \Omega : \omega(m_0) = \omega(n_0)\}$. Тогда Ω_h — замкнутая подгруппа в Ω, поэтому она также компактная топологическая группа и на $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h))$ может быть определена вероятностная мера Хаара m_{hH}. Получаем вероятностное пространство $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Пусть $D_0 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$ и для $s \in D_0$, $\omega_h \in \Omega_h$

$$L_E(s, \omega_h) = \prod_{p|\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Для области G в комплексной плоскости обозначим через $H(G)$ пространство аналитических функций на G с топологией равномерной сходимости на компактах.

Предложение 1. *Функция $L_E(s, \omega_h)$ представляет собой $H(D_0)$-значный случайный элемент на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$.*

Доказательство. Обозначим через m_H вероятностную меру Хаара на $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$. Пусть $p_{r_1}, \dots, p_{r_k}$ — произвольный конечный набор простых чисел и $A_{r_1}, \dots, A_{r_k} \in \mathscr{B}(\gamma)$. Пусть $g : \Omega \to \Omega_h$ — измеримая функция, определенная в [7, с. 342]. Напомним, что если P — вероятностная мера на $(S, \mathscr{B}(S))$, то любая измеримая функция $u : S \to S_1$ порождает единственную вероятностную меру Pu^{-1}, определенную равенством $Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A)$, $A \in \mathscr{B}(S_1)$. Обозначим через g_p ее сужение на координатное пространство γ_p. Так как $\{\omega(p)\}$ — последовательность независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$ и $m_{hH} = m_H g^{-1}$, имеем

$$
\begin{aligned}
m_{hH}&(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_{r_1}) \in A_{r_1}, \dots, \omega_h(p_{r_k}) \in A_{r_k}) \\
&= m_H g^{-1}(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_{r_1}) \in A_{r_1}, \dots, \omega_h(p_{r_k}) \in A_{r_k}) \\
&= m_H\big(\omega \in \Omega : \omega(p_{r_1}) \in g_{p_{r_1}}^{-1} A_{r_1}, \dots, \omega(p_{r_k}) \in g_{p_{r_k}}^{-1} A_{r_k}\big) \\
&= m_H\big(\omega \in \Omega : \omega(p_{r_1}) \in g_{p_{r_1}}^{-1} A_{r_1}\big) \cdot \ldots \cdot m_H\big(\omega \in \Omega : \omega(p_{r_k}) \in g_{p_{r_k}}^{-1} A_{r_k}\big) \\
&= m_{hH}(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_{r_1}) \in A_{r_1}) \cdot \ldots \cdot m_{hH}(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_{r_k}) \in A_{r_k}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, $\{\omega_h(p)\}$ — последовательность независимых случайных величин, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$.

Для доказательства предложения достаточно показать, что произведение

$$
\prod_{p \nmid \Delta} \left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}
$$

сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости D_0 почти наверное. Для этого, очевидно, достаточно получить почти наверное сходимость на компактных подмножествах полуплоскости D_0 рядов

$$
\sum_{p \nmid \Delta} x_p(s, \omega_h), \tag{2}
$$

где

$$
x_p(s, \omega_h) = \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}.
$$

Обозначим через $\mathbb{E}\xi$ математическое ожидание случайного элемента ξ. Очевидно, что $\mathbb{E}\omega_h(p) = 0$, поэтому $\mathbb{E}x_p(s, \omega_h) = 0$ для каждого простого p. Кроме того,

$$
\mathbb{E}|x_p(s, \omega_h)|^2 \le \frac{\lambda^2(p)}{p^{2\sigma}},
$$

и ввиду (1)

$$
\sum_{p \nmid \Delta} \mathbb{E}|x_p(s, \omega_h)|^2 < \infty
$$

для $s \in D_0$. Следовательно, согласно известной теореме (см. [9, теорема 1.2.11]) ряд (2) сходится почти наверное для каждого фиксированного $s \in D_0$. В силу следствия 2.1.3 из [9] ряд (2) сходится равномерно на компактных подмножествах в D_0 для почти всех $\omega_h \in \Omega_h$ относительно меры m_{hH}. Предложение доказано.

Сформулируем предельную теорему в пространстве аналитических функций для $L_E(s)$.

Теорема 4. *Пусть h, как в теореме 3. Тогда вероятностная мера*

$$
P_N(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_N\left(L_E(s + imh) \in A\right), \quad A \in \mathscr{B}(H(D_0)),
$$

при $N \to \infty$ слабо сходится к распределению случайного элемента $L_E(s, \omega_h)$.

Доказательство теоремы 4 начнем с предельных теорем для полиномов Дирихле. Пусть

$$
p_n(s) = \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-s}, \quad a_m \in \mathbb{C},
$$

— полином Дирихле. Обозначим через $p_1, \dots, p_r$ различные простые числа, делящие произведение $\prod\limits_{m=1}^{n} m$, и положим

$$\Omega_r = \prod_{j=1}^{r} \gamma_{p_j},$$

где $\gamma_{p_j} = \gamma$ для $j = 1, \dots, r$. Предположим, что $n > \max(m_0, n_0)$. Как и в случае Ω, можно определить $\omega(m)$ для $\omega \in \Omega_r$. Кроме того, положим

$$\Omega_{hr} = \{\omega \in \Omega_r : \omega(m_0) = \omega(n_0)\}$$

и на $(\Omega_r, \mathscr{B}(\Omega_r))$ определим вероятностную меру

$$Q_{hN}(A) = \mu_N\big((p_1^{imh}, \dots, p_r^{imh}) \in A\big).$$

Лемма 1. *Вероятностная мера Q_{hN} при $N \to \infty$ слабо сходится к мере Хаара m_{hr} на $(\Omega_{hr}, \mathscr{B}(\Omega_{hr}))$.*

Доказательство леммы дано в [7, лемма 3].

Пусть $g(m)$, $m \in \mathbb{N}$, — вполне мультипликативная функция, $|g(m)| = 1$, $g(m_0) = g(n_0)$ и

$$p_n(s, g) = \sum_{m=1}^{n} a_m g(m) m^{-s}.$$

Определим на $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$ вероятностные меры

$$P_{N,p_n}(A) = \mu_N(p_n(s + imh) \in A), \quad P_{N,p_n,g}(A) = \mu_N(p_n(s + imh, g) \in A).$$

Теорема 5. *Вероятностные меры P_{N,p_n} и $P_{N,p_n,g}$ слабо сходятся при $N \to \infty$ к одной и той же вероятностной мере на $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u : \Omega_r \to H(D_0)$, заданную формулой

$$u(x_1, \dots, x_r) = \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-s} \prod_{\substack{p_j^{\alpha_j} \| m, \\ 1 \le j \le r}} \big(x_j^{\alpha_j}\big)^{-1}, \quad (x_1, \dots, x_r) \in \Omega_r.$$

Очевидно, u непрерывна на Ω_r, кроме того,

$$p_n(s + imh) = u\big(p_1^{imh}, \dots, p_r^{imh}\big).$$

Из этого равенства, непрерывности u, леммы 1 и свойств слабой сходимости (см. [8, теорема 5.1]) вытекает, что мера $P_{N,p_n} = Q_{hN} u^{-1}$ слабо сходится к $m_{hr} u^{-1}$ при $N \to \infty$.

Аналогично, полагая

$$v(x_1, \dots, x_r) = \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-s} \prod_{\substack{p_j^{\alpha_j} \| m, \\ 1 \le j \le r}} \big(x_j^{\alpha_j} g^{-\alpha_j}(p_j)\big)^{-1}, \quad (x_1, \dots, x_r) \in \Omega_r,$$

находим, что мера $P_{N,p_n,g}$ при $N \to \infty$ слабо сходится к $m_{hr} v^{-1}$. Однако $v(x_1, \dots, x_r) = u_1(x_1, \dots, x_r)$, $(x_1, \dots, x_r) \in \Omega_r$, где

$$u_1(x_1, \dots, x_r) = (x_1 g^{-1}(p_1), \dots, x_r g^{-1}(p_r)).$$

Из инвариантности меры Хаара m_{hr} относительно сдвигов на элементы из Ω_{hr} вытекает, что

$$m_{hr}v^{-1} = m_{hr}(u(u_1))^{-1} = \big(m_{hr}u_1^{-1}\big)u^{-1} = m_{hr}u^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следующий шаг доказательства теоремы 4 состоит из предельной теоремы в пространстве аналитических функций для абсолютно сходящихся рядов Дирихле. Для $\sigma_1 > 1/2$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$L_{E,n}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s} \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_1}\Big\}$$

и

$$L_{E,n}(s,\omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)\omega_h(m)}{m^s} \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_1}\Big\}, \quad \omega_h \in \Omega_h.$$

Здесь коэффициенты $\lambda(m)$ определяются при $\sigma > 3/2$ равенством

$$L_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s}.$$

Из оценки (1) следует оценка $\lambda(m) \ll m^{\frac{1}{2}} d(m)$, где $d(m)$ — функция делителей. Из [7, с. 347, 348] вытекает, что ряды $L_{E,h}(s)$ и $L_{E,h}(s,\omega_h)$ сходятся абсолютно при $\sigma > 1$. Определим на $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$ вероятностные меры

$$P_{N,n}(A) = \mu_N(L_{E,n}(s+imh) \in A), \quad \widehat{P}_{N,n}(A) = \mu_N(L_{E,n}(s+imh,\omega_h) \in A).$$

Теорема 6. *Вероятностные меры $P_{N,n}$ и $\widehat{P}_{N,n}$ слабо сходятся при $N \to \infty$ к одной и той же вероятностной мере P_n на $(H(D_0), \mathscr{B}(H(D_0)))$.*

Доказательство. Разобьем доказательство на такие же шаги, как доказательство теоремы 6 в [7], в которой получены аналогичные утверждения для вероятностных мер на комплексной плоскости. Так как пространства $\mathbb{C}$ и $H(D_0)$ отличаются одно от другого используемой топологией, требуется произвести некоторые изменения.

Известно (см., например, [9, лемма 1.7.1] или [10]), что существует последовательность $\{K_n\}$ компактных подмножеств полуплоскости D_0 такая, что

$$D_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

и множества K_n могут быть выбраны так, что $K_n \subset K_{n+1}$ и если K компактно и $K \subset D_0$, то $K \subseteq K_n$ для некоторого n. Для $f, g \in H(D_0)$ положим

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)},$$

где $\rho_n(f,g) = \sup\limits_{s \in K_n} |f(s) - g(s)|$. Тогда ρ — метрика на $H(D_0)$, индуцирующая топологию равномерной сходимости на компактах.

Для $M \in \mathbb{N}$ пусть

$$L_{E,n,M}(s) = \sum_{m=1}^{M} \frac{\lambda(m)}{m^s} \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_1}\Big\}$$

и

$$L_{E,n,M}(s,\omega_h)=\sum_{m=1}^{M}\frac{\lambda(m)\omega_h(m)}{m^s}\exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_1}\Big\},\quad \omega_h\in\Omega_h.$$

Определим на $(H(D_0),\mathscr{B}(H(D_0)))$ вероятностные меры

$$P_{N,n,M}(A)=\mu_N(L_{E,n,M}(s+imh)\in A),$$

$$\widehat{P}_{N,n,M}(A)=\mu_N(L_{E,n,M}(s+imh,\omega_h)\in A).$$

По теореме 5 меры $P_{N,n,M}$ и $\widehat{P}_{N,n,M}$ слабо сходятся при $N\to\infty$ к одной и той же мере, пусть $P_{n,M}$. Прежде всего проверим, что семейство вероятностных мер $\{P_{n,M}\}$ плотно при фиксированном n.

Пусть θ_N — случайная величина, определенная на некотором вероятностном пространстве $(\widehat{\Omega},\mathscr{B}(\widehat{\Omega},\mathbb{P}))$ и принимающая значения mh, $m=0,1,\dots,N$, и

$$\mathbb{P}(\theta_N=mh)=\frac{1}{N+1},\quad m=0,1,\dots,N.$$

Тогда, полагая $X_{N,n,M}(s)=L_{E,n,M}(s+i\theta_N)$, по теореме 5 имеем

$$X_{N,n,M}(s)\xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{D}}X_{n,M}(s),\tag{3}$$

где $X_{n,M}(s)$ — $H(D_0)$-значный случайный элемент с распределением $P_{n,M}$ и $\xrightarrow{\mathscr{D}}$ означает сходимость по распределению. Согласно неравенству Чебышёва для $M_l>0$ имеем

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|X_{N,n,M}(s)|>M_l)\le\frac{1}{(N+1)M_l}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K_l}|L_{E,n,M}(s+imh)|,\tag{4}$$

где $\{K_l\}$ — определенная выше последовательность компактных множеств. Так как ряд для $L_{E,n}(s)$ сходится абсолютно на D_0, то

$$\sup_{M\ge1}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K_l}|L_{E,n,M}(s+imh)|\le R_l<\infty.\tag{5}$$

Возьмем $M_l=\frac{R_l2^l}{\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$ произвольно. Из (4) и (5) для $l\in\mathbb{N}$ вытекает, что

$$\limsup_{N\to\infty}\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|X_{N,n,M}(s)|>M_l)\le\frac{\varepsilon}{2^l}.\tag{6}$$

Функция $u:H(D_0)\to\mathbb{R}$, заданная формулой $u(f)=\sup\limits_{s\in K_l}|f(s)|$, $f\in H(D_0)$, непрерывна, поэтому ввиду (3)

$$\sup_{s\in K_l}|X_{N,n,M}(s)|\xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{D}}\sup_{s\in K_l}|X_{n,M}(s)|.$$

Из этой сходимости и (6) получаем, что

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|X_{n,M}(s)|>M_l)\le\frac{\varepsilon}{2^l}.\tag{7}$$

Пусть $H_\varepsilon=\{f\in H(D_0):\sup\limits_{s\in K_l}|f(s)|\le M_l,\ l\in\mathbb{N}\}$. Тогда по принципу компактности (теореме Монтеля, см. [9, теорема 5.5.2]) H_ε компактно и в силу (7)

$$\mathbb{P}(X_{n,M}(s)\in H_\varepsilon)\ge1-\varepsilon$$

для любого $M \in \mathbb{N}$, или
$$P_{n,M}(H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$
для любого $M \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что семейство вероятностных мер $\{P_{n,M}\}$ плотно. По теореме Прохорова (см. [8]) оно относительно компактно.

По определению $L_{E,n,M}(s)$ и $L_{E,n}(s)$ при $\sigma > 1$ имеем
$$\lim_{M\to\infty} L_{E,n,M}(s) = L_{E,n}(s),$$
и так как ряд $L_{E,n}(s)$ сходится абсолютно, сходимость равномерна на компактных подмножествах в D_0. Тогда для любого $\varepsilon > 0$
$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu_N(\rho(L_{E,n,M}(s+imh), L_{E,n}(s+imh)) \geq \varepsilon)$$
$$\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\varepsilon} \sum_{m=0}^{n} \rho(L_{E,n,M}(s+imh), L_{E,n}(s+imh)) = 0.$$
Отсюда, полагая $X_{N,n}(s) = L_{E,n}(s + i\theta_N)$, получим
$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_{N,n,M}(s), X_{N,n}(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{8}$$
Пусть $\{P_{n,M_1}\}$ — подпоследовательность $\{P_{n,M}\}$, слабо сходящаяся при $M_1 \to \infty$, скажем, к P_n. Тогда
$$X_{n,M_1} \xrightarrow[M_1\to\infty]{\mathscr{D}} P_n. \tag{9}$$
Пространство $H(D_0)$ сепарабельно. Поэтому (3), (8), (9) и теорема 4.2 из [8] показывают, что
$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathscr{D}} P_n, \tag{10}$$
т. е. мера $P_{N,n}$ слабо сходится при $N \to \infty$ к P_n. Кроме того, из (10) вытекает, что мера P_n не зависит от выбора подпоследовательности $\{P_{n,M_1}\}$. Таким образом,
$$X_{n,M} \xrightarrow[M\to\infty]{\mathscr{D}} P_n. \tag{11}$$
Проводя аналогичные рассуждения для случайных элементов
$$\widehat{X}_{N,n,M}(s,\omega_h) = L_{E,n,M}(s + i\theta_N, \omega_h), \quad \widehat{X}_{N,n}(s,\omega_h) = L_{E,n}(s + i\theta_N, \omega_h),$$
ввиду (11) получим, что вероятностная мера $\widehat{P}_{N,n}$ также слабо при $N \to \infty$ сходится к P_n. Теорема 6 доказана.

Для доказательства теоремы 4 осталось перейти от функции $L_{E,n}(s)$ к $L_E(s)$. Для этого потребуется приближение в среднем функций $L_E(s)$ и $L_E(s,\omega_h)$ функциями $L_{E,n}(s)$ и $L_{E,n}(s,\omega_h)$ соответственно.

Лемма 2. *Пусть K — компактное подмножество полуплоскости D_0. Тогда*
$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - L_{E,n}(s+imh)| = 0.$$

Доказательство. Из [1] и [4, с. 79] вытекает, что функция $L_E(s)$ при $\sigma > 1$ имеет конечный порядок, т. е.
$$L_E(\sigma + it) \ll |t|^\alpha, \quad |t| \geq t_0 > 0, \ \alpha > 0, \tag{12}$$

и среднее квадратическое $L_E(s)$ для $\sigma > 1$ ограничено:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |L_E(\sigma+it)|^2\,dt \ll 1, \quad T\to\infty. \tag{13}$$

Используя формулу Коши, из (13) выводим, что при $\sigma > 1$

$$\frac{1}{T}\int_0^T |L_E'(\sigma+it)|^2\,dt \ll 1, \quad T\to\infty.$$

Этот факт, (13) и лемма Галлахера (см. [11, лемма 1.4]) показывают, что при $\sigma > 1$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N} |L_E(\sigma+imh+i\tau)|^2 \ll 1+|\tau|, \quad N\to\infty. \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что для $\sigma > 1$

$$L_{E,n}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} L_E(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z},$$

где $l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\bigl(\frac{s}{\sigma_1}\bigr)n^s$. Изменим контур в последнем интеграле. Пусть $\sigma_2 > 1$ и $\sigma_2 < \sigma$. Так как подынтегральная функция имеет простой полюс в точке $z = 1$, теорема о вычетах вместе с (12) дает

$$L_{E,n}(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty} L_E(s+z)l_n(z)\frac{dz}{z} + L_E(s). \tag{15}$$

Пусть замкнутый контур L в D_0 охватывает множество K, и пусть δ — расстояние от L до множества K. По интегральной формуле Коши

$$\sup_{s\in K}|L_E(s+imh) - L_{E,n}(s+imh)| \le \frac{1}{2\pi\delta}\int_L |L_E(z+imh) - L_{E,n}(z+imh)||dz|.$$

Тогда для достаточно большого N

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K}|L_E(s+imh) - L_{E,n}(s+imh)| \\
&\qquad\ll \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{2\pi\delta}\int_L |L_E(z+imh) - L_{E,n}(z+imh)||dz| \\
&\qquad\qquad\ll \frac{|L|}{N+1}\sup_{s\in L}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma+imh) - L_{E,n}(\sigma+imh)|,
\end{aligned} \tag{16}$$

где $|L|$ — длина L. Согласно (15)

$$L_E(\sigma+imh) - L_{E,n}(\sigma+imh) \ll \int_{-\infty}^{\infty} |L_E(\sigma_2+imh+i\tau)||l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\,d\tau.$$

Поэтому в силу (14) находим, что

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma+imh)-L_{E,n}(\sigma+imh)|$$
$$\ll\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\left(\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma_2+imh+i\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\tau$$
$$\ll\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)\,d\tau. \quad (17)$$

Можно выбрать δ и σ_2 так, чтобы выполнялись неравенства $\sigma_2-\sigma\le -c<0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\sigma\le -c}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)\,d\tau=0.$$

Отсюда, из (16) и (17) вытекает утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть K — компактное подмножество полуплоскости D_0. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K}|L_E(s+imh,\omega_h)-L_{E,n}(s+imh,\omega_h)|=0$$

для п. в. $\omega_h\in\Omega_h$.

Доказательство. Поскольку $\{\omega_h(m)\}$ — последовательность попарно ортогональных случайных величин (см. [7, с. 342]), с использованием теоремы Радемахера о рядах попарно ортогональных случайных величин (см., например, [12, с. 458]) и оценки $\lambda(m)\ll m^{\frac{1}{2}}d(m)$ получим, что ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)\omega_h(m)}{m^s}$$

для п. в. $\omega_h\in\Omega$ сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости D_0. Из доказательства предложения 1 вытекает, что произведение

$$\prod_{p|\Delta}\left(1-\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid\Delta}\left(1-\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}+\frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}$$

также сходится равномерно на компактных подмножествах D_0 для п. в. $\omega_h\in\Omega_h$. Так как для $\sigma>3/2$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)\omega_h(m)}{m^s}=\prod_{p|\Delta}\left(1-\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid\Delta}\left(1-\frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}+\frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1},$$

в силу аналитического продолжения это равенство остается выполненным для п. в. $\omega_h\in\Omega_h$ в полуплоскости $\sigma>1$. Значит, по лемме 9 из [7] вытекает, что при $\sigma>1$

$$\sum_{m=0}^{N}|L_E(\sigma+imh,\omega_h)|^2\ll N,\quad N\to\infty, \quad (18)$$

для п. в. $\omega_h \in \Omega_h$. Отметим, что в лемме 9 из [7] рассматривается широкий класс рядов Дирихле, включающий функцию $L_E(s)$.

Теперь ввиду (18) доказательство леммы совпадает с доказательством леммы 2.

Доказательство теоремы 4. Сначала заметим, что вероятностные меры P_N и $\widehat{P}_N(A) = \mu_N(L_E(s+imh,\omega_h) \in A)$, $A \in \mathscr{B}(H(D_0))$, слабо сходятся при $N \to \infty$ к одной и той же вероятностной мере P на $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$. Действительно, принимая во внимание теорему 6 и леммы 2, 3, можно получить это с помощью рассуждений, аналогичных приведенным при доказательстве теоремы 6. В этом случае рассмотрим $H(D_0)$-значный случайный элемент $X_{N,n}(s) = L_{E,n}(s+i\theta_N)$ вместо $X_{N,n,M}(s)$ и случайный элемент $Y_N(s) = L_E(s+i\theta_N)$ вместо $X_{N,n}$. Подобные замены используются также для случайных элементов $\widehat{X}_{N,n,M}(s,\omega_h)$ и $\widehat{X}_{N,n}(s,\omega_h)$.

Явный вид предельной меры получаем стандартным методом. Возьмем множество непрерывности A меры P. Тогда ввиду первой части доказательства

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N\left(L_E(s+imh,\omega_h) \in A\right) = P(A). \tag{19}$$

Фиксируем множество A, и пусть θ — случайная величина на $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$, заданная равенством

$$\theta(\omega_h) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_E(s,\omega_h) \in A, \\ 0, & \text{если } L_E(s,\omega_h) \notin A. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbb{E}\theta = \int\limits_{\Omega_h} \theta dm_{hH} = m_{hH}\left(\omega_h \in \Omega_h : L_E(s,\omega_h) \in A\right) = P_{L_E}(A), \tag{20}$$

где $P_{L_E}(A)$ — распределение случайного элемента $L_E(s,\omega_h)$.

Пусть $a_h = \{p^{-ih} : p \text{ простое}\}$. Определим преобразование f_h множества Ω_h, взяв $f_h(\omega_h) = a_h\omega_h$ для $\omega_h \in \Omega_h$. Тогда f_h — измеримое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$. В [7, лемма 7] доказано, что преобразование f_h эргодично. Из этого факта и классической теоремы Биркгофа вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \theta\big(f_h^m(\omega_h)\big) = \mathbb{E}\theta \tag{21}$$

для п. в. $\omega_h \in \Omega_h$. Однако определения θ и f_h показывают, что левая часть в (21) равна

$$\mu_N(L_E(s+imh,\omega_h) \in A).$$

Поэтому ввиду (20) и (21)

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L_E(s+imh,\omega_h) \in A) = P_{L_E}(A)$$

для п. в. ω_h. Отсюда и из (19) следует, что $P(A) = P_{L_E}(A)$ для любого множества непрерывности меры P. Значит, $P(A) = P_{L_E}(A)$ для любого $A \in \mathscr{B}(H(D_0))$.

Пусть $M > 0$ произвольно и

$$D_M = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < 3/2,\ |t| < M\}.$$

Очевидно, что $D_M \subset D_0$, поэтому $L_E(s,\omega_h)$ также будет $H(D_M)$-значным случайным элементом на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Обозначим его распределение через $P_{L_E,M}$.

Следствие 1. *Вероятностная мера*

$$\mu_N(L_E(s+imh)\in A), \quad A\in\mathscr{B}(H(D_M)),$$

слабо сходится при $N\to\infty$ к $P_{L_E,M}$.

Доказательство. Так как функция $f : H(D_0)\to H(D_M)$, заданная равенством $f(g)=g(s)|_{s\in D_M}$, $g\in H(D_0)$, непрерывна, следствие легко вытекает из теоремы 4 и теоремы 5.1 в [8].

3. Доказательство теоремы 3

Для доказательства теоремы 3 надо показать, что носителем меры $P_{L_E,M}$ является множество

$$S_M=\{g\in H(D_M) : g(s)\neq 0 \text{ или } g(s)\equiv 0 \text{ на } D_M\}.$$

Начнем с одного утверждения о плотности. Пусть для $a_p\in\gamma$

$$f_p(s,a_p)=\begin{cases} -\log\bigl(1-\frac{\lambda(p)a_p}{p^s}\bigr), & \text{если } p|\Delta,\\ -\log\bigl(1-\frac{\lambda(p)a_p}{p^s}+\frac{a_p^2}{p^{2s-1}}\bigr), & \text{если } p\nmid\Delta. \end{cases} \tag{22}$$

Лемма 4. *Множество всех сходящихся рядов $\sum\limits_p f_p(s,a_p)$ плотно в $H(D_M)$.*

Доказательство. Для каждого фиксированного p_0 докажем, что множество всех сходящихся рядов

$$\sum_{p>p_0} f_p(s,1)a_p, \quad a_p\in\gamma, \tag{23}$$

плотно в $H(D_M)$. Для краткости обозначим

$$\hat f_p(s,1)=\begin{cases} f_p(s,1), & \text{если } p>p_0,\\ 0, & \text{если } p\le p_0. \end{cases}$$

Ввиду (1) для $p>p_0$ имеем

$$\hat f_p(s,1)=\frac{\lambda(p)}{p^s}+r_p(s)$$

с $r_p(s)\ll p^{1-2\sigma}$, поэтому ряд $\sum\limits_p r_p(s)$ сходится равномерно на компактных подмножествах в D_M. Далее, при доказательстве предложения 1 установлено, что ряд $\sum\limits_p \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}$ сходится равномерно на компактных подмножествах в D_M для п. в. $\omega_h\in\Omega_h$ относительно меры m_{hH}. Согласно этому замечанию существует последовательность $\{\hat a_p : \hat a_p\in\gamma\}$ такая, что ряд

$$\sum_p \hat f_p(s,1)\hat a_p \tag{24}$$

сходится в $H(D_M)$.

Пусть $g_p(s)=\hat f_p(s,1)\hat a_p$. Для доказательства плотности множества всех сходящихся рядов (23), очевидно, достаточно получить плотность множества всех сходящихся рядов

$$\sum_p g_p(s)a_p, \quad a_p\in\gamma, \tag{25}$$

в $H(D_M)$. Для этого применим теорему 6.3.10 из [9].

Пусть μ — комплексная борелевская мера на $(\mathbb{C}, \mathscr{B}(\mathbb{C}))$ с компактным носителем, содержащимся в D_M, такая, что

$$\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} g_p(s)\, d\mu \right| < \infty. \tag{26}$$

Пусть $h_p(s) = \frac{\lambda(p)\hat{a}_p}{p^s}$. Тогда, очевидно, ряд $\sum\limits_p |g_p(s) - h_p(s)|$ сходится равномерно на компактных подмножествах в D_M. Поэтому из (26) вытекает, что

$$\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} h_p(s)\, d\mu \right| < \infty,$$

откуда

$$\sum_p |\lambda(p)| \left| \int_{\mathbb{C}} p^{-s}\, d\mu \right| < \infty. \tag{27}$$

Преобразуем теперь область D_M. Пусть $\widehat{D}_M = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, $u(s) = s - 1/2$ и $\mu u^{-1}(A) = \mu(u^{-1}A)$, $A \in \mathscr{B}(\mathbb{C})$. Тогда μu^{-1} — комплексная борелевская мера с компактным носителем, содержащимся в $\widehat{D}_M$, и ввиду (27)

$$\sum_p |\lambda_p||k(\log p)| < \infty, \tag{28}$$

где $\lambda_p = \lambda(p)p^{-\frac{1}{2}}$ и

$$k(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz}\, d\mu u^{-1}(s), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Применим теорему Бернштейна (см. [9, теорема 6.4.12]) к функции $k(z)$. Сначала отметим, что для положительного y

$$|k(\pm iy)| \le e^{My} \int_{\mathbb{C}} |\, d\mu u^{-1}(s)|.$$

Отсюда

$$\limsup_{y \to \infty} \frac{\log |k(\pm y)|}{y} \le M,$$

поэтому условие a) упомянутой теоремы выполнено с $\alpha = M$. Возьмем положительное β, $\beta < \pi/M$, и определим множество

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \exists r \in ((m - 1/4)\beta, (m + 1/4)\beta],\ k(r) \le e^{-r}\}.$$

Пусть θ, $0 < \theta < 1$, фиксировано. Через P_θ обозначим множество простых чисел таких, что $|\lambda_p| > \theta$. Тогда (28) влечет

$$\sum_{p \in P_\theta} |k(\log p)| < \infty. \tag{29}$$

Кроме того,

$$\sum_{p \in P_\theta} |k(\log p)| \ge \sum_{m \notin A} {\sum_p}' |k(\log p)| \ge \sum_{m \notin A} {\sum_p}' \frac{1}{p}, \tag{30}$$

где $\sum'_p$ означает суммирование по всем простым $p \in P_\theta$ таким, что

$$(m - 1/4)\beta < \log p \le (m + 1/4)\beta.$$

Пусть $a = \exp\{(m-1/4)\beta\}$ и $b = \exp\{(m+1/4)\beta\}$. Тогда (29) и (30) показывают, что

$$\sum_{m \notin A} \sum_{\substack{p \in P_\theta, \\ a < p \le b}} \frac{1}{p} < \infty. \tag{31}$$

Полагая

$$\pi_\theta(x) = \sum_{\substack{p \le x, \\ p \in P_\theta}} 1,$$

по определению λ_p и (1) находим, что для $a < u \le b$

$$\sum_{a<p\le u} \lambda_p^2 \le 4 \sum_{\substack{a<p\le u, \\ p \in P_\theta}} 1 + \theta^2 \sum_{\substack{a<p\le u, \\ p \notin P_\theta}} 1 = (4-\theta^2)(\pi_\theta(u) - \pi_\theta(a)) + \theta^2(\pi(u) - \pi(a)), \tag{32}$$

где, как обычно, $\pi(x) = \sum\limits_{p \le x} 1$.

Согласно гипотезе Шимуры, Таниямы и Вейля, доказанной частично в [13] и полностью в [1], функция $L_E(s)$ совпадает с L-функцией некоторой новой формы веса 2 для некоторой подгруппы Гекке. Поэтому из [14, теорема 8.4] следует, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \le x} \lambda_p^2 = 1.$$

Пусть δ — малая положительная константа и $u \ge a(1+\delta)$. Тогда отсюда и (32) выводим, что при $m \to \infty$

$$(\pi_\theta(u) - \pi_\theta(a)) \ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2} + o(1)\right)(\pi(u) - \pi(a)).$$

Этот факт и суммирование по частям влекут, что при $m \to \infty$

$$\sum_{\substack{p \in P_\theta, \\ a<p\le b}} \frac{1}{p} = \int_a^b \frac{d\pi_\theta(u)}{u} \ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2} + o(1)\right) \int_a^b \frac{d\pi(u)}{u} \ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2} + o(1)\right) \sum_{a(1+\delta)<p\le b} \frac{1}{p}. \tag{33}$$

Из классической формулы

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O(e^{-c_2\sqrt{x}}), \quad x \to \infty,$$

получаем, что при $m \to \infty$

$$\sum_{a(1+\delta)<p\le b} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{\log(1+\delta)}{\beta} \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Отсюда и из (33) при $m \to \infty$ приходим к неравенству

$$\sum_{\substack{p \in P_\theta, \\ a<p\le b}} \frac{1}{p} \ge \frac{1-\theta^2}{4-\theta^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\log(1+\delta)}{\beta}\right) \frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Таким образом, ввиду (31) для достаточно малого δ имеем

$$\sum_{m \notin A} \frac{1}{m} < \infty. \tag{34}$$

Пусть $A = \{a_m\}$, где $a_1 < a_2 < \dots$. Тогда (34) показывает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} = 1. \tag{35}$$

По определению множества A существует последовательность $\{\xi_m\}$ такая, что

$$(a_m - 1/4)\beta < \xi_m \le (a_m + 1/4)\beta \tag{36}$$

и $|k(\xi_m)| \le e^{-\xi_m}$. Отсюда в силу (35)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\xi_m}{m} = \beta \tag{37}$$

и

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log|k(\xi_m)|}{\xi_m} \le -1. \tag{38}$$

Соотношение (37) представляет собой условие c) теоремы 6.4.12 из [9]. Кроме того, по (36)

$$|\xi_m - \xi_n| \ge |a_m - a_n|\beta - \beta/2 \ge c_3|m-n|.$$

Поэтому условие b) теоремы 6.4.12 из [9] также выполнено. Следовательно, из последней теоремы и (38) вытекает, что

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|k(r)|}{r} \le -1. \tag{39}$$

Однако по лемме 6.4.10 из [9] если $k(z) \not\equiv 0$, то

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|k(r)|}{r} > -1,$$

что противоречит (39). Отсюда $k(z) \equiv 0$, и, дифференцируя, находим, что

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^r \, d\mu u^{-1}(s) = 0, \quad r = 0,1,2,\dots.$$

Этот факт и определение μu^{-1} показывают, что также

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^r \, d\mu(s) = 0, \quad r = 0,1,2,\dots.$$

Мы доказали выполнение условия a) теоремы 6.3.10 из [9]. Кроме того, согласно определению $g_p(s)$ ряд $\sum\limits_p g_p(s)$ сходится в $H(D_M)$, и для каждого компактного подмножества K в D_M

$$\sum_p \sup_{s\in K} |g_p(s)|^2 < \infty.$$

Значит, последовательность $\{g_p(s)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.3.10 из [9]. Отсюда множество всех сходящихся рядов (25) плотно в $H(D_M)$.

Теперь нетрудно завершить доказательство леммы 4. Пусть K — компактное подмножество в D_M, $x(s) \in H(D_M)$ и $\varepsilon > 0$ произвольно. Фиксируем p_0 так, что

$$\sup_{s\in K}\left(\sum_{p>p_0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\lambda(p)|^k}{kp^{k\sigma}}\right) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{40}$$

В силу плотности всех сходящихся рядов (23) найдется последовательность $\{\tilde{a}_p : \tilde{a}_p \in \gamma\}$ такая, что

$$\sup_{s\in K}\Big|x(s) - \sum_{p\le p_0} f_p(s,1) - \sum_{p>p_0} f_p(s,1)\tilde{a}_p\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{41}$$

Положим

$$a_p = \begin{cases} 1, & \text{если } p \le p_0,\\ \tilde{a}_p, & \text{если } p > p_0.\end{cases}$$

Тогда ввиду (40) и (41) имеем

$$\sup_{s\in K}\Big|x(s) - \sum_{p} f_p(s,a_p)\Big| \le \sup_{s\in K}\Big|x(s) - \sum_{p\le p_0} f_p(s,1) - \sum_{p>p_0} f_p(s,1)\tilde{a}_p\Big|$$
$$+ \sup_{s\in K}\Big|\sum_{p>p_0} f_p(s,1)\tilde{a}_p - \sum_{p>p_0} f_p(s,a_p)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + 2\sup_{s\in K}\left(\sum_{p>p_0}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\lambda(p)|^k}{kp^{k\sigma}}\right) < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим носитель меры $P_{L_E,M}$.

Лемма 5. *Носителем меры $P_{L_E,M}$ является множество S_M.*

Доказательство. Доказывая предложение 1, мы видели, что $\{\omega_h(p)\}$ — последовательность независимых случайных величин на вероятностном пространстве $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Отсюда, сохраняя обозначения (22), получаем, что $\{f_p(s,\omega_h(p))\}$ — последовательность независимых $H(D_M)$-значных случайных элементов на $(\Omega_h, \mathscr{B}(\Omega_h), m_{hH})$. Носителем случайного элемента $f_p(s,\omega_h(p))$ является множество

$$\{g \in H(D_M) : g(s) = f_p(s,a),\ a \in \gamma\}.$$

Следовательно, по теореме 1.7.10 из [9] носитель $H(D_M)$-значного случайного элемента

$$\log L_E(s,\omega_h) = \sum_p f_p(s,\omega_h(p))$$

представляет собой замыкание множества всех сходящихся рядов

$$\sum_p f_p(s,a_p), \quad a_p \in \gamma.$$

По лемме 4 последнее множество плотно в $H(D_M)$. Отображение $u : H(D_M) \to H(D_M)$, заданное формулой $u(g) = e^g$, $g \in H(D_M)$, является непрерывной функцией, переводящей $\log L_E(s,\omega_h)$ на $L_E(s,\omega_h)$ и $H(D_M)$ на $S_M \setminus \{0\}$. Таким образом, носитель $L_E(s,\omega_h)$ содержит множество $S_M \setminus \{0\}$. Однако носитель случайного элемента $L_E(s,\omega_h)$ — замкнутое множество. Тогда по теореме Гурвица (см. [9, лемма 6.5.6]) $\overline{S_M \setminus \{0\}} = S_M$ и, следовательно, носитель $L_E(s,\omega_h)$ содержит множество S_M. С другой стороны, $L_E(s,\omega_h)$ является почти наверное сходящимся произведением ненулевых множителей, поэтому по теореме Гурвица опять получаем, что носитель $L_E(s,\omega_h)$ содержится в S_M почти наверное. Этот факт вместе со сделанными выше замечаниями доказывает лемму.

Доказательство теоремы 3. Очевидно, существует число $M > 0$ такое, что компактное множество K содержится в D_M. Предположим сначала, что функция $f(s)$ имеет ненулевое аналитическое продолжение в D_M. Пусть G — множество функций $g \in H(D_M)$ таких, что

$$\sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon.$$

Множество G открыто и по лемме 5 функция $f(s)$ содержится в носителе случайного элемента $L_E(s,\omega_h)$. Поэтому из следствия 1, свойств слабой сходимости вероятностных мер и теоремы 1.1.8 из [9] вытекает, что

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - f(s)| < \varepsilon) \geq P_{L_E,M}(G) > 0. \tag{42}$$

Пусть теперь $f(s)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда по теореме Мергеляна (см., например, [15]) существует многочлен $p_n(s)$, $p_n(s) \neq 0$ на K, такой, что

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p_n(s)| < \varepsilon/4. \tag{43}$$

Так как множество нулей многочлена $p_n(s)$ конечно, найдется область G_1 со связным дополнением такая, что $K \subset G_1$ и $p_n(s) \neq 0$ на G_1. Следовательно, существует непрерывная ветвь $\log p_m(s)$ на G_1, аналитическая внутри G_1. По теореме Мергеляна вновь получаем существование многочлена $q_m(s)$ такого, что

$$\sup_{s\in K} |p_n(s) - e^{q_m(s)}| < \varepsilon/4.$$

Этот факт и (43) показывают, что

$$\sup_{s\in K} |f(s) - e^{q_m(s)}| < \varepsilon/2. \tag{44}$$

Однако $e^{q_m(s)} \neq 0$. Поэтому из (42) выводим, что

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - e^{q_m(s)}| < \varepsilon/2) > 0.$$

Отсюда и из (44) получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Breuil C., Conrad B., Diamond F., Taylor R.* On the modularity of elliptic curves over $\mathbb{Q}$: wild 3-adic exercises // J. Amer. Math. Soc. 2001. V. 14, N 4. P. 843–939.
2. *Washington L. C.* Elliptic curves, number theory and cryptography. London; New York: Chapman and Hall/CRC, 2003.
3. *Garbaliauskienė V., Laurinčikas A.* Some analytic properties for L-functions of elliptic curves // Proc. Inst. Math. 2005. V. 13, N 1. P. 1–8.
4. *Лауринчикас А., Матсумото К., Стеудинг Й.* Универсальность L-функций, связанных с новыми формами // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 1. С. 83–98.
5. *Воронин С. М.* Теорема об «универсальности» дзета-функции Римана // Изв АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39, № 3. С. 475–486.
6. *Garbaliauskienė V., Laurinčikas A.* Discrete value distribution of L-functions of elliptic curves // Publ. Inst. Math. 2004. V. 76, N 90. P. 65–71.

7. *Kačinskaitė R., Laurinčikas A.* On the value distribution of the Matsumoto zeta-function // Acta Math. Hung. 2004. V. 105, N 4. P. 339–359.
8. *Billingsley P.* Convergence of probability measures. New York: John Wiley & Sons, 1968.
9. *Laurinčikas A.* Limit theorems for the Riemann zeta-function. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
10. *Conway J. B.* Functions of one complex variable. New York: Springer-Verl., 1973.
11. *Montgomery L. M.* Topics in multiplicative number theory. Berlin: Springer-Verl., 1971.
12. *Loève M.* Probability theory. Toronto: Van Nostrand, 1955.
13. *Wiles A.* Modular elliptic curves and Fermat's last theorem // Ann. Math. 1995. V. 141, N 3. P. 443–551.
14. *Murty M. R., Murty V. K.* Non-vanishing of L-functions and applications. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
15. *Walsh J. L.* Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1960. (Amer. Math. Soc. Collog. Publ.; V. 20).

Статья поступила 13 февраля 2007 г.

V. Garbaliauskienė, J. Genys (Гарбаляускене Виргиния, Генис Йонас)
Department of Mathematics and Informatics
Šiauliai University, Višinskio 19, 77156 Šiauliai, Lithuania
`mat.kat@fm.su.lt`

A. Laurinčikas (Лауринчикас Антанас)
Department of Mathematics and Informatics, Vilnius University
Naugarduko 24, Vilnius 03225, Lithuania,
Department of Mathematics and Informatics Šiauliai University
`antanas.laurincikas@maf.vu.lt`