Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.55

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 2, СВОБОДНОЙ В МНОГООБРАЗИИ $\mathfrak{AN}_2$

М. А. Шевелин

Аннотация. Изучено расположение некоторых конечных подгрупп в группе автоморфизмов алгебры Ли ранга 2, свободной в многообразии $\mathfrak{AN}_2$.

Ключевые слова: автоморфизмы приведенно свободных алгебр.

§ 1. Введение

Пусть k — поле. Если L — алгебра Ли над k, то через $L' = [L, L]$ обозначаем коммутант алгебры L.

Обозначим через F алгебру Ли над k с двумя порождающими элементами x_1 и x_2, свободную в многообразии алгебр Ли, задаваемом тождеством

$$[[[X, Y], Z], [[X_1, Y_1], Z_1]] = 0.$$

Упомянутое многообразие состоит из алгебр Ли над k с коммутативным идеалом, фактор по которому есть нильпотентная алгебра Ли ступени 3.

Частные производные и вложение Магнуса для приведенно свободных алгебр Ли ввели У. У. Умирбаев и О. Г. Харлампович (см. [1, 2]). Последний автор нашел критерий обратимости эндоморфизма, связанный с этими производными. Изучению групп автоморфизмов приведенно свободных алгебр посвящены многочисленные работы. Список литературы на эту тему, не претендующий на полноту, можно найти, например, в [3, 4].

В настоящей работе мы выясняем, как расположены конечные подгруппы в группе $\mathrm{Aut}(F)$ автоморфизмов алгебры F. При этом приведены некоторые детали строения группы $\mathrm{Aut}(F)$. Представления конечных и редуктивных групп автоморфизмами свободной ассоциативной алгебры изучались А. Н. Корюкиным [5].

Пусть L — свободная алгебра Ли над полем k с множеством свободных порождающих $t_1, \dots, t_n$. Ее универсальная обертывающая алгебра U есть свободная ассоциативная алгебра с тем же множеством свободных порождающих. Мы считаем, что L содержится в U. Хорошо известно, что ядро стандартного пополнения $\varepsilon : U \longrightarrow k$ алгебры U, продолжающего нулевое отображение L в k, является свободным правым U-модулем с базой $t_1, \dots, t_n$. Поэтому каждый элемент x этого ядра может быть единственным способом записан в виде

$$x = \sum t_i f_i$$

для некоторых $f_i \in U$. В частности, это верно для $x \in L$. Отображение из L в U, ставящее в соответствие элементу $x \in L$ элемент $f_i \in U$, называется

i-й производной Фокса для x. Если $^{-}\colon U \longrightarrow \overline{U}$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр, то $\bar{f}_i$ называется *значением производной Фокса в алгебре $\overline{U}$*.

Для того чтобы задать эндоморфизм α алгебры F, достаточно указать образы $y_1 = \alpha(x_1)$ и $y_2 = \alpha(x_2)$. Такой эндоморфизм будет автоморфизмом тогда и только тогда, когда элементы y_1 и y_2 порождают F.

Матрицей Якоби эндоморфизма α называется матрица, составленная из значений производных Фокса элементов y_i в алгебре $\overline{F}$.

Автоморфизм $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$ называется *линейным*, если образы $\phi(x_1)$ и $\phi(x_2)$ являются линейными комбинациями x_1 и x_2. Каждому линейному автоморфизму взаимно однозначно соответствует невырожденное линейное преобразование векторного пространства, натянутого на порождающие x_1, x_2. Определение линейного автоморфизма зависит от выбора свободных порождающих x_1, x_2. Линейные автоморфизмы образуют (при любом выборе свободных порождающих) подгруппу, изоморфную $GL_2(k)$ в группе $\mathrm{Aut}(F)$. Эту подгруппу мы будем называть *подгруппой линейных автоморфизмов*. Если изменить множество свободных порождающих, то группа линейных автоморфизмов изменится на сопряженную.

В группе $\mathrm{Aut}(F)$ имеется еще одна важная подгруппа. Она состоит из автоморфизмов, индуцирующих на алгебре F/F' тождественное отображение. Мы будем обозначать эту группу через $I(F)$. Подгруппа $I(F)$ нормальна в $\mathrm{Aut}(F)$. Для всякого автоморфизма $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$ можно подобрать такой линейный автоморфизм λ, что произведение $\lambda\phi$ индуцирует на F/F' тождественное отображение. Отсюда следует, что группа $\mathrm{Aut}(F)$ является расщепляемым расширением группы $I(F)$ с помощью $GL_2(k)$. Элементы группы $I(F)$ называются *тождественными по модулю коммутанта*. Аналогично определяются эндоморфизмы, тождественные по модулю коммутанта.

Фактор-алгебра $\overline{F}$ алгебры F по коммутативному идеалу $A = [[F,F],F]$ изоморфна трехмерной алгебре Гейзенберга. Порождающие алгебры $\overline{F}$: $\bar{x}_1 = x_1 + A$, $\bar{x}_2 = x_2 + A$ и их коммутатор $\bar{z} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ удовлетворяют следующим (определяющим) соотношениям:

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2] - \bar{z} = 0, \quad [\bar{x}_1, \bar{z}] = [\bar{x}_2, \bar{z}] = 0. \tag{1}$$

Универсальную обертывающую алгебру $U\overline{F}$ обозначаем через R. Хорошо известно, что R не имеет делителей нуля. Ассоциативная алгебра R порождена теми же элементами, что и $\overline{F}$, и имеет те же самые определяющие соотношения (1), если под $[x,y]$ подразумевать $xy - yx$. Векторное пространство A мы рассматриваем как правый R-модуль относительно (естественного) действия

$$a\bar{x}_1 = [a, x_1], \quad a\bar{x}_2 = [a, x_2] \quad (a \in A).$$

Кроме того, поскольку A — эндоморфно допустимый идеал в F, то каждый эндоморфизм ϕ алгебры F определяет некоторый эндоморфизм ϕ_1 алгебры Гейзенберга $\overline{F}$ и тем самым эндоморфизм ϕ_1 ассоциативной алгебры R. Если $\phi \in \mathrm{Aut}(F)$, то $\phi_1 \in \mathrm{Aut}(R)$.

Векторное пространство A является k-линейной оболочкой неассоциативных слов Холла от букв x_1, x_2 длины не менее 3. Поэтому R-модуль A порождается двумя элементами $f_1 = [z, x_1]$ и $f_2 = [z, x_2]$. Следовательно, для каждого элемента $g \in F$ можно найти запись в виде

$$g = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \gamma z + f_1 v_1 + f_2 v_2 \quad (\lambda_1, \lambda_2, \gamma \in k,\ v_1, v_2 \in R). \tag{2}$$

Отсюда следует, что каждый тождественный по модулю коммутанта эндоморфизм α алгебры F можно задать, правда не единственным способом, при помощи правила

$$\alpha(x_1) = x_1 + \gamma_1 z + f_1 v_{11} + f_2 v_{21}, \quad \alpha(x_2) = x_2 + \gamma_2 z + f_1 v_{12} + f_2 v_{22}. \tag{3}$$

Здесь $\gamma_i \in k$, $v_{ij} \in R$ $(i, j \in \{1, 2\})$. Неединственность записи эндоморфизма возникает потому, что вместо матрицы

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$$

для записи ϕ можно использовать любую другую матрицу V', для которой $V' - V = (\bar{x}_2, -\bar{x}_1)^T(u_1, u_2)$, где $u_1, u_2 \in R$, а «^{T}» — транспонирование. Это следует из очевидного соотношения $f_1\bar{x}_2 - f_2\bar{x}_1 = 0$. Если мы обозначим через y вектор $(\bar{x}_2, -\bar{x}_1) \in R^2$, а также положим $f = (f_1, f_2)$, то предыдущее соотношение можно переписать как $fy^T = 0$. Кроме того, далее нам понадобится вектор $x = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R^2$. Символом 1 обозначаем единичный элемент группы, тождественное отображение и единичную матрицу.

§ 2. *R*-модуль *A*

В свободном правом R-модуле $R^2 = e_1R \oplus e_2R$ с базисом e_1, e_2 рассмотрим подмодуль eR, порожденный единственным элементом $e = e_1\bar{x}_2 - e_2\bar{x}_1$.

Лемма 1. *Последовательность R-модулей*

$$0 \to eR \to R^2 \to A \to 0,$$

в которой вторая стрелка — тождественное отображение, а третья стрелка действует по правилу $e_1 \mapsto f_1$, $e_2 \mapsto f_2$, точна. Поэтому $A \cong R^2/eR$.

Доказательство. Нам нужно проверить, что из равенства $f_1a + f_2b = 0$ $(a, b \in R)$ следует существование такого $u \in R$, для которого $a = \bar{x}_2u, b = -\bar{x}_1u$. Воспользуемся вложением Магнуса. Напомним, что отображение

$$x_i \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x}_i & 0 \\ e_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

единственным способом продолжается до вложения алгебры Ли F в расщепляемое расширение свободного правого R-модуля $e_1R \oplus e_2R$ при помощи алгебры $\overline{F}$:

$$F \to F_1 = \begin{pmatrix} \overline{F} & 0 \\ R^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом подразумевается, что на F_1 введена обычная операция коммутирования матриц и произведение элемента из модуля на элемент из кольца R справа — это действие R на R^2.

Сначала вычислим образы элементов f_1 и f_2 относительно вложения Магнуса:

$$f_1 = [[x_1, x_2], x_1] \mapsto \left[\left[\begin{pmatrix} \bar{x}_1 & 0 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x}_2 & 0 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & 0 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} \bar{z} & 0 \\ e_1\bar{x}_2 - e_2\bar{x}_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x}_1 & 0 \\ e_1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1\bar{x}_2\bar{x}_1 - e_2\bar{x}_1^2 - e_1\bar{z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично
$$f_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1\bar{x}_2^2 - e_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - e_2\bar{z} & 0 \end{pmatrix}.$$

Если для некоторых $a, b \in R$ выполнено равенство $f_1 a + f_2 b = 0$, то, взяв образ при вложении Магнуса, получим равенство
$$(e_1\bar{x}_2\bar{x}_1 - e_2\bar{x}_1^2 - e_1\bar{z})a + \big(e_1\bar{x}_2^2 - e_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - e_2\bar{z}\big)b = 0.$$
Раскрыв скобки и собрав коэффициенты при e_1 и e_2 в последнем равенстве, получим
$$(\bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{z})a + \bar{x}_2^2 b = 0, \quad -\bar{x}_1^2 a - (\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{z})b = 0. \tag{4}$$
Фактор-алгебра $R/\bar{z}R$ изоморфна алгебре многочленов $k[\bar{x}_1 + \bar{z}R, \bar{x}_2 + \bar{z}R]$. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем использовать для смежных классов $\bar{x}_1 + \bar{z}R, \bar{x}_2 + \bar{z}R$ буквы $\bar{x}, \bar{x}_2$, а вместо знака равенства писать «$\equiv$», подразумевая сравнение по модулю $\bar{z}R$. В этих терминах (4) переписывается следующим образом:
$$\bar{x}_2\bar{x}_1 a + \bar{x}_2^2 b \equiv 0, \quad -\bar{x}_1^2 a - \bar{x}_1\bar{x}_2 b \equiv 0,$$
что эквивалентно сравнениям $a \equiv \bar{x}_2 u_0$, $b \equiv -\bar{x}_1 u_0$ для некоторого $u_0 \in R$. Поэтому $a = \bar{x}_2 u_0 + \bar{z}a_1$, $b = -\bar{x}_1 u_0 - \bar{z}b_1$ для некоторых $a_1, b_1 \in R$. Если подставить это в (4) и преобразовать, получатся два равенства:
$$\bar{z}\big((\bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{z})a_1 + \bar{x}_2^2 b_1\big) = 0, \quad \bar{z}\big(\bar{x}_1^2 a_1 + (\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{z})b_1\big) = 0.$$
Так как алгебра R, будучи универсальной обертывающей, делителей нуля не имеет, то можно сократить на $\bar{z}$ и получить для a_1, b_1 те же равенства, которым удовлетворяли a, b. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта алгебра R является свободным модулем над своим центром. Этот центр есть алгебра многочленов от буквы $\bar{z}$. Отсюда следует, что на R имеется корректно определенная «функция» — степень по $\bar{z}$. Поэтому, применяя очевидную индукцию, получаем, что для некоторого целого неотрицательного числа d и некоторых $u_0, \dots, u_d \in R$
$$a = \bar{x}_2 u_0 + \bar{z}\bar{x}_2 u_1 + \dots + \bar{z}^d \bar{x}_2 u_d, \quad b = -\bar{x}_1 u_0 - \bar{z}\bar{x}_1 u_1 - \dots - \bar{z}^d \bar{x}_1 u_d.$$
Стало быть, для элемента $u = u_0 + \bar{z}u_1 + \dots + \bar{z}^d u_d$ имеем $a = \bar{x}_2 u, b = -\bar{x}_1 u$, что и требовалось.

В доказательстве предыдущей леммы неявно фигурирует матрица
$$G = \begin{pmatrix} \bar{x}_2\bar{x}_1 - \bar{z} & \bar{x}_2^2 \\ -\bar{x}_1^2 & -\bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{z} \end{pmatrix} = y^T x - \bar{z} \cdot 1.$$
В следующей лемме отмечены некоторые ее свойства, которые нам пригодятся.

Лемма 2. 1. *Последовательность левых R-модулей*
$$0 \to R \xrightarrow{x} R^2 \xrightarrow{G} R^2 \xrightarrow{y^T} R \xrightarrow{\varepsilon} k \to 0$$
точна. Здесь ε — стандартное пополнение $\varepsilon(\bar{x}_i) = 0$ $(i = 1, 2)$, а через x, G, y^T обозначены умножения справа на соответствующие матрицы. Поле k рассматривается как R-модуль, определенный тривиальным действием $\overline{F}$.

2. *R-модуль A без кручения.*

Доказательство. 1. Равенства
$$xG = x(y^T x - \bar{z} \cdot 1) = \bar{z}x - x(\bar{z} \cdot 1) = 0, \quad Gy^T = (y^T x - \bar{z} \cdot 1)y^T = y^T \bar{z} - (\bar{z} \cdot 1)y^T = 0$$

показывают, что $\operatorname{im} x \subseteq \ker G$ и $\operatorname{im} G \subseteq \ker y^T$. Пусть вектор $v = (a, b) \in R^2$ таков, что $vG = 0$. Выполнив умножение, получим для a и b левые аналоги уравнений (4), из которых тем же способом, что и в лемме 1, выводится, что $v = qx$ для некоторого $q \in R$. Иными словами, $v \in \operatorname{im} x$. Если же $vy^T = 0$, то из редукции по модулю $\bar{z}R$ получается, что $a = s\bar{x}_1 + \bar{z}a_1$, $b = s\bar{x}_2 + \bar{z}b_1$ для некоторых $s, a_1, b_1 \in R$. Подставив эти равенства в равенство $vy^T = 0$ и сократив на $\bar{z}$, имеем $s = a_1\bar{x}_2 - b_1\bar{x}_1$, откуда

$$\begin{aligned} v = (a, b) &= (s\bar{x}_1 + \bar{z}a_1, s\bar{x}_2 + \bar{z}b_1) \\ &= ((a_1\bar{x}_2 - b_1\bar{x}_1)\bar{x}_1 + \bar{z}a_1, (a_1\bar{x}_2 - b_1\bar{x}_1)\bar{x}_2 + \bar{z}b_1) = (-a_1, b_1)G \in \operatorname{im} G. \end{aligned}$$

Этим точность во втором и третьем членах проверена. Точность в остальных членах очевидна.

2. Так как $\operatorname{im} G = \ker y^T$, то по лемме 1 модуль A изоморфен подмодулю $\operatorname{im} G$ свободного модуля R^2. Так как R — целостная алгебра, то A без R-кручения. Лемма доказана.

§ 3. Некоторые эндоморфизмы алгебры F

Мы будем говорить, что эндоморфизм α алгебры F есть *s-эндоморфизм*, если

$$\alpha(x_1) = x_1 + f_1v_{11} + f_2v_{21}, \quad \alpha(x_2) = x_2 + f_1v_{12} + f_2v_{22} \tag{5}$$

для некоторой 2×2-матрицы $V = (v_{ij})$ с элементами в R.

Заметим, что, очевидно, по s-эндоморфизму α матрица V определена неоднозначно. С другой стороны, если V_1 — другая матрица, определяющая эндоморфизм α в вышеуказанном смысле, то из леммы 1 нетрудно получить, что $V - V_1 = y^T v$ для некоторого вектора $v \in R^2$.

Наша следующая цель — выяснить, как действуют s-эндоморфизмы на подалгебре A алгебры F.

Лемма 3. *Пусть α — s-эндоморфизм, заданный правилом* (5). *Тогда*

1) $(\alpha(f_1), \alpha(f_2)) = (f_1, f_2)(1 + VG)$;

2) *сужения s-эндоморфизмов алгебры F на подалгебру A являются эндоморфизмами правого R-модуля A.*

Доказательство состоит в прямом вычислении, которое мы и проведем.

1. Сначала вычислим $\alpha(z)$:

$$\begin{aligned} \alpha(z) = \alpha([x_1, x_2]) &= [x_1 + f_1v_{11} + f_2v_{21}, x_2 + f_1v_{12} + f_2v_{22}] \\ &= z + f_1(v_{11}\bar{x}_2 - v_{12}\bar{x}_1) + f_2(v_{21}\bar{x}_2 - v_{22}\bar{x}_1). \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha(f_1) = \alpha([z, x_1]) &= [z + f_1(v_{11}\bar{x}_2 - v_{12}\bar{x}_1) + f_2(v_{21}\bar{x}_2 - v_{22}\bar{x}_1), x_1 + f_1v_{11} + f_2v_{21}] \\ &= f_1 + f_1\big(v_{11}\bar{x}_2\bar{x}_1 - v_{12}\bar{x}_1^2 - v_{11}\bar{z}\big) + f_2\big(v_{21}\bar{x}_2\bar{x}_1 - v_{22}\bar{x}_1^2 - v_{21}\bar{z}\big). \end{aligned}$$

Аналогично

$$\alpha(f_2) = f_2 + f_1\big(v_{11}\bar{x}_2^2 - v_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 - v_{12}\bar{z}\big) + f_2\big(v_{21}\bar{x}_2^2 - v_{22}\bar{x}_1\bar{x}_2 - v_{22}\bar{z}\big).$$

В матричных терминах это именно то, что требовалось в п. 1 леммы.

2. Из определения правого R-модуля A следует, что для $m \in A$ и $r \in R$ справедливо равенство $\alpha(mr) = \alpha(m)\alpha_1(r)$. Здесь через α_1 обозначен эндоморфизм, индуцированный s-эндоморфизмом α алгебры F на алгебре $R = U(F/A)$, как это объяснено во введении. Понятно, что $\alpha_1(r) = r$ для всех $r \in R$, что и требуется. Лемма доказана.

Лемма 4. *Каждый автоморфизм $\alpha \in I(F)$ является s-эндоморфизмом.*

Доказательство. Возьмем эндоморфизм α алгебры F, заданный правилом (3). Из работы У. У. Умирбаева [1] следует, что если такой эндоморфизм является автоморфизмом, то его матрица Якоби

$$J(\alpha) = 1 + \begin{pmatrix} -\gamma_1\bar{x}_2+(2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{x}_2\bar{x}_1)v_{11}+\bar{x}_2^2v_{21} & -\gamma_2\bar{x}_2+(2\bar{x}_1\bar{x}_2-\bar{x}_2\bar{x}_1)v_{12}+\bar{x}_2^2v_{22} \\ \gamma_1\bar{x}_1-\bar{x}_1^2v_{11}+(\bar{x}_1\bar{x}_2-2\bar{x}_2\bar{x}_1)v_{21} & \gamma_2\bar{x}_1-\bar{x}_1^2v_{12}+(\bar{x}_1\bar{x}_2-2\bar{x}_2\bar{x}_1)v_{22} \end{pmatrix}$$

должна быть обратимой матрицей над R. Из того, что матрица $J(\alpha)$ обратима, следует, что обратима ее редукция J_1 по модулю идеала $\bar{z}R$, имеющая элементы в коммутативной алгебре $R/\bar{z}R$. Вычислим определитель:

$$\det(J_1) = 1 - \gamma_1\bar{x}_2 + \gamma_2\bar{x}_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2v_{11} - \bar{x}_1^2v_{12} + \bar{x}_2^2v_{21} - \bar{x}_1\bar{x}_2v_{22} + \bar{z}R. \tag{6}$$

Поскольку $R/\bar{z}R$ есть алгебра многочленов $k[\bar{x}_1 + \bar{z}R, \bar{x}_2 + \bar{z}R]$, обратимость элемента (6) в этой алгебре влечет

$$-\gamma_1\bar{x}_2 + \gamma_2\bar{x}_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2v_{11} - \bar{x}_1^2v_{12} + \bar{x}_2^2v_{21} - \bar{x}_1\bar{x}_2v_{22} \equiv 0 (\operatorname{mod} \bar{z}R).$$

Из сравнения степеней сразу же следует, что $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Лемма доказана.

§ 4. Автоморфизмы алгебры *F*

Лемма 5. *Пусть $\alpha \in I(F)$. Тогда*

1) $\alpha\,|_A\, = 1$,

2) *найдется такой вектор $v \in R^2$, что*

$$\alpha(x_1) = x_1 + fv^Tx, \quad \alpha(x_2) = x_2 + fv^Tx,$$

3) *группа $I(F)$ изоморфна аддитивной группе A.*

Доказательство. 1. Поскольку R является универсальной обертывающей конечномерной алгебры Ли, алгебра R имеет тело частных Q. Тензорное произведение $A \otimes_R Q$ вкладывается (по п. 2 леммы 2) в правое векторное пространство $R^2 \otimes_R Q \cong Q^2$ в качестве одномерного подпространства A_1. Из п. 2 леммы 3 следует, что отображение $(\alpha - 1)|_A$ является эндоморфизмом R-модуля A. Оно продолжается до линейного преобразования одномерного Q-пространства A_1. Ясно, что это продолжение может быть только умножением на скаляр из Q. Поэтому матрицу V в (5) можно выбрать так, что матрица VG будет иметь вид $a \cdot 1$ ($a \in Q$). Это, однако, невозможно при $a \neq 0$, поскольку матрица VG имеет правый ранг, не превосходящий 1 ($Gy^T = 0$).

2. Из леммы 3 и предыдущего пункта следует, что если $(\alpha(x_1), \alpha(x_2)) = (x_1, x_2) + fV$ для некоторой матрицы V, то V можно выбрать так, что будет выполнено равенство $VG = 0$. Тогда из леммы 2 следует, что $V = v^Tx$ для некоторого $v \in R^2$.

3. Пусть β — второй автоморфизм такой, что $(\beta(x_1), \beta(x_2)) = (x_1, x_2) + fW$, причем $W = w^Tx$ для некоторого элемента $w \in R^2$. Тогда

$$\begin{aligned}(\alpha(\beta(x_1)), \alpha(\beta(x_2))) &= (\alpha(x_1), \alpha(x_2)) + \alpha(fW) \\ &= (x_1, x_2) + fV + \alpha(fW) = (x_1, x_2) + fV + fW + fVGW.\end{aligned}$$

По лемме 2 имеем

$$VGW = (v^Tx)G(w^Tx) = v^T(xGw^T)x = 0.$$

Поэтому $(\alpha\beta)(x_1, x_2) = (x_1, x_2) + f(V + W)$. Отображение $R^2 \ni v \mapsto \alpha \in I(F)$ является гомоморфизмом «на» по предыдущему пункту. Из леммы 1 следует, что его ядром служит yR. Поэтому $I(F) \cong R^2/yR \cong A$ по лемме 2.

§ 5. Конечные подгруппы $\mathbf{Aut}(\boldsymbol{F})$

Пусть n — целое положительное число. Напомним, что группа G называется *n-делимой*, если каждое уравнение $x^n = g$ ($g \in G$) имеет хотя бы одно решение в G. Следующая лемма будет доказана в несколько большей общности, чем нам потребуется.

Лемма 6. *Пусть $n \geq 1$ — целое число, $\Gamma = S \cdot M$ — группа, являющаяся расщепляемым расширением своей нормальной подгруппы M при помощи подгруппы $S < \Gamma$. Предположим, что M — разрешимая группа, в которой факторы ряда коммутантов являются n-делимыми группами без кручения. Если G — подгруппа порядка n в Γ, то найдется такой элемент $v \in M$, что $vGv^{-1} \leq S$.*

Доказательство. 1. Сначала предположим, что M — абелева группа с операцией «+». Расширение $S \cdot M$ будем представлять себе как группу

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ M & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом мы считаем, что S и M вложены туда при помощи отображений $S \to \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $M \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ M & 1 \end{pmatrix}$. Каждый элемент группы G может быть записан в виде

$$g = \begin{pmatrix} s_g & 0 \\ w_g & 1 \end{pmatrix},$$

где $s_g \in S$, $w_g \in M$. Для произведения gh получается формула (для $s \in S$ и $w \in M$ под произведением ws понимается естественное действие S на M при помощи сопряжения)

$$gh = \begin{pmatrix} s_g & 0 \\ w_g & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_h & 0 \\ w_h & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_g s_h & 0 \\ w_g s_h + w_h & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $w_g s_h + w_h = w_{gh}$ для любых $g, h \in G$. Рассмотрим элемент

$$v' = \sum_{g \in G} w_g \in M.$$

Тогда для $x \in G$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} v' - v's_x = \sum_g w_g - \sum_g w_g s_x = \sum_g w_g - \sum_g (w_{gx} - w_x) \\ = \sum_g w_g - \sum_g w_g + \sum_g w_x = n w_x. \end{aligned}$$

Положим $v = n^{-1} v'$. Тогда, во-первых, $v \in M$, поскольку M — n-делимая группа, во-вторых, для каждого $x \in G$ будет $vs_x - w_x - v = 0$ и

$$vxv^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ w_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ vs_x - w_x - v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

как и требовалось.

2. Пусть теперь M неабелева и M_1 — последний нетривиальный член ряда коммутантов группы M. Рассмотрим группу Γ / M_1 и три ее подгруппы $S/(S \cap M_1)$, M/M_1, $G/(G \cap M_1)$. Из того, что группа M_1 без кручения и $|G| = n$, получаем, что пересечение $G \cap M_1$ тривиально. Пересечение $S \cap M_1 \leq S \cap M$ тоже

тривиально по условию. Можно воспользоваться индукцией по ступени разрешимости, начиная со случая, разобранного в п. 1, чтобы найти такой элемент $x \in M$, что $xGx^{-1} \leq S \cdot M_1$. Четыре группы M_1, S, $S \cdot M_1$, xGx^{-1} удовлетворяют предположениям п. 1, и поэтому найдется такой элемент $y \in M_1$, что $yxGx^{-1}y^{-1} \leq S$. Лемма доказана.

Теорема. *Пусть F — свободная алгебра Ли ранга 2 в многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ над полем k. Если порядок конечной подгруппы G в $\mathrm{Aut}(F)$ не делится на характеристику поля k, то найдется такая система свободных порождающих алгебры F, относительно которой все элементы группы G являются линейными автоморфизмами. Если, кроме того, поле k алгебраически замкнуто и G абелева, то G сопряжена с группой, действующей на порождающие диагонально.*

Доказательство следует из лемм 5 и 6.

Я благодарен рецензенту за замечания, способствовавшие исправлению существенных ошибок, имевшихся в первоначальном тексте.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Умирбаев У. У.* Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 179–188.
2. *Харлампович О. Г.* Условие Линдона для разрешимых алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 1984. № 9. С. 50–59.
3. *Umirbaev U. U.* Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables // J. Reine Angew. Math. (Crelles Journal). 2006. N 600. P. 203–235.
4. *Umirbaev U. U.* Defining relations for automorphism groups of free algebras // доступно на arXiv:math/0607237
5. *Корюкин А. Н.* Некоммутативные инварианты редуктивных групп // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 4. С. 419–429.

Статья поступила 17 декабря 2006 г.

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru