Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 515.16

ПОВЕДЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ СЛОЖНОСТИ НЕПРИВОДИМЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

О. Н. Шатных

Аннотация. Строится расширенная сложность неприводимого трехмерного многообразия, которая в отличие от обычной сложности [1] является не числом, а упорядоченным набором пяти целых чисел. Преимущество расширенной сложности состоит в том, что она всегда уменьшается при разрезании многообразия по несжимаемой гранично несжимаемой поверхности.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, спайн, сложность.

Пусть M — компактное трехмерное многообразие. Напомним, что сложность многообразия M (обозначается через $c(M)$) определяется как число истинных вершин его минимального почти простого спайна (см. [1, гл. 2]). Этот инвариант замечателен, в частности, тем, что он не увеличивается при разрезании трехмерного многообразия по несжимаемой поверхности [1]. Задача состоит в том, чтобы построить характеристику трехмерного многообразия, которая всегда уменьшается при разрезании по несжимаемой гранично несжимаемой поверхности. В [1, п. 4.2] построена расширенная сложность и доказано, что при разрезании по несжимаемой поверхности с краем такая сложность уменьшается. В [2] показано, что при разрезании по замкнутой несжимаемой поверхности предложенная характеристика может увеличиться.

В данной работе мы строим расширенную сложность ориентируемого неприводимого многообразия, которая всегда уменьшается при разрезании многообразия по несжимаемой гранично несжимаемой поверхности.

Автор благодарит Сергея Владимировича Матвеева за помощь в подготовке статьи.

§ 1. Сложность и D-корень трехмерных многообразий

Напомним терминологию, следуя [1] (определения 1–7).

Определение 1. Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

(a) окружности (такая точка x называется *неособой*);

(b) окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной точкой*);

(c) окружности с тремя радиусами (такая точка x называется *истинной вершиной*).

Заметим, что линк истинной вершины простого полиэдра является полным графом с четырьмя вершинами.

© 2008 Шатных О. Н.

Определение 2. Компактный полиэдр P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф с четырьмя вершинами.

Определение 3. *Истинной вершиной* почти простого полиэдра называется точка полиэдра, линк которой является полным графом с четырьмя вершинами.

Определение 4. *Тройной точкой* почти простого полиэдра называется точка, линк которой является объединением конечного (возможно, пустого) множества точек и окружности с диаметром.

Тройные точки организуются в тройные линии, соединяющие истинные вершины, и тройные окружности.

Определение 5. Спайн P трехмерного многообразия M называется *простым* или *почти простым*, если он является простым или почти простым полиэдром соответственно.

Определение 6. *Сложность* $c(M)$ компактного трехмерного многообразия M равна k, если M имеет почти простой спайн с k истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин.

Пусть P — почти простой полиэдр. Через $c_1(P)$ обозначим число тройных окружностей этого полиэдра.

Определение 7. Пусть трехмерное многообразие M имеет сложность k. Тогда через $c_1(M)$ обозначим $\min\limits_P c_1(P)$, где минимум берется по всем почти простым спайнам многообразия M с k вершинами.

Замечание 1. Определим операцию разрезания трехмерного многообразия по собственной поверхности. Пусть M — трехмерное многообразие, F — собственная поверхность в M. Через $N(F)$ обозначим регулярную окрестность поверхности F в многообразии M. Будем говорить, что многообразие $M_F = M\backslash(\operatorname{Int} N(F) \cup \operatorname{Int}(\partial M \cap N(F)))$ получено разрезанием многообразия M по поверхности F. Таким образом, многообразие M_F лежит в M.

Напомним, что собственный диск D в многообразии M называется *существенным*, если его граничная окружность ∂D нетривиальна на ∂M.

Определение 8. Многообразие $M' \subset M$ называется *D-корнем* [3] или *сердцевиной* [1] неприводимого трехмерного многообразия M, если выполняются следующие условия:

1) M' гранично неприводимо;

2) M' получено из многообразия M с помощью следующих операций:

— разрезания многообразия по существенному диску;

— отбрасывания связной компоненты, гомеоморфной трехмерному шару.

D-корень трехмерного многообразия M будем обозначать через $R(M)$.

Известно [1, предложение 4.1.25], что для любого неприводимого трехмерного многообразия D-корень существует и единствен с точностью до изотопии. Кроме того, D-корень лежит в многообразии (см. замечание 1). Многообразие может быть получено из своего D-корня добавлением нескольких трехмерных шаров и приклеиванием ручек индекса 1.

Замечание 2. Пусть поверхность F — компонента края многообразия M. Если F несжимаема, то граничные окружности существенных дисков по ней не проходят. Поэтому поверхность F сохраняется при переходе к D-корню $R(M)$, следовательно, является компонентой $\partial R(M)$. Обратное также верно: если

$F \subset \partial M$ является компонентой края D-корня $R(M)$, то F несжимаема. Отметим, что многообразие получается из своего D-корня добавлением нескольких трехмерных шаров и приклеиванием ручек индекса 1.

Определение 9. Пусть поверхность F является компонентой края и многообразия M, и его корня $R(M)$. Тогда F называется *свободной* поверхностью многообразия M.

Выбор термина связан с тем, что при переходе от D-корня к многообразию ручки к поверхности F не приклеиваются, т. е. поверхность остается свободной. Напомним, если поверхность свободна, то она несжимаема.

Характеристики $c(R(M))$ и $c_1(R(M))$ D-корня трехмерного многообразия M совпадают с соответствующими характеристиками самого трехмерного многообразия (так как разрезание по дискам не меняет этих характеристик [1, лемма 4.2.10]).

§ 2. *I*-компоненты трехмерного многообразия

Пусть M — ориентируемое трехмерное многообразие, $R(M)$ — его D-корень.

Определение 10. *I-компонентой* D-корня $R(M)$ многообразия M будем называть его компоненту связности вида $G\times I$ (прямое произведение поверхности на отрезок), где G — замкнутая ориентируемая поверхность либо вида $G\widetilde{\times}I$ (ориентируемое косое произведение поверхности на отрезок), где G — замкнутая неориентируемая поверхность. Поверхность G в обоих случаях называется *базой I-компоненты.*

Замечание 3. Пусть G_I — I-компонента многообразия M и $F \subset \partial G_I$ — одна из поверхностей ее края. Так как $G_I \subset R(M)$ и $R(M) \subset M$, то $F \subset M$. Возможны два случая: $F \subset \partial M$ (такая поверхность будет свободной) и $F \not\subset \partial M$.

Определение 11. *I-числом* многообразия M будем называть число

$$I(M) = 3I_0^+(M) + I_1^+(M) + I_2^+(M) + 4I_0^-(M) + 2I_1^-(M),$$

где $I_k^\epsilon(M)$ — число I-компонент D-корня многообразия M, имеющих ориентируемую (при $\epsilon = +$) или неориентируемую (при $\epsilon = -$) базу и k свободных поверхностей края.

Заметим, что общее число I-компонент $I_0^+(M)+I_1^+(M)+I_2^+(M)+I_0^-(M)+I_1^-(M)$ корня $R(M)$ при разрезании многообразия по замкнутой существенной поверхности может увеличиться. Например, пусть G_I — I-компонента с ориентируемой базой G и без свободных поверхностей края, и пусть поверхность F содержится в G_I (отметим, что тогда F изотопна G, см. лемму 1). Разрежем многообразие M по поверхности F. Компонента G_I разрушится, и вместо нее в D-корне $R(M_F)$ появятся две новые I-компоненты с ориентируемой базой G и одной свободной поверхностью края. Таким образом, общее число I-компонент увеличилось. Это мешает использованию общего числа I-компонент в качестве одного из параметров расширенной сложности. Вместо него мы берем I-число многообразия M. Коэффициенты в его определении подобраны так, чтобы при разрезании I-компоненты по замкнутой существенной поверхности оно всегда уменьшалось.

Лемма 1. *Пусть G_I — I-компонента с базой G и $F \subset G_I$ — замкнутая несжимаемая поверхность, отличная от сферы. Тогда*

1) *если G ориентируема, то F параллельна краю ∂G_I;*

2) *если G неориентируема, то F либо параллельна краю ∂G_I, либо изотопна G.*

Доказательство. Триангулируем поверхность G. Эта триангуляция поверхности индуцирует разбиение многообразия G_I на призмы вида $\Delta \times I$. Если G — ориентируемая поверхность, то основания призм лежат в разных компонентах края многообразия G_I, если неориентируемая, то в одной.

Затем триангулируем призмы стандартным образом: вершины тетраэдров триангуляции совпадают с вершинами призмы и других вершин триангуляции нет. Получим триангуляцию многообразия G_I, причем тетраэдры триангуляции будут двух типов:

1) на крае многообразия G_I лежат основание тетраэдра и его вершина;

2) на крае лежат противоположные ребра тетраэдра.

Так как поверхность F несжимаема, ее можно изотопией привести в нормальное положение относительно данной триангуляции.

Пусть Δ — треугольник триангуляции и e_1, e_2, e_3 — ребра этого треугольника, причем ребро e_3 лежит на крае многообразия G_I. Так как поверхность F замкнута, то $F \cap e_3 = \varnothing$. Поскольку поверхность F нормальна, то F пересекает Δ по дугам, параллельным e_3, поэтому $\sharp F \cap e_1 = \sharp F \cap e_2$, т. е. поверхность F пересекает ребра триангуляции e_1, e_2 в одинаковом числе точек. Очевидно, что все остальные ребра триангуляции, не лежащие на крае многообразия G_I, поверхность F будут пересекать такое же число раз.

Пусть $e = [AB]$ — ребро триангуляции. Точку $x \in F \cap e$ будем называть *внешней точкой пересечения*, если $[xA]$ или $[xB]$ не содержат других точек из $F \cap e$. Внешних точек не может быть больше двух. Легко видеть, что если треугольник или четырехугольник, по которому поверхность F пересекает тетраэдр триангуляции, имеет хотя бы одну внешнюю вершину, то и остальные вершины многоугольника также будут внешними. Таким образом, эти многоугольники образуют внешнюю поверхность. Так как F связна, она может только содержаться во внешней поверхности. Следовательно, поверхность F может пересекать ребра триангуляции, не лежащие на крае многообразия G_I, либо в двух точках, либо в одной. Рассмотрим оба случая.

(1) F пересекает ребра в двух точках. Это возможно, если поверхность G неориентируема, и тогда F параллельна краю многообразия G_I.

(2) F пересекает ребра в одной точке. Тогда если G ориентируема, то F проходит параллельно краю многообразия G_I, а если неориентируема, то F изотопна G. $\square$

Лемма 2. *Пусть G_I — I-компонента многообразия M с базой G и $F \subset M$ — связная замкнутая несжимаемая поверхность такая, что F содержится в G_I и F не параллельна ∂M. Тогда $I(M_F) < I(M)$.*

Доказательство. 1. Пусть база G — ориентируемая поверхность. Тогда по лемме 1 поверхность F параллельна ∂G_I и F изотопна G.

1.1. Если G_I — компонента с одной или двумя свободными компонентами края, то F параллельна ∂M, что запрещено условием.

1.2. Если F лежит в I-компоненте без свободных компонент края, то из-за приклеенных ручек F не параллельна ∂M. При разрезании по F компонента G_I распадается на две компоненты с одной свободной поверхностью. Таким образом, $I_0^+(M_F) = I_0^+(M) - 1$, $I_1^+(M_F) = I_1^+(M) + 2$ и

$$I(M_F) = 3(I_0^+(M) - 1) + (I_1^+(M) + 2) + I_2^+(M) + 4I_0^-(M) + 2I_1^-(M) = I(M) - 1.$$

Значит, $I(M_F) < I(M)$.

2. Пусть база G — неориентируемая поверхность. По лемме 1 поверхность F либо параллельна ∂G_I, либо изотопна G.

2.1. Если край компоненты G_I свободен и F параллельна ∂G_I, то F параллельна ∂M, что запрещено условием леммы.

2.2. Пусть край компоненты G_I свободен и F изотопна G. Тогда при разрезании по F данная I-компонента разрушается и получается I-компонента с ориентируемой базой ∂G_I и двумя несжимаемыми компонентами края, т. е.

$$I_1^-(M_F) = I_1^-(M) - 1 \text{ и } I_2^+(M_F) = I_2^+(M) + 1.$$

Поэтому

$$I(M_F) = 3I_0^+(M) + I_1^+(M) + (I_2^+(M) + 1) + 4I_0^-(M) + 2(I_1^-(M) - 1) = I(M) - 1$$

и $I(M_F) < I(M)$.

2.3. Если G_I — компонента без свободных поверхностей края и F изотопна G, то при разрезании по F получается I-компонента с ориентируемой базой ∂G_I и одной свободной поверхностью края. Таким образом, $I_0^-(M_F) = I_0^-(M) - 1$ и $I_1^+(M_F) = I_1^+(M) + 1$, т. е.

$$I(M_F) = 3I_0^+(M) + (I_1^+(M) + 1) + I_2^+(M) + 4(I_0^-(M) - 1) + 2I_1^-(M) = I(M) - 3$$

и $I(M_F) < I(M)$.

2.4. Пусть G_I — компонента без свободных поверхностей края и F параллельна ∂G_I (но из-за приклеенных ручек не параллельна ∂M). Тогда при разрезании получатся I-компонента с ориентируемой базой ∂G_I и одной свободной поверхностью края и I-компонента с неориентируемой базой G и свободной поверхностью края, т. е. $I_0^-(M_F) = I_0^-(M) - 1$, $I_1^+(M_F) = I_1^+(M) + 1$ и $I_1^-(M_F) = I_1^-(M) + 1$. Следовательно,

$$I(M_F) = 3I_0^+(M) + (I_1^+(M) + 1) + I_2^+(M) + 4(I_0^-(M) - 1) + 2(I_1^-(M) + 1) = I(M) - 1$$

и $I(M_F) < I(M)$. $\square$

§ 3. Расширенная сложность трехмерных многообразий

Определение 12. *Расширенной сложностью* компактного ориентируемого трехмерного многообразия M называется пятерка

$$\bar{c}(M) = (c(M), c_1(M), -\partial_I(M), I(M), g^{(2)}(\partial M)),$$

где $c(M)$ — обычная сложность M, $c_1(M)$ — минимальное число тройных окружностей, взятое по всем почти простым спайнам M с $c(M)$ вершинами, $\partial_I(M)$ — число свободных поверхностей в ∂M, которые не лежат в I-компонентах D-корня многообразия M, $I(M)$ — I-число многообразия M, $g^{(2)}(\partial M) = \sum_i g^2(F_i)$, где $g(F_i)$ — род компоненты $F_i \subset \partial M$ и суммирование ведется по всем компонентам края ∂M.

Наборы рассматриваются в лексикографическом порядке.

Например, S^3 имеет расширенную сложность $(0, 0, 0, 0, 0)$, а I-расслоения над замкнутой поверхностью F имеют расширенную сложность $(0, 0, 0, 2, (n -$

$1)^2$), если F — связная сумма n проективных плоскостей, и $(0,0,0,1,2g^2)$, если F — ориентируемая поверхность рода g.

Определение 13. Собственную поверхность $F \subset M$ будем называть *существенной*, если F несжимаема, гранично несжимаема, не параллельна ∂M и отлична от тривиальных сферы и диска.

Пусть M — трехмерное многообразие. Существует тесная связь между разбиениями на ручки и почти простыми спайнами многообразия M. Зная спайн многообразия, можно построить его разбиение на ручки, и обратно [1, п. 4.2].

Лемма 3. *Пусть разбиение на ручки ξ неприводимого трехмерного многообразия M отвечает его почти простому минимальному клеточному спайну P, F — связная существенная нормальная поверхность в M. Тогда $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.*

Доказательство. 1. Пусть F — диск. При разрезании по диску корень многообразия не меняется. Следовательно, первые две компоненты расширенной сложности сохраняются, и свободные поверхности края многообразия остаются свободными. Если при разрезании по F появляется свободная поверхность, не лежащая в I-компоненте, то $-\partial_I(M_F) < -\partial_I(M)$, а значит, $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$. Если при разрезании появилась свободная поверхность, которая лежит в I-компоненте, то первые три компоненты расширенной сложности не меняются. В этом случае уменьшается одно из чисел I_0^+, I_1^+ или I_0^- и увеличивается соответственно одно из I_1^+, I_2^+ или I_1^-. Поэтому $I(M_F) \le I(M)$. В любом случае $g^{(2)}(\partial M_F) < g^{(2)}(\partial M)$ [3] и $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2. $F \ne D^2$. Так как F — связная нормальная поверхность, то F не пересекает ручек разбиения ξ, отвечающих одномерным ребрам спайна P. Поэтому $F \cap P$ лежит в простой части P, т. е. F лежит в одной из компонент D-корня многообразия M.

2.1. Пусть $\partial F \ne \varnothing$, F не содержится в I-компоненте многообразия M.

Если $c(M_F) < c(M)$ или $c(M_F) = c(M)$ и $c_1(M_F) < c_1(M)$, то утверждение доказано. Иначе F — кольцо или лист Мёбиуса с центральной окружностью $F \cap P$ [1, лемма 4.2.4]. Это означает, что спайн многообразия M_F получается из спайна многообразия M разрезанием вдоль окружности, лежащей в 2-компоненте C полиэдра P. Тогда коллапсирование полиэдра P_F уничтожит 2-компоненту. Возможны следующие случаи:

(a) граничные окружности 2-компоненты проходят хотя бы через одну истинную вершину, тогда $c(M_F) < c(M)$;

(b) окружности тройные, тогда $c_1(M_F) < c_1(M)$;

(c) 2-компонента C замкнутая, но в этом случае F содержится в I-компоненте C_I корня многообразия M, что противоречит условию пункта.

Поэтому $c(M_F) < c(M)$ или $c(M_F) = c(M)$ и $c_1(M_F) < c_1(M)$ и $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2.2. Пусть $\partial F \ne \varnothing$, F содержится в I-компоненте многообразия M. Тогда $c(M_F) = c(M)$ и $c_1(M_F) = c_1(M)$, но разрезание по поверхности с краем разрушает I-компоненту, превращая ее в полный крендель. Край полного кренделя сжимаем, т. е. не является свободной поверхностью (см. замечание 2), поэтому $\partial_I(M_F) = \partial_I(M)$. Так как I-компонента разрушилась, то $I(M_F) < I(M)$. Отсюда следует, что $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2.3. Пусть F — замкнутая поверхность и F не лежит в I-компоненте. Если $c(M_F) < c(M)$, то утверждение доказано. Предположим, что $c(M_F) = c(M)$ и $c_1(M_F) = c_1(M)$. В этом случае при разрезании по F появится свободная поверхность края, значит, $-\partial_I(M_F) < -\partial_I(M)$ и $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2.4. Пусть F — замкнутая поверхность и F содержится в I-компоненте корня $R(M)$. Тогда первые три характеристики расширенной сложности не меняются, но по лемме 2 получаем, что $I(M_F) < I(M)$. Следовательно, $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$. $\square$

Пусть ξ — разбиение на ручки трехмерного многообразия M и $F \subset M$ — собственная несжимаемая гранично несжимаемая поверхность. Тогда F можно нормализовать с помощью процедуры нормализации, которая состоит из сжатий трубок и туннелей и удалений тривиальных дисков и сфер [1, гл. 3]. Модифицируем эту процедуру следующим образом. Так как поверхность F несжимаема и гранично несжимаема, при каждом сжатии трубки появляется новая сфера, а при сжатии туннеля — диск. Дополним сжатие отбрасыванием появившихся сферы и диска. Так модифицированная процедура нормализации преобразует F в гомеоморфную ей нормальную поверхность F'.

Лемма 4. *Пусть ξ — разбиение на ручки неприводимого многообразия M, построенное по его почти простому минимальному спайну, F — связная существенная поверхность в M такая, что $\partial F \neq \varnothing$, и поверхность F' получена из поверхности F с помощью модифицированного сжатия туннелей. Тогда $c(M_F) = c(M_{F'})$ и $c_1(M_F) = c_1(M_{F'})$.*

Доказательство. Обозначим через D сжимающий диск туннеля, а через D' — диск, ограниченный дугой в ∂D на F и дугой l в ∂M. Тогда получающуюся при сжатии туннеля поверхность F' можно представить в виде $F' = (F \setminus (\operatorname{Int} D' \cup l)) \cup D$. Обозначим через M' многообразие, получающееся из M разрезанием вдоль $F \cup D = F' \cup D'$. Тогда M' получается как из многообразия M_F разрезанием вдоль D, так и из многообразия $M_{F'}$ разрезанием вдоль D'. Но из [1, лемма 4.2.10] следует, что $c(M_F) = c(M_{F'})$ и $c_1(M_F) = c_1(M_{F'})$. $\square$

Теорема 1. *Пусть F — связная существенная поверхность в неприводимом трехмерном многообразии M. Тогда $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим разбиение на ручки многообразия M, построенное по его минимальному почти простому спайну. Пусть поверхность F' получена из поверхности F с помощью модифицированной процедуры нормализации.

1. Если поверхность F замкнута, то нормальная поверхность F' получается из F изотопией (так как M — неприводимое многообразие). Поэтому $\bar{c}(M_F) = \bar{c}(M_{F'})$. Но тогда по лемме 3 заключаем, что $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2. Если поверхность F с краем, то ее нормализация осуществляется изотопией и сжатием туннелей. Изотопия не меняет компонент расширенной сложности, а модифицированное сжатие туннелей не меняет первых двух характеристик сложности разрезанного многообразия (лемма 4). Отметим также, что при нормализации F край поверхности все время остается на тех же компонентах края многообразия M, т. е. если край F' проходит по какой-то компоненте края, то и край F проходил по ней же.

2.1. Пусть $F \neq D^2$.

Нормализованная поверхность F' лежит в одной из компонент D-корня многообразия M. Если она лежит не в I-компоненте, то при разрезании по ней уменьшается одна из первых компонент сложности (см. п. 2.1 доказательства леммы 3). Из леммы 4 следует, что эта же компонента будет уменьшаться и при разрезании по исходной поверхности F. Значит, $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

Пусть теперь F' лежит в I-компоненте A многообразия M.

(a) Покажем, что в этом случае разрезание по F не увеличивает третью компоненту сложности, т. е. не уменьшается число свободных поверхностей края многообразия. Для этого достаточно показать, что свободная компонента края останется таковой и после разрезания по F. Действительно, если компонента была свободной, то край поверхности F не проходил по ней, так как при нормализации он может двигаться по компоненте только с помощью изотопии и уйти в I-компоненту никак не сможет. Поэтому по свободной поверхности край F не проходил с самого начала. Тогда разрезание по F на эту компоненту никак не влияет.

(b) Если F' лежит в I-компоненте A корня многообразия M, то она не проходит по свободным поверхностям в краях других I-компонент. Тогда и F не проходила по ним, значит, свободные до разрезания поверхности остались такими и после. Однако некоторые несвободные могут стать свободными за счет нормализации поверхности F. Поэтому вклад компоненты A в $I(M_F)$ не больше ее вклада в $I(M_{F'})$. Поэтому $I(M_F) \leq I(M_{F'})$. Так как компонента A разрушилась, то $I(M_{F'}) < I(M)$, значит, $I(M_F) < I(M)$. Следовательно, $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

2.2. Пусть $F = D^2$. Разрезание по диску не меняет первых двух компонент расширенной сложности [1, лемма 4.2.10]. Край диска не проходит по свободным поверхностям края многообразия, следовательно, на эти поверхности разрезание по F никак не влияет. Однако при разрезании такая поверхность может появиться. Если она не лежит в I-компоненте, то уменьшается третья компонента сложности, если лежит — то может уменьшиться четвертая компонента. В любом случае при разрезании по F уменьшается последняя компонента сложности $g^{(2)}(\partial M_F) < g^{(2)}(\partial M)$ [3]. Поэтому $\bar{c}(M_F) < \bar{c}(M)$.

Теорема 2. *Процесс разрезания неприводимого трехмерного многообразия по существенной поверхности конечен.*

Доказательство. Пусть есть последовательность разрезаний трехмерного многообразия M. Так как первая компонента расширенной сложности $c(M)$ не увеличивается и неотрицательна, число шагов, уменьшающих ее, конечно. Значит, число всех разрезаний данной последовательности до последнего разрезания, уменьшающего $c(M)$, конечно.

Рассмотрим последовательность всех следующих разрезаний. Все они сохраняют $c(M)$, а некоторые уменьшают $c_1(M)$. По тем же причинам таких разрезаний также конечное число. Все разрезания после последнего из них сохраняют и $c(M)$, и $c_1(M)$.

Число $-\partial_I(M)$ не может уменьшаться до бесконечности. Так как к каждой истинной вершине спайна многообразия M подходит не более четырех компонент края корня, а к каждой его тройной линии не более трех, то $-\partial_I(M) \geq -(4c(M) + 3c_1(M))$. Поэтому число шагов, уменьшающих $-\partial_I(M)$, также конечно.

Все последующие разрезания сохраняют первые три компоненты расширенной сложности, а часть из них уменьшает I-число многообразия M. Так как $I(M)$ неотрицательно, число таких шагов конечно.

Рассмотрим последовательность оставшихся разрезаний. Все они сохраняют первые четыре составляющие расширенной сложности, но уменьшают последнюю компоненту; $g^{(2)}(\partial M)$ — неотрицательное число, следовательно, шагов, уменьшающих $g^{(2)}(\partial M)$, конечное число.

Так как шагов, уменьшающих расширенную сложность трехмерного многообразия, конечное число, то процесс разрезания многообразия по существенным поверхностям также конечен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матвеев С. В.* Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий. М.: МЦНМО, 2007.
2. *Shatnykh O.* The extended complexity of three-manifolds // Sib. Electron. Math. Reports. 2005. V. 2. S. 194–195.
3. *Hog-Angeloni C., Matveev S.* Roots in 3-manifold topology // Geom. Topol. 2008. V. 14. (To appear).

Статья поступила 28 июня 2007 г.

Шатных Олеся Николаевна
Курганский гос. университет, факультет математики и информационных технологий,
кафедра алгебры и геометрии, ул. Томина, 40, Курган 640000
shatnych@rambler.ru