Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 515.127+515.142

РАЗМЕРНОСТНЫЕ ШКАЛЫ БИКОМПАКТОВ

В. В. Федорчук

Аннотация. Вводится понятие (устойчивой) размерностной шкалы $d\text{-}sc(X)$ пространства X, где d — размерностный инвариант. Бикомпакт X называется *размерно единым*, если $\dim F = \dim_G F$ для всякого замкнутого $F \subset X$ и произвольной абелевой группы G. Доказывается, что существуют размерно единые бикомпакты с любой наперед заданной устойчивой шкалой $\dim\text{-}sc$.

Ключевые слова: размерность, когомологическая размерность, бикомпакт, размерностная шкала.

1. Введение

Всякий метризуемый компакт X конечной размерности $\dim X > 0$ содержит одномерные континуумы. В 1965 г. Хендерсон построил [1] бесконечномерный компакт H, который не содержит одномерных континуумов и, следовательно, никаких замкнутых множеств конечной положительной размерности. Таким образом, компакт Хендерсона оказался первым *бикомпактом без промежуточных размерностей*, т. е. бикомпактом X, размерности замкнутых подмножеств которого не принимают значений, промежуточных между 0 и $\dim X$. В 1973 г. построены [2] конечномерные бикомпакты без промежуточных размерностей.

1.1. Определение. Пусть d — размерностный инвариант, принимающий конечные или трансфинитные значения. Для пространства X полагаем

$$d\text{-}sc(X) = \{d(F) : \varnothing \neq F = [F] \subset X\},$$

где через $[F]$ обозначаем замыкание F. Множество $d\text{-}sc(X)$ называем *d-шкалой* пространства X. Если $d\text{-}sc(X) = \{\alpha : \alpha \leq d(X)\}$, то шкала $d\text{-}sc(X)$ называется *элементарной*.

Условившись, что $\dim X = \omega_0$, если $\dim X = \infty$, отнесем к числу функций d и лебегову размерность. Шкалу $\dim\text{-}sc(X)$ будем называть *размерностной шкалой* пространства X и обозначать через $sc(X)$.

Другие размерностные функции d, которые мы будем рассматривать, суть когомологические размерности $\dim_G$ относительно абелевых групп коэффициентов G (определение размерности $\dim_G$ см. в п. 2, подробности — в [3]). Здесь наиболее изучен случай $G = \mathbb{Z}$ и $G = \mathbb{Z}_P$. Как и в случае лебеговой размерности, будем писать $\dim_G X = \omega_0$, если $\dim_G X = \infty$.

Мы не будем касаться индуктивных размерностей, поскольку шкалы пространств, для которых эти размерности определены, элементарны. По поводу

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00764) и гранта РНП (2.1.1. 7988).

трансфинитных размерностей Борста [4] и их модификаций [5] отметим только, что существует метризуемый компакт X, имеющий размерность $\dim_2 X = \alpha < \omega_1$, но не содержащий компактов Y конечной положительной размерности $\dim_2 Y = \dim Y$ (см. [5, добавление]).

Основной вопрос, возникающий в этой тематике, звучит так:

Каковы могут быть d-шкалы?

В частности:

Когда существуют неэлементарные d-шкалы?

Начнем с метризуемых компактов. Что касается размерностных шкал, т. е. dim-шкал, здесь известно почти все.

Если компакт X счетномерен, то определены его индуктивные трансфинитные размерности ind и Ind и, следовательно, шкала $sc(X)$ элементарна.

Если компакт X не является C-пространством (см. п. 2), то, как показал Поль [6], X содержит подкомпакт X_0 со шкалой $sc(X_0) = \{0, \omega_0\}$.

Так что нерешенными остаются лишь два вопроса.

Вопрос 1. *Элементарна ли размерностная шкала всякого метризуемого C-компакта?*

Прежде чем сформулировать второй вопрос, заметим, что если к компакту Хендерсона добавить отрезок, то мы получим компакт X со шкалой $sc(X) = \{0, 1, \omega_0\}$.

Чтобы избежать таких тривиальных искусственных образований, дадим

1.2. Определение. Шкала $d\text{-}sc(X)$ называется *устойчивой*, если

$$d\text{-}sc(F) = [0; d(F)] \cap d\text{-}sc(X)$$

для всякого непустого замкнутого множества $F \subset X$.

Вопрос 2. *Существует ли метризуемый компакт X с неэлементарной устойчивой шкалой $sc(X)$, содержащей 1?*

Отметим, что по упомянутой выше теореме Поля такой компакт X необходимо должен быть C-компактом.

В случае когомологических размерностей ситуация намного сложнее и интереснее. Бесконечномерные компакты D (А. Н. Дранишников [7]) и DW (Дыдак и Уолш [8]) размерности $\dim_{\mathbb{Z}} D = 3$, $\dim_{\mathbb{Z}} DW = 2$ по теореме Ансела [9] ($X \in C$, $\dim X = \infty \Longrightarrow \dim_{\mathbb{Z}} X = \infty$) не являются C-компактами и после применения к ним процедуры Поля дают компакты D_0 и DW_0 с неэлементарными шкалами $\dim_{\mathbb{Z}}\text{-}sc(D_0)$ и $\dim_{\mathbb{Z}}\text{-}sc(DW_0)$.

Что касается других групп коэффициентов, автору не известны примеры метризуемых компактов с неэлементарной $\dim_G$-шкалой, $G \neq \mathbb{Z}$. Простейшие возникающие здесь вопросы таковы.

Вопрос 3. *Существует ли бесконечномерный метризуемый компакт X размерности $\dim_{\mathbb{Z}_p} X > 1$ (p простое), не содержащий компактов Y размерности $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y = 1$?*

Вопрос 4. *Существует ли конечномерный метризуемый компакт X размерности $\dim_{\mathbb{Z}_p} X > 2$, не содержащий компактов Y размерности $\dim_{\mathbb{Z}_p} Y = 2$.*

А. Н. Дранишников сообщил автору, что ответы на эти вопросы отрицательны, если справедлива следующая

Гипотеза. *Если $K(\mathbb{Z}_p, n+1) \in AE(X)$, то $\Sigma K(\mathbb{Z}_p, n) \in AE(X)$ для всех $n > 1$.*

Здесь $K(\pi, n)$ — комплекс Эйленберга — Маклейна, ΣX — надстройка над X, а условие $M \in \mathrm{AE}(X)$ означает разрешимость задачи продолжения отображения $A \to M$ замкнутого множества $A \subset X$ на X (подробности см. в [10]).

Если же мы перейдем в класс неметризуемых бикомпактов, то увидим, что

$(*)$ *любое множество $s \subset [0; \omega_0]$, содержащее 0, может быть устойчивой d-шкалой некоторого бикомпакта при $d = \dim$ и $d = \dim_G$, где G — произвольная абелева группа.*

Для формулировки основных результатов нам потребуется

1.3. Определение. Бикомпакт X называется *размерно единым*, если $\dim F = \dim_G F$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и произвольной ненулевой абелевой группы G.

Понтрягинские поверхности [11] были первыми примерами компактов, не являющихся размерно едиными.

Сформулируем теперь основные результаты работы, которые конкретизируют утверждение $(*)$.

Теорема 1. *Для всякого множества $s \subset [0; \omega_0]$, содержащего 0, существует размерно единый сепарабельный C-бикомпакт $X(s)$ с 1-й аксиомой счетности, для которого s является устойчивой шкалой.*

Теорема 2 (CH). *Для всякого множества $s \subset [0; \omega_0]$, содержащего 0, существует размерно единый совершенно нормальный наследственно сепарабельный C-бикомпакт $X_0(s)$, для которого s является устойчивой шкалой.*

Теорема 3. *Для всякого множества $s \subset [0; \omega_0]$, содержащего 0 и ω_0, существует сепарабельный сильно бесконечномерный бикомпакт $Y(s)$ с 1-й аксиомой счетности, для которого s является устойчивой $\dim$-шкалой и в котором сильно бесконечномерно всякое несчетномерное замкнутое множество.*

Замечание 1. Если размерностная шкала бикомпакта X с 1-й аксиомой счетности бесконечна, то всякое замкнутое бесконечномерное множество $F \subset X$ содержит замкнутое множество F_0, которое *σ-конечномерно*, т. е. является объединением счетного числа замкнутых конечномерных подмножеств.

Вопрос 5. *Имеет ли место размерно единая версия теоремы 3?*

Назовем (би)компакт X *наследственно сильно бесконечномерным*, если всякий континуум $K \subset X$ сильно бесконечномерен.

Вопрос 6. *Существует ли наследственно сильно бесконечномерный размерно единый компакт?*

Из доказательства теоремы 3 (см. п. 5) вытекает, что положительный ответ на вопрос 6 влечет положительный ответ на вопрос 5.

Частичные ответы на вопрос 5 дают следующие утверждения.

Теорема 4 (CH). *Для всякого множества $s \subset [0; \omega_0]$, содержащего 0 и ω_0, существует размерно единый совершенно нормальный наследственно сепарабельный сильно бесконечномерный бикомпакт $Y_0(s)$, для которого s является устойчивой шкалой и в котором сильно бесконечномерно всякое несчетномерное замкнутое множество.*

Теорема 5. *Для всякого конечного множества $s \subset [0;\omega_0]$, содержащего 0 и ω_0, существует размерно единый сепарабельный сильно бесконечномерный бикомпакт $Z(s)$ с 1-й аксиомой счетности, для которого s является устойчивой шкалой и в котором сильно бесконечномерно всякое бесконечномерное замкнутое множество.*

Результаты работы в части, не касающейся когомологической размерности, объявлены в [5]. Все пространства предполагаются нормальными, отображения непрерывными.

2. Предварительные сведения

Пусть $f : X \to Y$ — отображение и $A \subset X$. *Малым образом* множества A называется множество

$$f^{\#}A = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset A\} = Y \setminus f(X \setminus A).$$

Если α — семейство подмножеств X, то полагаем $f^{\#}\alpha = \{f^{\#}A : A \in \alpha\}$.

2.1. Определение. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется *вполне замкнутым*, если для всякой точки $y \in Y$ и всякого конечного семейства u открытых в X множеств со свойством $f^{-1}(y) \subset \bigcup u$ множество $\{y\} \cup (\bigcup f^{\#}u)$ является окрестностью точки y.

При $|u| = 1$ определение 2.1 является одним из эквивалентных определений замкнутого отображения.

Важная роль вполне замкнутых отображений в топологии обусловлена тем, что для них имеет место усиленный вариант формулы Гуревича.

2.2. Теорема [12]. *Если $f : X \to Y$ — вполне замкнутое отображение паракомпактного пространства X, то*

$$\dim X \le \max\{\dim Y, \dim f\}.$$

В приложениях вполне замкнутые отображения возникают в виде резольвент.

2.3. Определение. Предположим, что даны пространство X, пространства Y_x и непрерывные отображения $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$ для всех $x \in X$. *Резольвентой* (множества) X (в каждой точке $x \in X$ в пространство Y_x посредством отображения h_x) называется множество

$$R(X) = R(X, Y_x, h_x) = \bigcup\{\{x\} \times Y_x : x \in X\}.$$

Отображение $\pi = \pi_X : R(X) \to X$, переводящее пару (x, y) в x, называется *отображением резольвенты* или, просто, *резольвентой*.

Определим топологию на множестве $R(X)$. Для каждой тройки (U, x, V), где U — открытое подмножество X, $x \in U$ и V — открытое подмножество Y_x, полагаем

$$U \otimes_x V = \{x\} \times V \cup \pi^{-1}\bigl(U \cap h_x^{-1}(V)\bigr).$$

Семейство множеств вида $U \otimes_x V$ образует базу некоторой топологии на множестве $R(X)$, которая называется *топологией резольвенты*.

2.4. Теорема [13, лемма 5]. *Если X и все Y_x — бикомпакты, то $R(X)$ — также бикомпакт, отображение π вполне замкнуто, каждый его слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен Y_x. При этом $R(X)$ удовлетворяет 1-й аксиоме счетности в том и только в том случае, когда X и все Y_x удовлетворяют 1-й аксиоме счетности.* $\square$

2.5. Определение. Замкнутое отображение $f : X \to Y$ называется *атомным*, если оно неприводимо на полном прообразе $f^{-1}(K)$ всякого континуума (связного замкнутого неодноточечного множества) K, т. е. $F = f^{-1}f(F)$ для всякого замкнутого множества $F \subset X$, отображающегося на континуум $f(F)$.

2.6. Определение. Замкнутое отображение $f : X \to Y$ называется *кольцевым*, если для всякой окрестности Ox произвольной точки $x \in X$ и всякой окрестности $Of(x)$ множество $f^{\#}Ox$ содержит перегородку в Y между точкой $f(x)$ и множеством $Y \setminus Of(x)$.

2.7. Предложение [2, лемма 1]. *Всякое кольцевое отображение атомно.* $\square$

Поскольку атомное отображение на связное пространство неприводимо, имеет место

2.8. Предложение. *Если $f : X \to Y$ — атомное отображение на связное сепарабельное пространство, то X сепарабельно.*

Одной из версий теоремы Гуревича является

2.9. Теорема [14]. *Если $f : X \to Y$ — замкнутое отображение паракомпактного пространства X на Y, то $\dim X \leq \dim Y + \dim f$.*

2.10. Определение [15]. Топологическое пространство X называется *C-пространством*, если для всякой последовательности u_n, $n \in \mathbb{N}$, его открытых покрытий найдется такая последовательность v_n, $n \in \mathbb{N}$, дизъюнктных открытых семейств, что каждое v_n вписано в u_n, а $\bigcup\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ является покрытием X.

Всякое нормальное C-пространство слабо бесконечномерно в смысле П. С. Александрова, а всякое счетномерное метрическое пространство и всякий σ-конечномерный паракомпакт являются C-пространствами.

Напомним, что обратный спектр $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ над вполне упорядоченным множеством $A = [\alpha_0; \gamma)$ называется *непрерывным*, если для всякого предельного $\alpha \in A$ отображение $p_\alpha : X_\alpha \to \lim(S|\alpha)$, являющееся пределом отображений π^α_β, $\beta < \alpha$, есть гомеоморфизм.

Непрерывные спектры естественно возникают при рекурсивном построении обратных спектров: пространство $X_{\beta+1}$ и отображение $\pi^{\beta+1}_\beta : X_{\beta+1} \to X_\beta$ строятся посредством некоторой процедуры, применяемой к пространству X_β (в нашем случае это резольвента), а для предельного α пространство X_α и отображения $\pi^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$ возникают как предел уже построенной части спектра.

Следствием теоремы 5.17 из [16] является

2.11. Теорема. *Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ — непрерывный спектр из бикомпактов, все соседние проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$ которого вполне замкнуты и конечномерны. Тогда если начальный элемент X_0 этого спектра является C-пространством, то и предел спектра S также есть C-пространство.* $\square$

Напомним некоторые понятия и факты, относящиеся к когомологической размерности.

2.12. Определение [3]. *Когомологической размерностью* $\dim_G X$ *локально бикомпактного пространства* X *относительно ненулевой абелевой группы коэффициентов* G называется верхняя грань целых чисел n, для которых существует такое локально бикомпактное множество $A \subset X$, что $H^n(A;G) \neq 0$.

Здесь через $H^i(Y;G)$ обозначается i-я группа когомологий локально бикомпактного пространства Y с *компактными носителями.* Определение этих групп когомологий и их свойства могут быть найдены, например, в [17]. Приведем здесь два важных для нас свойства.

2.13. Предложение. *Если* X — *бикомпакт и* $Y \subset X$ — *замкнутое подмножество, то*

$$H^i(X \setminus Y;G) = H^i(X,Y;G) = \widetilde{H}^i(X/Y;G). \qquad \square$$

2.14. Предложение. *Если* $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ — *обратный спектр локально бикомпактных пространств с совершенными проекциями и* $X = \lim S$, *то*

$$H^i(X;G) = \varinjlim\{H^i(X_\alpha;G), (\pi^\alpha_\beta)^*\}.$$

Из предложения 2.13 вытекает

2.15. Предложение. *Если* X — *бикомпакт, то*

$$\dim_G X = \sup\{n : H^n(X/Y;G) \neq 0,\ Y \text{ замкнуто в } X\}. \qquad \square$$

Для любой абелевой группы G имеют место следующие свойства:

$$\dim_G X \le \dim_{\mathbb{Z}} X \le \dim X, \tag{2.1}$$

$$\dim X < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{Z}} X = \dim X, \tag{2.2}$$

$$\dim_G I^n = n. \tag{2.3}$$

Из предложения 2.14 выводится хорошо известное

2.16. Предложение. *Если* X — *бикомпакт, то*

$$\dim_G X = \sup\{\dim_G K : K \text{ — подконтинуум } X\}.$$

Бикомпакт X называется *ацикличным*, если $\widetilde{H}^i(X) = 0$ для всех i, где $\widetilde{H}^i(X) = \widetilde{H}^i(X;\mathbb{Z})$ — приведенные группы когомологий. Всякое ацикличное пространство связно. Сюръективное отображение $f : X \to Y$ называется *ацикличным*, если ацикличны его слои $f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

2.17. Теорема Вьеториса — Бегла [17]. *Пусть* $f : X \to Y$ — *ацикличное отображение одного бикомпакта на другой. Тогда гомоморфизм*

$$f^* : H^i(Y;G) \to H^i(X;G)$$

является изоморфизмом для всех i. $\square$

Из предложения 2.13 и теоремы 2.17 вытекает

2.18. Следствие. *Пусть* $f : X \to Y$ — *ацикличное отображение бикомпакта* X *на бикомпакт* Y. *Тогда*

$$\dim_G Y \le \dim_G X$$

для всякой группы G. $\square$

Свойства (2.1), (2.2) и следствие 2.18 влекут

2.19. Следствие. *Пусть $f : X \to Y$ — ацикличное отображение бикомпакта X на бикомпакт Y размерности $\dim Y = n < \infty$. Тогда*

$$\dim Y \leq \dim X. \qquad \square$$

2.20. Определение. Связный бикомпакт X называется *континуальным*, если мощность множества $\exp^c X$ всех его подконтинуумов равна континууму.

К континуальным бикомпактам относятся все наследственно сепарабельные континуумы с 1-й аксиомой счетности, в частности, все метрические континуумы. Конус над квадратом «двух стрелок» П. С. Александрова показывает, что не всякий сепарабельный бикомпакт с 1-й аксиомой счетности континуален.

2.21. Лемма. *Пусть $f : X \to Y$ — атомное отображение бикомпакта X на континуальный бикомпакт Y с континуальными слоями $f^{-1}(y)$. Тогда бикомпакт X континуален.* $\square$

2.22. Предложение. *Пусть $S = \{X_n, f_n^{n+1}\}$ — обратная последовательность бикомпактов и континуальных атомных отображений f_n^{n+1}. Тогда если бикомпакт X_0 континуален, то бикомпакт $X = \lim S$ также континуален.*

Доказательство. Согласно лемме 2.21 все бикомпакты X_n континуальны. Следовательно, $|\mathcal{K}_n| = \mathfrak{c}$, где $\mathcal{K}_n = \{f^{-1}(K) : K \subset X_n$ — континуум$\}$. Положив $\mathcal{K} = \bigcup\{\mathcal{K}_n : n \in \omega\}$, имеем $|\mathcal{K}| = \mathfrak{c}$. Но всякий континуум $C \subset X$ является пересечением счетного числа элементов из $\mathcal{K}$. $\square$

Стандартным приемом доказывается

2.23. Лемма Кантора — Берштейна. *Пусть X — континуальный бикомпакт и N — конечное или счетное множество. Тогда существует такое дизъюнктное разложение $X = \bigsqcup\limits_{n \in N} X_n$, что $K \cap X_n \neq \varnothing$ для всех $n \in N$ и невырожденных континуумов $K \subset X$.* $\square$

3. D-отображения

3.1. Определение. Отображение $f : X \to Y$ между бикомпактами называется *D-отображением*, если существует такой непрерывный спектр $S = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha, [\alpha_0; \gamma)\}$, что

(3.1a) f гомеоморфно предельной проекции $\pi_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0}$ спектра S;

(3.1b) все соседние отображения $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ спектра S вполне замкнуты, атомны и ацикличны.

Непосредственно из определения 3.1 вытекает

3.2. Предложение. 1. *Композиция $g \circ f$ D-отображений f и g является D-отображением.*

2. *Если отображение f представляется в виде предельной проекции непрерывного спектра $S = \{X_\alpha, f_\beta^\alpha, A\}$, все соседние проекции $f_\alpha^{\alpha+1}$ которого являются D-отображениями, то f есть D-отображение.* $\square$

Будем говорить, что D-отображение $f : X \to Y$ есть *n-D-отображение*, если в определении 3.1 все отображения $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ n-мерны, т. е. $\dim\left(\pi_\alpha^{\alpha+1}\right)^{-1}(x) \leq n$ для всех $x \in X_\alpha$.

3.3. Предложение. *Если $f : X \to Y$ — n-D-отображение, то* $\dim X \leq \max\{\dim Y, n\}$.

Доказательство. Пусть $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, A\}$ — непрерывный спектр из определения 3.1. Достаточно показать, что

$$\dim X_\alpha \leq k = \max\{\dim Y, n\}.$$

Переход от α к $\alpha + 1$ проходит на основе теоремы 2.2, переход к предельному α — на основе того, что переход к пределу обратного спектра не повышает размерности бикомпактов. $\square$

3.4. Предложение. *Всякое D-отображение ациклично и атомно.*

Доказательство. Надо доказать, что ациклична и атомна предельная проекция $\pi_0 : X \to X_0$ обратного спектра $S = \{X_\alpha, \pi^\alpha_\beta, [0,\gamma)\}$ из определения 3.1. Из теоремы Вьеториса — Бегла вытекает ацикличность композиции конечного числа ацикличных отображений. Отсюда трансфинитной индукцией по α с использованием непрерывности когомологий (предложение 2.14) выводится ацикличность всех начальных проекций π^α_0 и, следовательно, предельной проекции π_0 спектра S.

Теперь докажем атомность π_0. Пусть F замкнуто в X и $\pi_0(F)$ связно и неодноточечно. Трансфинитной индукцией по α доказываем, что

$$\pi_\alpha(F) \quad \text{связно}; \tag{3.1$_\alpha$}$$

$$\pi_\alpha(F) = \left(\pi^\alpha_0\right)^{-1}\pi_0(F). \tag{3.2$_\alpha$}$$

Свойство $(3.1)_\alpha$ вытекает из $(3.2)_\alpha$, поскольку согласно уже доказанному отображение π^α_0 ациклично и, значит, монотонно. Свойство $(3.2)_\alpha$ доказывается по индукции. Переход от α к $\alpha+1$ осуществляется на основании $(3.1)_\alpha$ и атомности проекции $\pi^{\alpha+1}_\alpha$. Пусть теперь α предельно и для всех $\beta < \alpha$ выполнено $(3.2)_\beta$. Положим $\Phi = \pi_\alpha(F)$. Тогда равенство $(3.2)_\beta$ перейдет в

$$\pi^\alpha_\beta(\Phi) = \left(\pi^\beta_0\right)^{-1}\pi^\alpha_0(\Phi). \tag{3.3$_\beta$}$$

Отсюда получаем

$$\left(\pi^\alpha_\beta\right)^{-1}\pi^\alpha_\beta(\Phi) = \left(\pi^\alpha_\beta\right)^{-1}\left(\pi^\beta_0\right)^{-1}\pi^\alpha_0(\Phi) = \left(\pi^\alpha_0\right)^{-1}\pi^\alpha_0(\Phi),$$

т. е.

$$\left(\pi^\alpha_\beta\right)^{-1}\pi^\alpha_\beta(\Phi) = \left(\pi^\alpha_0\right)^{-1}\pi^\alpha_0(\Phi). \tag{3.4}$$

Но согласно непрерывности спектра S имеем

$$\Phi = \bigcap_{\beta<\alpha}\left(\pi^\alpha_\beta\right)^{-1}\pi^\alpha_\beta(\Phi),$$

что вместе с (3.4) дает

$$\Phi = \left(\pi^\alpha_0\right)^{-1}\pi^\alpha_0(\Phi),$$

т. е. в точности $(3.2)_\alpha$. $\square$

3.5. Предложение. *Если $f : X \to Y$ есть D-отображение и $F \subset Y$ — замкнутое множество, то $f : f^{-1}(F) \to F$ также является D-отображением.* $\square$

3.6. Лемма. *Пусть $f : X \to Y$ есть n-D-отображение, а $F \subset X$ — такое замкнутое множество, что $f(F)$ связно и $\dim f(F) = \dim_G f(F) = n$ для некоторой абелевой группы G. Тогда*

$$\dim F = \dim_G F = n. \tag{3.5}$$

Доказательство. Согласно предложению 3.4 имеем

$$F = f^{-1}f(F). \tag{3.6}$$

Из (3.6) и предложений 3.5 и 3.3 получаем

$$\dim F \leq n. \tag{3.7}$$

Из предложений 3.5 и 3.4, равенства (3.6) и следствия 2.18 вытекает

$$\dim_G F \geq n. \tag{3.8}$$

Сравнивая (3.7) и (3.8) и учитывая (2.1), получаем (3.5). □

3.7. Определение. Замкнутое сюръективное отображение $f : X \to Y$ называется *d-нульмерным*, если

$$\dim f(F_1) \cap f(F_2) \leq 0 \tag{3.9}$$

для любых непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X$.

3.8. Предложение. *Всякое атомное отображение на бикомпакт d-нульмерно.*

Доказательство. Пусть $F_1, F_2 \subset X$ — замкнутые непересекающиеся множества и $K = f(F_1) \cap f(F_2)$. Если $\dim K \geq 1$, то K содержит невырожденный континуум L. Тогда $F_1 \cap f^{-1}L \neq f^{-1}L$ и $f(F_1 \cap f^{-1}L) = L$, что противоречит атомности f. □

3.9. Предложение. *Замкнутое сюръективное отображение $f : X \to Y$ d-нульмерно тогда и только тогда, когда*

$$\dim\Bigl(Y \setminus \bigcup f^{\#}u\Bigr) \leq 0. \tag{3.10}$$

для любого конечного открытого покрытия $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ пространства X.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F_1, F_2 \subset X$ — непересекающиеся замкнутые множества. Положим $u = \{X \setminus F_1,\ X \setminus F_2\}$. Тогда условия (3.10) и (3.9) эквивалентны.

Достаточность. Существует такое замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \dots, A_k\}$ пространства X, что $A_i \subset U_i$. Тогда согласно (3.9)

$$\dim f(A_i) \cap f(X \setminus U_i) \leq 0.$$

Поэтому для выполнимости (3.10) достаточно показать, что

$$Y \setminus \bigcup f^{\#}u \subset \bigcup\{f(A_i) \cap f(X \setminus U_i) : i = 1, \dots, k\}. \tag{3.11}$$

Пусть $y \in Y \setminus \bigcup f^{\#}u$. В силу сюръективности отображения f найдется такое i, что

$$f^{-1}(y) \cap A_i \neq \varnothing. \tag{3.12}$$

С другой стороны, из того, что $y \in Y \setminus \bigcup f^{\#}u$, вытекает, в частности, что $y \notin f^{\#}U_i$, т. е.

$$f^{-1}(y) \cap (X \setminus U_i) \neq \varnothing. \tag{3.13}$$

Из (3.12) и (3.13) следует, что $y \in f(A_i) \cap f(X \setminus U_i)$. □

3.10. Теорема. *Если $f : X \to Y$ — атомное отображение на бикомпакт, то* $\dim Y \le \dim X + 1$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\dim X = n < \infty$. Пусть $u = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие Y. В покрытие $f^{-1}u$ можно вписать открытое покрытие $v = \{V_1, \dots, V_k\}$ кратности $\le n+1$. Из предложений 3.8 и 3.9 вытекает, что $\dim\bigl(Y \setminus \bigcup f^{\#}v\bigr) \le 0$. Следовательно, существует такое дизъюнктное открытое в Y семейство $w = \{W_1, \dots, W_k\}$, что $W_i \subset U_i$ и $Y \setminus \bigcup f^{\#}v \subset \bigcup w$. Тогда, полагая $U_i^0 = W_i \bigcup f^{\#}V_i$ и $u_0 = \bigl\{U_1^0, \dots, U_k^0\bigr\}$, получаем открытое покрытие u_0 пространства Y, вписанное в u и имеющее кратность $\le n+2$. $\square$

3.11. Теорема. *Если $f : X \to Y$ — d-нульмерное отображение слабо бесконечномерного бикомпакта X на Y, то бикомпакт Y слабо бесконечномерен.*

Доказательство. Пусть $\{(A_i, B_i) : i \in \mathbb{N}\}$ — последовательность дизъюнктных пар замкнутых подмножеств Y. Надо найти перегородки P_i между A_i и B_i с пустым пересечением. Поскольку бикомпакт X слабо бесконечномерен, существуют такие перегородки C_i между $f^{-1}(A_i)$ и $f^{-1}(B_i)$, что $\bigcap\{C_i : i \ge 2\} = \varnothing$. Это равносильно существованию таких дизъюнктных окрестностей $Of^{-1}(A_i)$ и $Of^{-1}(B_i)$, что семейство

$$\omega = \{Of^{-1}(A_i),\ Of^{-1}(B_i) : i \ge 2\}$$

является покрытием X. Выберем из него конечное подпокрытие

$$u = \{Of^{-1}(A_i),\ Of^{-1}(B_i) : 2 \le i \le k\}.$$

Положим

$$K = Y \setminus \bigcup\{f^{\#}Of^{-1}(A_i) \cup f^{\#}Of^{-1}(B_i) : 2 \le i \le k\}. \tag{3.14}$$

Из предложения 2.9 вытекает, что $\dim K \le 0$. Существует такая перегородка P_1 между A_1 и B_1, что

$$P_1 \cap K = \varnothing. \tag{3.15}$$

Для $i \in [2; k]$ полагаем

$$P_i = Y \setminus f^{\#}Of^{-1}(A_i) \cup f^{\#}Of^{-1}(B_i).$$

Тогда P_i будут перегородками между A_i и B_i, согласно (3.14) и (3.15) удовлетворяющими условию $\bigcap\{P_i : 1 \le i \le k\} = \varnothing$. $\square$

Из предложения 3.8 и теоремы 3.11 вытекает

3.12. Теорема. *Если $f : X \to Y$ — атомное отображение слабо бесконечномерного бикомпакта X на Y, то бикомпакт Y также слабо бесконечномерен.* $\square$

4. Итерационная лемма

4.1. Лемма. *Пусть даны связный бикомпакт X с 1-й аксиомой счетности и метризуемые AR-компакты Y_x, $x \in X$. Тогда можно так подобрать отображения $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$, что*

1) *резольвента $\pi_X : R(X) \to X$ будет атомным отображением.*

Если же бикомпакт X совершенно нормален и наследственно сепарабелен, то в предположении континуум-гипотезы отображения h_x можно подобрать так, что

2) *наряду с п. 1 бикомпакт $R(X)$ будет совершенно нормален и наследственно сепарабелен.*

Доказательство можно извлечь из [18, леммы 1–3]. Мы приведем его эскиз для удобства читателя. В каждом компакте Y_x фиксируем счетное плотное множество $D_x = \{d^x_n : n \in N\}$, а для каждой точки $x \in X$ — фундаментальную последовательность окрестностей U^x_n, $n \in \mathbb{N}$, со свойством

$$[U^x_{n+1}] \subset U^x_n. \tag{4.1}$$

Отображения h_x будем строить так, чтобы

$$h_x(\operatorname{Bd} U^x_n) = d^x_n. \tag{4.2}$$

Это возможно сделать, поскольку семейство $\{\operatorname{Bd} U^x_n : n \in \mathbb{N}\}$ дизъюнктно, а множество $F_x = \bigcup\{\operatorname{Bd} U^x_n : n \in \mathbb{N}\}$ замкнуто в пространстве $X \backslash \{x\}$, которое линделефово вследствие выполнимости 1-й аксиомы счетности в X и, следовательно, нормально. Поэтому отображение $h_x : F_x \to Y_x$, заданное равенствами (4.2), продолжается до отображения $h_x : X\backslash\{x\} \to Y_x$.

Для того чтобы отображение π_X было атомно, достаточно согласно предложению 2.7 показать, что оно кольцевое. Пусть $r = (x, y) \in \{x\} \times Y_x = \pi^{-1}_X(x)$ — произвольная точка бикомпакта $R(X)$ и

$$U \otimes_x V = \{x\} \times V \cup \pi^{-1}_X\bigl(U \cap h^{-1}_x V\bigr)$$

— ее базисная окрестность. Поскольку $\pi^{\#}_X(U \otimes_x V) \supset U \cap h^{-1}_x V$, достаточно проверить, что множество $U \cap h^{-1}_x V$ содержит перегородку в X между точкой x и множеством $X\backslash U$. Но из (4.2) и плотности D_x в Y_x вытекает, что множество $U \cap h^{-1}_x V$ содержит бесконечно много множеств вида $\operatorname{Bd} U^x_n$, каждое из которых и будет искомой перегородкой. Итак, атомность отображения π_X установлена.

Чтобы добиться совершенной нормальности и наследственной сепарабельности $R(X)$, надо наложить на h_x дополнительные к (4.2) требования. Если мы для каждой точки $x \in X$ зафиксируем последовательность $s_x \subset X\backslash\{x\}$, сходящуюся к точке x, при построении функции h_x наряду с (4.2) можно потребовать, чтобы выполнялось

$$h_x(s_x) = D_x. \tag{4.3}$$

Теперь выберем нужные нам последовательности s_x. Их выбор мы осуществим, чтобы выполнялось следующее

Свойство 4.1.1. *Пусть для $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, даны такие множества $c^n_x \subset X\backslash\{x\}$, для которых x является предельной точкой. Тогда*

$$\text{если } A \subset R(X) \text{ и } \pi_X(A) = c^n_x, \text{ то } \pi^{-1}_X(x) \subset [A]. \tag{4.4}$$

Это можно сделать, выбрав в каждом c^n_x по сходящейся к x последовательности s^n_x так, что $s_x = \bigcup\{s^n_x : n \in \mathbb{N}\}$ также является последовательностью, сходящейся к x. Тогда из (4.3) вытекает (4.4).

Определим множества c^n_x. Воспользовавшись континуум-гипотезой, занумеруем счетными ординалами α все точки из X: $X = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, и все счетные подмножества X: $X^{\omega_0} = \{c_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$. В качестве семейства $C_x = \{c^n_x : n \in \mathbb{N}\}$ для точки $x = x_\alpha$ возьмем множество

$$C_{x_\alpha} = \{c_\beta : \beta \le \alpha,\ c_\beta \subset X\backslash\{x_\alpha\},\ x_\alpha \in [c_\beta]\}. \tag{4.5}$$

Теперь совершенная нормальность $R(X)$ вытекает из того, что

$$\left|\pi_X(F)\backslash\pi_X^{\#}(F)\right| \leq \omega_0 \text{ для всякого замкнутого } F \subset R(X). \tag{4.6}$$

Свойство (4.6) получается из того, что согласно наследственной сепарабельности X в множестве $\pi_X(X)$ плотно некоторое множество c_α. Тогда из (4.6) и (4.5) следует, что

$$\pi_X(F)\backslash\pi_X^{\#}(F) \subset c_\alpha \cup \{x_\beta : \beta < \alpha\} \equiv B_\alpha. \tag{4.7}$$

Осталось показать, что всякое замкнутое множество $F \subset R(X)$ сепарабельно. Возьмем множество B_α из (4.7) и для каждой точки $x \in B_\alpha$ пусть A_x счетно и плотно в $F \cap \pi_X^{-1}(x)$. Тогда из (4.6) вытекает, что множество $A = \bigcup\{A_x : x \in B_\alpha\}$ плотно в F. $\square$

Приведем простейшие применения леммы 4.1.

4.2. Теорема [2]. *Для любого $n \geq 2$ существует n-мерный сепарабельный с 1-й аксиомой счетности бикомпакт B_n без промежуточных размерностей, т. е. размерно единый бикомпакт с размерностной шкалой $sc(B_n) = \{0, n\}$.*

Доказательство. В качестве B_n берем предел обратной последовательности $S_n = \left\{X_k^n,\ f_k^{k+1},\ \omega\right\}$, которая начинается с n-мерного куба $X_0^n = I^n$ и соседними проекциями f_k^{k+1} которой являются отображения резольвенты $\pi_{X_k^n} : R(X_k^n) \to X_k^n$ из п. 1 леммы 4.1 с $Y_x = I^n$, $x \in X_k^n$. Бикомпакт B_n сепарабелен и удовлетворяет 1-й аксиоме счетности, поскольку таковыми по предложению 2.8 и теореме 2.4 являются все бикомпакты X_k^n. Неравенство $\dim B_n \leq n$ вытекает из предложения 3.3, а всякий континуум $L \subset B_n$ содержит множество $f_k^{-1}(x)$ для некоторого k. Поэтому $\dim_G L \geq \dim_G f_k^{-1}(x) = n$ по лемме 3.6 и свойству (2.3). $\square$

4.3. Теорема (CH) [19, 18]. *Для любого $n \geq 2$ существует наследственно сепарабельный совершенно нормальный размерно единый бикомпакт B_n^0 с $sc\left(B_n^0\right) = \{0, n\}$.*

Доказательство. В качестве B_n^0 берем предел обратной последовательности $S_n^0 = \left\{{}^0X_k^n, {}^0f_k^{k+1}, \omega\right\}$, которая начинается с n-мерного куба ${}^0X_0^n = I^n$ и соседними проекциями ${}^0f_k^{k+1}$ которой являются отображения резольвенты $\pi_{{}^0X_k^n} : R\left({}^0X_k^n\right) \to {}^0X_k^n$ из леммы 4.1.2. $\square$

4.4. Теорема [20]. *Существует сепарабельный с 1-й аксиомой счетности размерно единый C-бикомпакт X с $sc(X) = \{0, \omega_0\}$.*

Доказательство. В качестве X берем предел обратной последовательности $S = \left\{X_k, f_k^{k+1}, \omega\right\}$, которая начинается с отрезка и соседними проекциями f_k^{k+1} которой являются отображения резольвенты $\pi_{X_k} : R(X_k) \to X_k$ из п. 1 леммы 4.1 с $Y_x = I^{k+1}$, $x \in X_k$. Всякий континуум $L \subset X$ содержит множество вида $f_k^{-1}(x)$ ввиду атомности всех сквозных проекций. А множество $f_k^{-1}(x)$ бесконечномерно по теореме 3.10. Из следствия 2.18 вытекает, что $\dim_G f_k^{-1}(x) = \infty$. $\square$

4.5. Теорема (CH) [20]. *Существует наследственно сепарабельный совершенно нормальный размерно единый C-бикомпакт X с $sc(X) = \{0, \omega_0\}$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 4.4 с заменой п. 1 на п. 2 леммы 4.1. $\square$

4.6. Теорема [20]. *Существует сепарабельный с 1-й аксиомой счетности размерно единый наследственно сильно бесконечномерный бикомпакт X.*

Доказательство проходит по схеме доказательства теоремы 4.4. Изменение в конструкции состоит в том, что слоями отображения резольвент π_{X_k} являются гильбертовы кубы. Всякое множество $f_k^{-1}(x)$ сильно бесконечномерно согласно теореме 3.12. □

4.7. Теорема (CH) [20]. *Существует наследственно сепарабельный совершенно нормальный размерно единый наследственно сильно бесконечномерный бикомпакт X.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 4.6 с применением п. 2 вместо п. 1 леммы 4.1. □

5. Основные результаты

5.1. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим сначала более общий случай $\omega_0 \in s = \{0, n_1, \dots, n_k, \dots, \omega_0\}$ и s бесконечно. Бикомпакт $X(s)$ будет получен как предел непрерывного обратного спектра $S = \big\{X_\alpha, f_\alpha^{\alpha+1}, \alpha \in \omega^2\big\}$, в котором проекции $f_\alpha^{\alpha+1}$, будут отображениями резольвенты из п. 1 леммы 4.1. Сепарабельность $X(s)$ вытекает из предложений 2.8 и 3.2. Условие $X(s) \in C$ следует из теоремы 2.11.

В качестве начального элемента X_0 спектра S возьмем бикомпакт из теоремы 4.4. Применяя предложение 2.22 и лемму 2.23, представим X_0 в виде дизъюнктной суммы множеств A_l, $l \in \mathbb{N}$, так, что

$$A_l \cap K \neq \varnothing \text{ для всякого континуума } K \subset X_0. \tag{5.1}$$

Опишем проекции

$$f_{\omega k+i}^{\omega k+i+1} : X_{\omega k+i+1} \to X_{\omega k+i}, \quad i, k \in \omega.$$

Для $x \in \big(f_0^{\omega k+i}\big)^{-1}(A_l)$ положим

$$\big(f_{\omega k+i}^{\omega k+i+1}\big)^{-1}(x) = I^{n_{l-k}}, \text{ где } n_j = 0 \text{ при } j \leq 0. \tag{5.2}$$

Для бикомпакта X будем писать $\operatorname{Dim} X = n$, если $\dim X = n$ и $\dim_G X = n$ для всякой ненулевой абелевой группы G. Из леммы 3.6 вытекает

Утверждение 5.1.1. *Если $y \in \big(f_0^{\omega k+j}\big)^{-1} A_l$, то*

$$\operatorname{Dim}\big(f_{\omega k+j}\big)^{-1}(y) = n_{l-k} \textit{ при } j, k \in \omega. \qquad \square \tag{5.3}$$

Утверждение 5.1.2. *Если $L \subset X(s)$ — конечномерный континуум, то*

$$|f_0(L)| = 1 \tag{5.4}$$

и для $\alpha = \sup\{\beta : |f_\beta(L)| = 1\}$ имеет место равенство

$$\operatorname{Dim} L = n_{l-k}, \text{ где } f_\alpha(L) \in \big(f_0^\alpha\big)^{-1} A_l \textit{ и } \alpha = \omega k + j. \tag{5.5}$$

Доказательство. Если $|f_0(L)| \geq 2$, то

$$L = f_0^{-1} f_0(L) \tag{5.6}$$

в силу атомности отображения f_0. Следовательно, $\mathrm{Dim}\, L = \infty$ согласно (5.1) и (5.3). Итак, равенство (5.4) проверено.

Далее, по определению числа α, как и равенство (5.6), получаем

$$L = f_{\alpha+1}^{-1}(f_{\alpha+1}(L)). \tag{5.7}$$

Кроме того, из того, что $f_\alpha(L) \in \left(f_0^\alpha\right)^{-1} A_l$, вытекает

$$f_{\alpha+1}(L) \subset \left(f_0^{\alpha+1}\right)^{-1} A_l. \tag{5.8}$$

Поэтому (5.5) следует из (5.2) и леммы 3.6. $\square$

Утверждение 5.1.2 влечет

Утверждение 5.1.3. *Если $F \subset X(s)$ — конечномерный бикомпакт, то он размерно един и*

$$sc(F) = [0; \dim F] \cap s. \qquad \square \tag{5.9}$$

Пусть теперь $\dim F = \infty$. Тогда

$$F \text{ содержит подконтинуумы сколь угодно большой конечной размерности.} \tag{5.10}$$

В самом деле, это так, если все подконтинуумы в F конечномерны. Если же F содержит бесконечномерный континуум L, то из (5.3) вытекает, что $|f_0(L)| \geq 2$. Тогда $L = f_0^{-1} f_0(L)$ и согласно (5.1) и (5.3) L содержит подконтинуумы сколь угодно большой конечной размерности. Свойство (5.10) вместе с утверждением 5.1.3 дает нам условие (5.9) устойчивости для F и размерную единость $X(s)$.

Следующий случай: $s = \{0, n_1, \ldots, n_k, \omega_0\}$. Повторяя предыдущие рассуждения, строим спектр S длины $\omega \cdot k$ с тем же начальным пространством X_0 и с проекциями, удовлетворяющими условию (5.2). Дополнительно к утверждениям 5.1.1–5.1.3 нам понадобится

Утверждение 5.1.4. *Если $F \subset X(s)$ — бесконечномерный бикомпакт, то* $\mathrm{Dim}\, F = \infty$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай связного F. В этом случае $f_0(F) \subset X_0$ — невырожденный континуум. Тогда из свойств бикомпакта $X_0 = X$ (см. теорему 4.4) следует, что $\mathrm{Dim}\, f_0(F) = \infty$. Но $F = f_0^{-1} f_0(F)$. Поэтому наше утверждение получается из следствия 2.18, что и завершает доказательство теоремы 5.1 в рассмотренном случае.

Пусть теперь $\omega_0 \notin s = \{0, n_1, \ldots, n_k\}$. В качестве X_0 берем отрезок I и повторяем построение спектра S с условием (5.2). Проверка свойств получающегося бикомпакта $X(s)$ намного проще, чем в предыдущих случаях. $\square$

5.2. Доказательство теоремы 2 повторяет доказательство теоремы 1. Изменения состоят лишь в том, что мы применяем п. 2 леммы 4.1, а в качестве X_0 при $\omega_0 \in s$ берем бикомпакт из теоремы 4.5. $\square$

5.3. Доказательство теоремы 3. Бикомпакт $Y(s)$ строится как предел непрерывного обратного спектра $S = \left\{Y_\alpha, f_\alpha^{\alpha+1}\right\}$ длины ω^2 при бесконечном s и $\omega(|s|-1)$ при конечном s. Проекции $f_\alpha^{\alpha+1}$, как и при доказательстве теоремы 1, будут отображениями резольвенты из п. 1 леммы 4.1. В качестве Y_0 берется наследственно сильно бесконечномерный компакт. Существование таких компактов впервые доказано в [21].

Слои проекций $f_\alpha^{\alpha+1}$ определяются равенством (5.2). Свойства конечномерных континуумов $L \subset Y(s)$ такие же, как и в доказательстве теоремы 1.

Утверждение 5.3.1. *Если замкнутое множество $F \subset Y(s)$ несчетномерно, то $f_0(F)$ содержит континуум.*

Доказательство. Предположим, что $\dim f_0(F) = 0$. Тогда нульмерно будет и всякое множество $B_l = A_l \cap f_0(F)$. Отсюда в силу теоремы 2.9 и равенства (5.3) получаем, что $\dim f_0^{-1}(B_l) \le l$. Следовательно, множество F счетномерно, поскольку $F \subset \bigcup\{f_0^{-1}(B_l) : l \in \mathbb{N}\}$. Получили противоречие. $\square$

Из свойств компакта Y_0 и теоремы 3.12 вытекает

Утверждение 5.3.2. *Если $K \subset Y_0$ — континуум, то бикомпакт $f_0^{-1}(K)$ сильно бесконечномерен.* $\square$

Из утверждений 5.3.1 и 5.3.2 и атомности отображения f_0 следует сильная бесконечномерность всякого несчетномерного замкнутого $F \subset Y(s)$.

Остается показать, что если $F \subset Y(s)$ — бесконечномерное замкнутое множество, то F содержит бикомпакты F_i всех конечных размерностей $n_i \in s$. Если шкала s бесконечна, то это делается так же, как и при доказательстве теоремы 1. Если же $|s| < \omega_0$, то $f_0(F)$ содержит континуум L и утверждение вытекает из атомности отображения f_0 и свойств (5.1) и (5.3). $\square$

5.4. Доказательство теоремы 4 проходит по схеме доказательства теорем 1 и 3. Спектр $S = \{Y_\alpha, f_\alpha^{\alpha+1}\}$ начинается с бикомпакта из теоремы 4.7. Проекции $f_\alpha^{\alpha+1}$ являются отображениями резольвенты из п. 2 леммы 4.1. Слои этих проекций определяются равенством (5.2). Поэтому выполнены равенства (5.3) и (5.5). Отсюда вытекает равенство $\dim_G F = \infty$ для всякого бесконечномерного бикомпакта $F \subset Y_0(s)$ в случае бесконечной шкалы, поскольку F содержит бикомпакты F_i всех конечных размерностей $n_i \in s$.

Если же шкала s конечна, то для всякого бесконечномерного континуума $L \subset Y_0(s)$ имеем $L = f_0^{-1} f_0(L)$. Равенство $\operatorname{Dim} L = \infty$ доказывается по схеме утверждения 5.1.4.

Утверждение 5.4.1. *Если замкнутое множество $F \subset Y_0(s)$ несчетномерно, то $f_0(F)$ содержит континуум.*

Это утверждение доказывается так же, как и утверждение 5.3.1 (множество $B_l = A_l \cap f_0(F)$ финально компактно и мы можем использовать теорему 2.9). Применение утверждения 5.4.1 завершает доказательство теоремы 4. В самом деле, если $f_0(F)$ содержит континуум L, то он сильно бесконечномерен. Поэтому множество $F \supset f_0^{-1}(L)$ сильно бесконечномерно по теореме 3.12.

5.5. Доказательство теоремы 5. Пусть $s = \{0, n_1, \dots, n_k, \omega_0\}$. Бикомпакт $Z(s)$ строится как предел обратного спектра $S = \{Z_\alpha, f_\alpha^{\alpha+1}, \omega \cdot k\}$. В качестве Z_0 берется бикомпакт из теоремы 4.6. Проекции $f_\alpha^{\alpha+1}$ берутся из доказательства теоремы 1. Следовательно, для них имеют место утверждения 5.1.1–5.1.3. Значит, свойства конечномерных замкнутых подмножеств бикомпактов $Z(s)$ и $X(s)$ одинаковы. Импликация

$$\dim F = \infty \Rightarrow \operatorname{Dim} F = \infty$$

проверяется так же, как и в доказательстве теоремы 4. Остается доказать, что если $\dim F = \infty$, то F сильно бесконечномерно. Поскольку отображение $f_0 : Z(s) \to Z_0$ конечномерно ($\dim f = n_k$), множество $f_0(F)$ содержит континуум L и, следовательно, сильно бесконечномерно. Поэтому сильная бесконечномерность множества $F \supset f_0^{-1}(L)$ вытекает из теоремы 3.12. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Henderson D. W.* Finite dimensional subsets of infinite dimensional spaces: Topology Seminar, Wisconsin, 1965 // Ann. of Math. Stud. 1965. V. 60 P. 141–146.

2. *Федорчук В. В.* Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 4. С. 795–797.

3. *Кузьминов В. И.* Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23, № 5. С. 3–49.

4. *Borst P.* Classification of weakly infinite-dimensional spaces. Part I: A transfinite extension of the covering dimension // Fund. Math. 1988. V. 130. P. 1–25.

5. *Федорчук В. В.* Слабо бесконечномерные пространства // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 2. С. 109–164.

6. *Pol R.* On light mappings without perfect fibers on compacta // Tsukuba J. Math. 1996. V. 20, N 1. P. 11–19.

7. *Дранишников А. Н.* Гомологическая теория размерности // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 4. С. 11–55.

8. *Dydak J., Walsh J.* Infinite-dimensional compacta having cohomological dimension two: an application of the Sullivan conjecture // Topology. 1993. V. 32. P. 93–104.

9. *Ancel F. D.* Proper hereditary shape equivalences preserve property C // Topology Appl. 1985. V. 19, N 1. P. 71–74.

10. *Дранишников А. Н.* Теорема Эйленберга — Борсука для отображений в произвольный комплекс // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 4. С. 81–90.

11. *Pontrjagin L.* Sur une hypothèse fondamentale de la théorie de la dimension // C. R. Acad. Paris. 1930. T. 190, seance 5 mai. P. 1105–1107.

12. *Федорчук В. В.* Об отображениях, не понижающих размерность // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 1. С. 54–57.

13. *Федорчук В. В.* Бикомпакт, все бесконечномерные замкнутые подмножества которого n-мерны // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 41–62.

14. *Скляренко Е. Г.* Теорема об отображениях, понижающих размерность // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1962. V. 10, N 8. P. 429–432.

15. *Addis D. F., Gresham J. H.* A class of infinite-dimensional spaces. I: Dimension Theory and Alexandroff's problem // Fund. Math. 1978. V. 101. P. 195–205.

16. *Fedorchuk V. V.* Certain classes of weakly infinite-dimensional spaces // J. Math. Sci. 2007. (To appear.)

17. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971.

18. *Fedorchuk V. V.* On the dimension of hereditarily normal spaces // Proc. London Math. Soc. 1978. V. 34, January. P. 163–175.

19. *Савинов Н. В.* Пример совершенно нормального бикомпакта без промежуточных размерностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1976. Т. 31, № 3. С. 52–56.

20. *Федорчук В. В.* Бесконечномерные бикомпакты // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42, № 5. С. 1162–1178.

21. *Зарелуа А. В.* Построение сильно бесконечномерных компактов с помощью колец непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 2. С. 264–267.

Статья поступила 23 декабря 2006 г.

Федорчук Виталий Витальевич
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119992
`fedorch@tsi.ru`