Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТОЧНОЙ АСИМПТОТИКОЙ ОСТАТКА

М. С. Сгибнев

Аннотация. Получено асимптотическое разложение решения системы интегродифференциальных уравнений первого порядка с учетом влияния корней характеристического уравнения. Установлена точная асимптотика остатка в зависимости от асимптотических свойств исходных функций.

Ключевые слова: система интегродифференциальных уравнений, асимптотическое разложение, характеристическое уравнение, точная асимптотика остатка.

§ 1. Введение

Пусть $f(t)$ и $g(t)$, $t \ge 0$, — локально интегрируемые функции. Обозначим через $f * g(t)$ их свертку: $f * g(t) := \int\limits_0^t f(t-u)g(u)\,du$, $t \ge 0$.

В работе рассматривается система комплексных интегродифференциальных уравнений

$$X'_{im}(t) + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}X_{jm}(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} * X_{jm}(t) + F_{im}(t), \tag{1}$$

$i = 1,\dots,n$, $m = 1,\dots,m_1$, где $X_{im}(t)$ — неизвестные функции, $A_{ij} \in \mathbb{C}$, $K_{ij}(t)$, $F_{im}(t)$ — комплексные измеримые функции такие, что интегралы

$$\int\limits_0^\infty e^{\gamma t}|K_{ij}(t)|\,dt, \quad \int\limits_0^\infty e^{\gamma t}|F_{im}(t)|\,dt$$

конечны при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$. Системы уравнений вида (1) являются традиционным объектом исследований в математической литературе (см., например, [1–7], а также ссылки в указанных работах). Важную роль играет изучение асимптотики решений.

Запишем систему (1) в матричной форме

$$\boldsymbol{X}'(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{K} * \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A} := (A_{ij})$, $\boldsymbol{K}(t) := (K_{ij}(t))$ — матрицы порядка $n \times n$, а $\boldsymbol{X}(t) := (X_{im}(t))$, $\boldsymbol{F}(t) := (F_{im}(t))$, $\boldsymbol{K}*\boldsymbol{X}(t)$ — матрицы порядка $n\times m_1$, общим элементом матрицы $\boldsymbol{K}*\boldsymbol{X}(t)$ служит сумма $\sum\limits_{j=1}^{n} K_{ij}*X_{jm}(t)$. Условимся о том, что операции перехода к пределу, дифференцирования, интегрирования и другие осуществляются над матрицами поэлементно, например $\boldsymbol{X}'(t) = (X'_{im}(t))$; аналогичное соглашение относится к неравенствам и теоретико-множественным операциям, в которых участвуют матрицы. Единичную матрицу порядка $n \times n$ обозначим через $\boldsymbol{I}$, а нулевую матрицу произвольного порядка — через $\mathbf{0}$.

В данной статье предлагается новый подход к исследованию асимптотического поведения при $t \to \infty$ решения $\boldsymbol{X}(t)$ системы уравнений (2). Предлагаемый подход основывается на применении банаховоалгебраических методов асимптотического анализа и использовании свойств преобразования Лапласа функций, обладающих заданным асимптотическим поведением на бесконечности. Цель работы состоит в том, чтобы установить асимптотическое разложение решения с точной асимптотикой остатка

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{j=1}^{l} \boldsymbol{P}_j(t) e^{-s_j t} + \boldsymbol{\Delta}(t),$$

где s_j, $j = 1, \dots, l$, — корни характеристического уравнения (5), $\boldsymbol{P}_j(t)$, $j = 1, \dots, l$, — *однозначно* определяемые матрицы, чьи элементы суть многочлены, а матрица-остаток $\boldsymbol{\Delta}(t)$ «наследует» асимптотические свойства исходных матриц-функций $\boldsymbol{K}(t)$ и $\boldsymbol{F}(t)$. Под *точной асимптотикой* остатка понимается следующее. Если для некоторой подходящей функции сравнения $\sigma(t)$ существуют пределы

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{K}) := \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{K}(t)}{\sigma(t)} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{K_{ij}(t)}{\sigma(t)} \right), \quad \mathscr{L}(\boldsymbol{F}) = \lim_{t\to\infty} \frac{\boldsymbol{F}(t)}{\sigma(t)} = \left(\lim_{t\to\infty} \frac{F_{im}(t)}{\sigma(t)} \right),$$

то будет существовать и предел $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\Delta}(t)/\sigma(t)$, который выражается в явном виде через $\mathscr{L}(\boldsymbol{K})$ и $\mathscr{L}(\boldsymbol{F})$.

В настоящей работе будет рассмотрена также система интегральных уравнений

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{K} * \boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{F}(t), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{K}(t)$, $\boldsymbol{X}(t)$, $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{K} * \boldsymbol{X}(t)$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (2).

В § 2 выводится характеристическое уравнение для (2) и приводится конкретный вид искомого асимптотического разложения для решения (2). В § 3 даются необходимые сведения из теории банаховых алгебр функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности. В § 4 устанавливаются теоремы о преобразованиях Лапласа таких функций. В § 5 формулируются и доказываются основные результаты.

§ 2. Характеристическое уравнение

Для произвольной функции $g(t)$, $t \geq 0$, обозначим через $\hat{g}(s)$ ее преобразование Лапласа:

$$\hat{g}(s) := \int_0^\infty e^{st} g(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} s \leq \gamma.$$

Допустим, что уравнение (2) имеет решение $\boldsymbol{X}(t)$, суммируемое с весовой функцией $\exp(\gamma_1 t)$, $t \geq 0$, при некотором $\gamma_1 \leq \gamma$:

$$\int_0^\infty e^{\gamma_1 t} |X_{im}(t)|\, dt < \infty, \quad i = 1, \dots, n, \ m = 1, \dots, m_1.$$

Предположим также, что $X_{im}(t)e^{\gamma_1 t} \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $i = 1, \dots, n$, $m = 1, \dots, m_1$. Переходя в уравнении (2) к преобразованиям Лапласа, получим

$$[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s), \quad \operatorname{Re} s \le \gamma_1.$$

Таким образом,

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = [\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]^{-1}[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)]. \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) определена во всех точках полуплоскости

$$\Pi(\gamma) := \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \le \gamma\},$$

для которых $\det[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)] \ne 0$.

Назовем уравнение

$$\det[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)] = 0 \tag{5}$$

характеристическим уравнением для (2).

Из условия $\int\limits_0^\infty e^{\gamma t}|\boldsymbol{K}(t)|\,dt < \infty$ вытекает, что в любой полуплоскости $\operatorname{Re} s \le \gamma - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, характеристическое уравнение имеет лишь конечное число корней. Будем предполагать, что множество $\mathscr{Z} = \{s_1, s_2, \dots, s_l\}$ корней характеристического уравнения, лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, *конечно* и что $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. Мы не исключаем случая $\mathscr{Z} = \varnothing$.

Для $j \in \{1, \dots, l\}$ обозначим через

$$\sum_{k=1}^{q_j} (-1)^k \frac{\boldsymbol{B}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

главную часть разложения правой части равенства (4) в ряд Лорана в окрестности точки $s_j \in \mathscr{Z}$; здесь $q_j \ge 0$ — целое число, $\boldsymbol{B}_{jk}$ — матрицы порядка $n \times m_1$. Пусть $\mathscr{E}_j$ — комплекснозначная мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)e^{-s_j x}$ ($\mathbf{1}_A(x)$ — индикаторная функция множества A); преобразование Лапласа этой меры равно $\widehat{\mathscr{E}}_j(s) = 1/(s_j - s)$, $\operatorname{Re}(s - s_j) < 0$. Определим по индукции m-кратную свертку $\mathscr{E}_j^{m*}$ меры $\mathscr{E}_j$: $\mathscr{E}_j^{1*} := \mathscr{E}_j$, $\mathscr{E}_j^{(m+1)*} := \mathscr{E}_j^{m*} * \mathscr{E}_j$, $m \ge 1$. Плотность меры $\mathscr{E}_j^{m*}$ равна $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)x^{m-1}e^{-s_j x}/(m-1)!$.

Выражение

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) - \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{q_j} (-1)^k \frac{\boldsymbol{B}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

представляет собой преобразование Лапласа $\widehat{\boldsymbol{\Delta}}(s)$ некоторой матричной функции $\boldsymbol{\Delta}(t)$ — остатка искомого асимптотического разложения, которое будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{q_j} \boldsymbol{B}_{jk} \frac{t^{k-1}e^{-s_j t}}{(k-1)!} + \boldsymbol{\Delta}(t). \tag{6}$$

Перейдем к описанию классов функций, в терминах которых будут выражаться асимптотические свойства матричных функций $\boldsymbol{K}(t)$, $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{\Delta}(t)$.

§ 3. Банаховы алгебры функций

Определение 1. Функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, называется *полумультипликативной*, если она конечна, положительна, измерима по Борелю и удовлетворяет следующим условиям: $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x+y) \leq \varphi(x)\,\varphi(y)$, x, $y \geq 0$.

Имеют место соотношения [8, теорема 7.6.1]

$$\gamma := \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\varphi(x)}{x} = \inf_{x>0} \frac{\ln\varphi(x)}{x} < \infty. \tag{7}$$

Мы будем рассматривать только такие полумультипликативные функции $\varphi(x)$, для которых $\gamma > -\infty$.

Примеры полумультипликативных функций: $\varphi(x) = (x+1)^r$, $r > 0$; $\varphi(x) = \exp(cx^\beta)$, где $c > 0$ и $0 < \beta < 1$; $\varphi(x) = \exp(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Произведение конечного числа полумультипликативных функций снова является полумультипликативной функцией. Если $R(x)$, $x \geq 0$, — положительная, неубывающая (начиная с некоторого места), правильно меняющаяся на бесконечности функция с неотрицательным показателем β, то найдутся полумультипликативная функция $\varphi(x)$, $x \geq 0$, и число $x_0 \in (0, \infty)$ такие, что $c_1R(x) \leq \varphi(x) \leq c_2R(x)$ при всех $x \geq x_0$, где c_1 и c_2 — некоторые положительные постоянные [9, предложение]. Напомним: положительная функция $L(x)$, $x \geq 0$, называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $L(tx)/L(x) \to 1$ при $x \to \infty$ и любом $t > 0$; функция $R(x) = x^\beta L(x)$ называется *правильно меняющейся с показателем* β [10, § VIII.8].

Пусть $\varphi(x)$, $x \geq 0$, — полумультипликативная функция. Обозначим через $\widetilde{S}_{\varphi+}$ полное нормированное кольцо [11, § 18] всех измеримых комплекснозначных функций $f(x)$, $x \geq 0$, с нормой

$$\|f\|_\varphi = \int\limits_0^\infty |f(x)|\varphi(x)\,dx < \infty;$$

под умножением двух элементов f и g из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ понимается их свертка $f * g(x)$. Отождествим произвольную абсолютно непрерывную меру f на $[0, \infty)$ с классом эквивалентных функций $f(x)$, $x \geq 0$, каждая из которых может рассматриваться как производная Радона — Никодима этой меры относительно меры Лебега на $[0, \infty)$. Через $S_{\varphi+}$ обозначим банахову алгебру, полученную из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ присоединением единицы δ_0 (мера единичной массы, сосредоточенная в нуле). В качестве умножения элементов $S_{\varphi+}$ берется обычная свертка мер: если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x)$ и $g = \beta\delta_0 + g_1(x)$ — элементы $S_{\varphi+}$, где $f_1(x)$, $g_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}$, то их свертка — это мера, задаваемая равенством

$$f * g(dx) := (\alpha\beta)\delta_0(dx) + [\alpha g_1(x) + \beta f_1(x) + f_1 * g_1(x)]\,dx.$$

Преобразование Лапласа $\hat{f}(s)$ элемента $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}$ равно

$$\widehat{f}(s) = \alpha + \int\limits_0^\infty e^{sx} f_1(x)\,dx = \int\limits_0^\infty e^{sx}\,f(dx);$$

этот интеграл абсолютно сходится в полуплоскости $\Pi(\gamma)$ в силу (7). Через $|f|$ обозначим полную вариацию меры f:

$$|f|(dx) := |\alpha|\delta_0(dx) + |f(x)|\,dx.$$

Пусть $\tau(x)$, $x \geq 0$, — измеримая по Борелю положительная функция такая, что

$$\lim_{x\to\infty} [\tau(x)]^{1/x} = 1, \qquad \sup_{x\geq 0, |y|\leq 1} \frac{\tau(x)}{\tau(x-y)} < \infty, \tag{8}$$

где $\tau(x) := \tau(0)$, $x < 0$. Для $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ положим

$$P_\tau(f) := \operatorname*{ess\,sup}_{x\geq 0} \frac{|f(x)|\varphi(x)}{\tau(x)}.$$

Обозначим

$$\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau) := \{f \in \widetilde{S}_{\varphi+} : P_\tau(f) < \infty\},$$

$$\widetilde{S}^0_{\varphi+}(\tau) := \left\{f \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau) : \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{\tau(x)} = 0\right\},$$

$$\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau, 0) := \left\{f \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau) : \text{ существует } \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\varphi(x)}{\tau(x)} =: \mathscr{L}(f)\right\};$$

здесь и в дальнейшем соотношения с участием элементов из $\widetilde{S}_{\varphi+}$ понимаются в том смысле, что в классе эквивалентных функций, представляющих рассматриваемый элемент $\widetilde{S}_{\varphi+}$, найдется хотя бы одна функция, для которой выполняется указанное соотношение.

Предположим дополнительно, что функция $\tau(x)$ такова, что для всех f, $g \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$ выполняется неравенство

$$P_\tau(f * g) \leq C[\|f\|_\varphi P_\tau(g) + \|g\|_\varphi P_\tau(f) + P_\tau(f)P_\tau(g)], \tag{9}$$

где $C \geq 1$ — константа, не зависящая от f и g.

Функции $\tau(x)$, $x \geq 0$, удовлетворяющие (8) и обеспечивающие выполнение условия (9), будем называть *нормирующими* (или, точнее, *φ-нормирующими*).

Для произвольного $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$ положим $\|f\|_{\varphi,\tau} := C[\|f\|_\varphi + P_\tau(f)]$. Совокупность $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$ — полное коммутативное нормированное кольцо без единицы относительно нормы $\|\cdot\|_{\varphi,\tau}$, а совокупность $\widetilde{S}^0_{\varphi+}(\tau)$ — замкнутое подкольцо нормированного кольца $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$.

Следующее условие на положительную ограниченную измеримую по Борелю функцию $\tau(x)$ обеспечивает выполнение соотношения (9) при любой полумультипликативной весовой функции $\varphi(x)$: при всех $x \geq 0$

$$\min\left\{\sup_{t\in[x/2,x]} \frac{\tau(t)}{\tau(x)}, \frac{1}{\tau(x)} \int\limits_0^{x/2} \tau(x-y)\tau(y)\,dy\right\} \leq C_1 < \infty.$$

Будем предполагать, что $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau, 0)$ — замкнутое подкольцо нормированного кольца $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$ и для любых f, $g \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau, 0)$ выполняется соотношение

$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f)\,\hat{g}(\gamma) + \mathscr{L}(g)\,\hat{f}(\gamma). \tag{10}$$

Через $S_{\varphi+}(\tau)$, $S^0_{\varphi+}(\tau)$, $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ обозначим банаховы алгебры, полученные из $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau)$, $\widetilde{S}^0_{\varphi+}(\tau)$, $\widetilde{S}_{\varphi+}(\tau, 0)$ присоединением единицы δ_0. Если $f = \alpha\delta_0 + f_1(x) \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$, где $f_1(x) \in \widetilde{S}_{\varphi+}(\tau, 0)$, то $\mathscr{L}(f) := \mathscr{L}(f_1)$, в частности, $\mathscr{L}(\delta_0) = 0$.

Пусть $\varphi(x)$, $x \geq 0$, — полумультипликативная функция и $\tau(x)$, $x \geq 0$, — нормирующая функция. Предположим, что выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\geq 2n} \frac{1}{\tau(x)} \int\limits_{n}^{x/2} \tau(x-y)\tau(y)\,dy = 0, \tag{11}$$

$$\sup_{x\geq 0} \sup_{t\in[x/2,x]} \frac{\tau(t)}{\tau(x)} < \infty, \tag{12}$$

и пусть, кроме того, для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)\tau(x-y)}{\varphi(x-y)\tau(x)} = \exp(\gamma y). \tag{13}$$

Тогда $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ — банахова подалгебра алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$ и выполняется соотношение (10) [12]. Следующая теорема установлена в [12, теорема 3 и п. 5].

Теорема 1. *Предположим, что $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ — банахова подалгебра алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$ и для всех $f, g \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$ справедливо равенство (10). Пусть M — максимальный идеал в $S_{\varphi+}(\tau, 0)$. Тогда существует максимальный идеал M_1 в $S_{\varphi+}$ такой, что*

$$M = M_1 \cap S_{\varphi+}(\tau, 0).$$

Обратно, если M_1 — максимальный идеал в $S_{\varphi+}$, то $M = M_1 \cap S_{\varphi+}(\tau, 0)$ — максимальный идеал в $S_{\varphi+}(\tau, 0)$.

Приведем набор наглядных условий на полумультипликативную функцию $\varphi(x)$ и нормирующую функцию $\tau(x)$, при которых справедлива теорема 1: для любого $y \in \mathbb{R}$ существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)/\varphi(x-y) = \exp(\gamma y)$;

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tau(x+y)}{\tau(x)} = 1 \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}; \tag{14}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\tau * \tau(x)}{\tau(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\tau(x)} \int\limits_{0}^{x} \tau(x-y)\tau(y)\,dy = 2.$$

При этих условиях справедливы соотношения (11) и (13). Следовательно, $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ — банахова подалгебра алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$, и выполняется соотношение (10).

Замечание 1. Используя представление для медленно меняющихся функций (см. [10, § VIII.9]), нетрудно показать, что функция $\tau(x) = x^\alpha L(x)$, где $L(x)$ медленно меняется на бесконечности, удовлетворяет как условию (12), так и условию (14) после изменения ее, в случае необходимости, на некотором конечном отрезке. Таким образом, если еще и полумультипликативная функция $\varphi(x)$ такова, что существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x)/\varphi(x-y) = \exp(\gamma y)$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то для такой пары функций $\varphi(x)$ и $\tau(x)$ совокупность $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ — банахова подалгебра алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$ и выполняется соотношение (10). Следовательно, справедливо заключение теоремы 1. Отметим также, что если $\int\limits_{A}^{\infty} \tau(x)\,dx = \infty$ при любом $A > 0$, то $\mathscr{L}(f) = 0$ для всех $f \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$ и банахова алгебра $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ совпадает, таким образом, с $S^0_{\varphi+}(\tau)$. Поэтому при рассмотрении банаховых алгебр $S_{\varphi+}(\tau,0)$ естественно требовать, чтобы интеграл $\int\limits_A^\infty \tau(x)\,dx$ сходился при некотором $A>0$. Для правильно меняющихся функций $\tau(x)=x^\alpha L(x)$ интеграл $\int\limits_A^\infty x^\alpha L(x)\,dx$ сходится при $\alpha<-1$ и расходится при $\alpha>-1$ [10, § VIII.9, лемма]. В пограничном случае $\alpha=-1$ интеграл $\int\limits_A^\infty x^{-1}L(x)\,dx$ может как сходиться, так и расходиться в зависимости от вида медленно меняющейся функции $L(x)$.

Замечание 2. Для максимальных идеалов алгебр $S^0_{\varphi+}(\tau)$ и $S_{\varphi+}(\tau)$ справедливы утверждения, аналогичные теореме 1 [12, теоремы 1, 2 и п. 5], причем в случае алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$ от нормирующей функции $\tau(x)$ требуется, чтобы она обеспечивала выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty} P_\tau(f_n^c * f_n^c)=0, \quad f\in S_{\varphi+}(\tau), \tag{15}$$

где $f_n^c(x):=f(x)\mathbf{1}_{[n,\infty)}(x)$, $n=1,2,\dots$. Условие (11) (или (12)) гарантирует выполнение (15) при любой полумультипликативной функции $\varphi(x)$.

§ 4. Теоремы о преобразованиях Лапласа

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x)$, $x\ge 0$, — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$, $x\ge 0$, не убывает. Предположим, что $f\in S_{\varphi+}$ и $\hat f(s_0)=0$, $\operatorname{Re} s_0<\gamma$. Положим $h(s):=\hat f(s)/(s-s_0)$, $s\in\Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности: $h(s_0):=\int\limits_0^\infty x\exp(s_0x)\,f(dx)$. Тогда функция $h(s)$, $s\in\Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\hat g(s)$ некоторой функции $g\in\widetilde S_{\varphi+}$, причем $\varphi(x)g(x)\to 0$ при $x\to\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)$, $x\ge 0$, задаваемую равенством

$$g(x):=\int\limits_x^\infty e^{-s_0(x-y)}\,f(dy).$$

Покажем, что $g\in\widetilde S_{\varphi+}$. Положим $\rho:=\operatorname{Re} s_0$. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \varphi(x)|g(x)|\,dx &\le \int\limits_0^\infty \varphi(x)\int\limits_x^\infty e^{-\rho(x-y)}\,|f|(dy)dx\\ &= \int\limits_0^\infty e^{\rho y}\int\limits_0^y \varphi(x)e^{-\gamma x}e^{(\gamma-\rho)x}\,dx|f|(dy) \le \int\limits_0^\infty \varphi(y)e^{(\rho-\gamma)y}\int\limits_0^y e^{(\gamma-\rho)x}\,dx|f|(dy)\\ &\le \frac{1}{\gamma-\rho}\int\limits_0^\infty \varphi(y)|f|(dy)<\infty.\end{aligned}$$

Имеем

$$\hat g(s)=\int\limits_0^\infty e^{sx}\int\limits_x^\infty e^{-s_0(x-y)}\,f(dy)dx, \quad s\in\Pi(\gamma).$$

Пусть $s \neq s_0$. По теореме Фубини

$$\hat{g}(s) = \frac{1}{s - s_0} \int_0^\infty (e^{sy} - e^{s_0 y})\, f(dy) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(s_0)}{s - s_0} = \frac{\hat{f}(s)}{s - s_0}.$$

Аналогично устанавливаем, что $\hat{g}(s_0) = \int_0^\infty y e^{s_0 y}\, f(dy)$. Наконец,

$$|\varphi(x)g(x)| \leq \int_x^\infty [\varphi(x)e^{-\rho x}]e^{\rho y}\, |f|(dy)$$

$$\leq \int_x^\infty [\varphi(y)e^{-\rho y}]e^{\rho y}\, |f|(dy) = \int_x^\infty \varphi(y)\, |f|(dy) \to 0, \quad x \to \infty.$$

Теорема доказана.

Абсолютно непрерывная мера g, о которой идет речь в теореме 2, будет обозначаться через $T(s_0)f$.

Замечание 3. Как явствует из доказательства, для справедливости соотношения $g \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ условие монотонности функции $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$ в теореме 2 можно ослабить: достаточно потребовать, чтобы не убывала функция $\psi_1(x) := \varphi(x)/\exp(\rho_1 x)$ при некотором $\rho_1 \in (\rho, \gamma)$ или, более общó: $\psi_1(x) \leq C\psi_1(y)$ при всех $y \geq x$, начиная с некоторого места, т. е. при всех x, y таких, что $y \geq x \geq x_0 \geq 0$; здесь $C > 0$ — постоянная. Для доказательства соотношения $\varphi(x)g(x) \to 0$, $x \to \infty$, достаточно предположить, чтобы не убывала функция $\psi(x) := \varphi(x)/\exp(\rho x)$ или, более общó, $\psi(x) \leq C\psi(y)$ при всех $y \geq x$, начиная с некоторого места. Сказанное здесь в полной мере относится и к теоремам 5–7 ниже.

Будем говорить, что положительная функция $\sigma(x)$, $x \in A$, *отделена от нуля на множестве* A, если $\sigma(x) \geq \delta(A) > 0$ при всех $x \in A$. Нетрудно видеть, что если ограниченная положительная функция $\sigma(x)$, $x \geq 0$, удовлетворяет условию

$$\sup_{x \geq 0, |y| \leq 1} \frac{\sigma(x)}{\sigma(x - y)} < \infty,$$

то $\sigma(x)$ отделена от нуля на конечных интервалах $[a, b] \subset [0, \infty)$. Таким образом, нормирующие функции $\tau(x)$ отделены от нуля на конечных интервалах.

Теорема 3. *Пусть $f = \alpha\delta_0 + f_1(x)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\int_0^\infty |f_1(x)|e^{\gamma x}\, dx < \infty$ при некотором $\gamma \in \mathbb{R}$, и пусть $\sigma(x)$, $x \geq 0$, — измеримая по Борелю положительная функция такая, что $\sigma(x+u)/\sigma(x) \to e^{-\gamma u}$ при $x \to \infty$ и любом $u \in \mathbb{R}$. Предположим, что $\hat{f}(s_0) = 0$ при $\operatorname{Re} s_0 < \gamma$ и существует предел $\mathscr{L}_1(f_1) := \lim_{x \to \infty} f_1(x)/\sigma(x)$. Положим $h(s) = \hat{f}(s)/(s - s_0)$, $s \in \Pi(\gamma)$, определяя $h(s)$ в точке s_0 по непрерывности. Тогда функция $h(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\hat{g}(s)$ некоторой функции $g(x)$ такой, что $\int_0^\infty |g(x)|e^{\gamma x}\, dx < \infty$ и существует предел*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{\sigma(x)} = \frac{\mathscr{L}_1(f_1)}{\gamma - s_0}.$$

Если, кроме того, функция $\sigma(x)$ отделена от нуля на конечных интервалах, то $\sup\limits_{x\ge 0}|g(x)|/\sigma(x)<\infty$.

Доказательство. Заимствуем обозначения из доказательства теоремы 2. Конечность $\int\limits_0^\infty |g(x)|e^{\gamma x}\,dx$ вытекает из теоремы 2. Далее,

$$\frac{g(x)}{\sigma(x)}=\frac{1}{\sigma(x)}\int\limits_x^\infty e^{-s_0(x-y)}f_1(y)\,dy=\int\limits_0^\infty e^{s_0u}\frac{\sigma(x+u)}{\sigma(x)}\frac{f_1(x+u)}{\sigma(x+u)}\,du. \tag{16}$$

Подынтегральная функция стремится к $e^{(s_0-\gamma)u}\mathscr{L}_1(f_1)$ при $x\to\infty$. Подберем интегрируемую на $[0,\infty)$ мажоранту подынтегральной функции. Выберем $\varepsilon>0$ таким образом, чтобы $\rho+\varepsilon<\gamma$. Положим $\sigma_1(x):=\sigma(x)e^{\gamma x}$. Тогда $\sigma_1(x+y)/\sigma_1(x)\to 1$ при $x\to\infty$ и произвольном фиксированном $y\in\mathbb{R}$, или $\ln\sigma_1(x+y)-\ln\sigma_1(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Согласно лемме 1.1 из [13] последнее соотношение выполняется равномерно по всем y, принадлежащим произвольному фиксированному конечному замкнутому интервалу. Таким образом, найдется $x_0=x_0(\varepsilon)$ такое, что $|\ln\sigma_1(x+y)-\ln\sigma_1(x)|<\varepsilon$ при всех $x\ge x_0$ и всех $y\in[0,1]$, откуда $\sigma_1(x+y)/\sigma_1(x)<e^\varepsilon$ при тех же x и y. Пусть $u>0$ произвольно и $n\ge 0$ — целое число такое, что $u\in[n,n+1)$. Тогда при $x\ge x_0$

$$\frac{\sigma_1(x+u)}{\sigma_1(x)}=\frac{\sigma_1(x+1)}{\sigma_1(x)}\cdots\frac{\sigma_1(x+n)}{\sigma_1(x+n-1)}\frac{\sigma_1(x+u)}{\sigma_1(x+n)}\le e^{\varepsilon(u+1)},$$

откуда $\sigma(x+u)/\sigma(x)\le e^\varepsilon e^{(\varepsilon-\gamma)u}$. Увеличивая, если необходимо, x_0, можно считать, что $|f_1(x)|/\sigma(x)\le|\mathscr{L}_1(f_1)|+\varepsilon$ при всех $x\ge x_0$. Таким образом, подынтегральная функция в правой части (16) при всех $x\ge x_0$ мажорируется интегрируемой на $[0,\infty)$ функцией $[|\mathscr{L}_1(f_1)|+\varepsilon]e^\varepsilon e^{(\rho+\varepsilon-\gamma)u}$. Переходя к пределу в равенстве (16), получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sigma(x)}=\mathscr{L}_1(f_1)\int\limits_0^\infty e^{(s_0-\gamma)u}\,du=\frac{\mathscr{L}_1(f_1)}{\gamma-s_0}.$$

Наконец,

$$\sup_{x\ge x_0}\frac{g(x)}{\sigma(x)}\le\frac{[|\mathscr{L}_1(f_1)|+\varepsilon]e^\varepsilon}{\gamma-\rho-\varepsilon}<\infty.$$

Пусть функция $\sigma(x)$ отделена от нуля на $[0,x_0]$. Тогда $\sup\limits_{x\ge 0}g(x)/\sigma(x)<\infty$, поскольку $g(x)$ — непрерывная функция. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(x)$, $x\ge 0$, — полумультипликативная функция и $\tau(x)$, $x\ge 0$, — измеримая по Борелю положительная функция такие, что функции $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$ и $\varphi(x)/[\tau(x)\exp(\gamma x)]$ не убывают, начиная с некоторого места. Предположим, что $f=\alpha\delta_0+f_1(x)\in S_{\varphi+}$ и $\hat f(s_0)=0$, $\operatorname{Re}s_0<\gamma$, и пусть $g(x)$, $x\ge 0$, — функция, определяемая теоремой 2. Тогда*

1) *если* $\lim\limits_{x\to\infty}f_1(x)\varphi(x)/\tau(x)=0$, *то и* $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\varphi(x)/\tau(x)=0$;

2) *если* $\varlimsup\limits_{x\to\infty}|f_1(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\infty$, *то и* $\varlimsup\limits_{x\to\infty}|g(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\infty$; *если к тому же функция $\tau(x)$ отделена от нуля на конечных интервалах, то* $P_\tau(g)=\sup\limits_{x\ge 0}|g(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\infty$.

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x)\varphi(x)/\tau(x)=0$. Зададимся произвольным $\varepsilon>0$. Выберем $x_0=x_0(\varepsilon)$ так, чтобы $|f_1(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\varepsilon$ при всех $x\ge x_0$. Положим $\rho=\operatorname{Re}s_0$. При $x\ge x_0$ имеем

$$\frac{|g(x)|\varphi(x)}{\tau(x)}\le\int\limits_0^\infty e^{(\rho-\gamma)u}\frac{\tau(x+u)e^{\gamma(x+u)}}{\varphi(x+u)}\,\frac{\varphi(x)}{\tau(x)e^{\gamma x}}\,\frac{|f_1(x+u)|\varphi(x+u)}{\tau(x+u)}\,du$$
$$\le\int\limits_0^\infty e^{(\rho-\gamma)u}\frac{|f_1(x+u)|\varphi(x+u)}{\tau(x+u)}\,du\le\frac{\varepsilon}{\gamma-\rho}.$$

Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, утверждение 1 доказано. Предположим, что

$$\varlimsup_{x\to\infty}|f_1(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\infty.$$

Найдутся $C<\infty$ и $x_0=x_0(C)$ такие, что $|f_1(x)|\varphi(x)/\tau(x)<C$ при всех $x\ge x_0$. Тогда $|g(x)|\varphi(x)/\tau(x)<C/(\gamma-\rho)$ при $x\ge x_0$, т. е. $\varlimsup\limits_{x\to\infty}|g(x)|\varphi(x)/\tau(x)<\infty$. Если $\tau(x)$ отделена от нуля на $[0,x_0]$, то $P_\tau(g)<\infty$, поскольку $g(x)$ — непрерывная функция, а $\varphi(x)$ ограничена на конечных интервалах [8, теорема 7.4.1]. Теорема доказана.

§ 5. Основные результаты

В теоремах 5 и 6, рассматриваемых далее, $\varphi(x)$ — полумультипликативная функция такая, что функция $\varphi(x)/\exp(\gamma x)$ не убывает, а $\tau(x)$ — нормирующая функция (см. также замечания 3 и 4). Кроме того, будем предполагать, что $S_{\varphi+}(\tau,0)$ — банахова подалгебра алгебры $S_{\varphi+}(\tau)$, для всех $f,\ g\in S_{\varphi+}(\tau,0)$ справедливо равенство (10) и для любого $y\in\mathbb{R}$ существует предел (13).

Рассмотрим задачу (2) с начальными значениями 0, $\boldsymbol{X}(0)$.

Теорема 5. *Предположим, что* $\boldsymbol{F},\boldsymbol{K}\in S_{\varphi+}(\tau,0)$. *Тогда для решения* $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (2) *справедливо асимптотическое разложение* (6), *в котором* $\boldsymbol{\Delta}\in S_{\varphi+}(\tau,0)$ *и*

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\Delta})=\lim_{t\to\infty}\frac{\boldsymbol{\Delta}(t)\varphi(t)}{\tau(t)}=[\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}$$
$$\times[\boldsymbol{X}(0)+\widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)]+[\boldsymbol{A}-\gamma\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F}).$$

Доказательство. Обозначим через p_j кратность корня $s_j\in\mathscr{Z}$ уравнения (5); это означает, что $p_j>0$ — целое число такое, что

$$\det[\boldsymbol{A}-s\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{K}}(s)]=(s-s_j)^{p_j}f_j(s)$$

и $f_j(s_j)\ne0$. Выберем $\sigma>\gamma$. Положим $p:=\sum\limits_{j=1}^{l}p_j$ и

$$v(s):=\frac{\det[\boldsymbol{A}-s\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{K}}(s)](s-\sigma)^p}{(s-\sigma)^n\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}},\quad s\in\Pi(\gamma),$$

доопределив значения функции $v(s)$ в точках $s_1,\ \dots,\ s_l$ по непрерывности.

Доказательство теоремы 5 удобно разбить на несколько лемм. Обозначим через $\mathscr{E}_\sigma$ меру с плотностью $\mathscr{E}_\sigma(t)=\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)e^{-\sigma t}$.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(t)$, $t \geq 0$, — полумультипликативная функция, и пусть положительная функция $\tau(x)$ удовлетворяет соотношению* (8). *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t)/\tau(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t) = 0$$

и, следовательно, в условиях теоремы 5 $\mathscr{E}_\sigma \in S^0_{\varphi+}(\tau) \subset S_{\varphi+}(\tau, 0)$ *и* $\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma) = 0$.

Доказательство леммы 1. В силу (7) и (8) имеем

$$\frac{\ln[\mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t)/\tau(t)]}{t} = -\sigma + \frac{\ln\varphi(t)}{t} - \frac{\ln\tau(t)}{t} \to -\sigma + \gamma - 0 < 0$$

при $t \to \infty$. Положим $\beta := (\sigma - \gamma)/2 > 0$. Тогда найдется такое $t_0 = t_0(\beta)$, что $\mathscr{E}_\sigma(t)\varphi(t)/\tau(t) \leq e^{-\beta t}$ при всех $t \geq t_0$. Лемма 1 доказана.

Наша следующая цель — показать, что функция $v(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$. Рассмотрим сначала функцию

$$u(s) := \frac{\det[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]}{(s-\sigma)^n}.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда функция $u(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{U}(s)$ некоторой меры $U \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$.*

Доказательство леммы 2. Функция $\det[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]$ равна линейной комбинации произведений вида

$$[A_{1j_1} - s\delta_{1j_1} - \widehat{K}_{1j_1}(s)][A_{2j_2} - s\delta_{2j_2} - \widehat{K}_{2j_2}(s)]\dots[A_{nj_n} - s\delta_{nj_n} - \widehat{K}_{nj_n}(s)];$$

здесь $j_1 j_2 \dots j_n$ — перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, а $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Такое произведение можно представить в виде суммы $\sum\limits_m p_m(s)q_m(s)$, где $p_m(s)$ — многочлен степени, не превосходящей n, а $q_m(s)$ либо единица, либо произведение конечного числа сомножителей вида $\widehat{K}_{ij}(s)$. Таким образом, $q_m(s)$ — преобразование Лапласа $\widehat{Q}_m(s)$ некоторой меры $Q_m \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$. Разлагая рациональную функцию $p_m(s)/(s-\sigma)^n$ на простые дроби, получим

$$\frac{1}{(s-\sigma)^n}\sum_m p_m(s)q_m(s) = \sum_m \sum_{j=0}^n \frac{a_{mj}q_m(s)}{(s-\sigma)^j},$$

где a_{mj} — постоянные. Таким образом, левая часть этого равенства представляет собой преобразование Лапласа меры

$$\sum_m \sum_{j=0}^n (-1)^j a_{mj} Q_m * \mathscr{E}_\sigma^{j*},$$

принадлежащей банаховой алгебре $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ согласно лемме 1. Поскольку $u(s)$ — линейная комбинация преобразований Лапласа таких мер, лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда функция $v(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$, — преобразование Лапласа $\widehat{V}(s)$ некоторой меры $V \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$.*

Доказательство леммы 3. Имеем $v(s) = u(s)(s-\sigma)^p / \prod\limits_{j=1}^l (s-s_j)^{p_j}$. Разлагая рациональную функцию $(s-\sigma)^p / \prod\limits_{j=1}^l (s-s_j)^{p_j}$ на простые дроби, получим

$$v(s) = u(s)\left[1 + \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right], \tag{17}$$

где c_{jk} — константы. Согласно теоремам 2 и 3 (в последней теореме полагаем $\sigma(x) := \tau(x)/\varphi(x)$) выражение $u(s)/(s-s_j)^k$ является преобразованием Лапласа меры $T(s_j)^k U$, принадлежащей банаховой алгебре $S_{\varphi+}(\tau,0)$. Подытоживая, видим, что $v(s) = \widehat{V}(s)$, где $V \in S_{\varphi+}(\tau,0)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда элемент* V, *определяемый леммой* 3, *обратим в* $S_{\varphi+}(\tau,0)$, *т. е. найдется элемент* $V^{-1} \in S_{\varphi+}(\tau,0)$ *такой, что* $V * V^{-1} = \delta_0$.

Доказательство леммы 4. Известны следующие факты. Для того чтобы элемент $V \in S_{\varphi+}$ имел обратный в $S_{\varphi+}$, необходимо и достаточно, чтобы $\widehat{V}(s) \neq 0$ при всех $s \in \Pi(\gamma)$ и атомическая составляющая меры V была отлична от нуля (аналог следствия 1 из [11, § 17] для банаховой алгебры $S_{\varphi+}$ [11, § 18]). Элемент произвольной банаховой алгебры обратим тогда и только тогда, когда он не принадлежит ни одному максимальному идеалу этой алгебры [11, § 2]. Сопоставляя эти факты с теоремой 1, приходим к заключению, что элемент $V \in S_{\varphi+}(\tau,0)$ обратим в $S_{\varphi+}(\tau,0)$ тогда и только тогда, когда $\widehat{V}(s) \neq 0$ при всех $s \in \Pi(\gamma)$ и атомическая составляющая меры V отлична от нуля. По построению $\widehat{V}(s) \neq 0$ для любого $s \in \Pi(\gamma)$ и атомическая часть V равна атомической составляющей меры U (см. (17)), которая равна $(-1)^n\delta_0 \neq 0$ (коэффициент при s^n в разложении для $\det[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]$ равен $(-1)^n$ и поэтому $u(s) = (-1)^n + g(s)$, где $g(s)$ — преобразование Лапласа абсолютно непрерывной меры). Следовательно, существует $V^{-1} \in S_{\varphi+}(\tau,0)$ и $(V^{-1})^\wedge(s) = 1/v(s)$, $s \in \Pi(\gamma)$. Лемма 4 доказана.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\boldsymbol{q}(s) := \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}}{(s-\sigma)^p}[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]^{-1}, \quad s \in \Pi(\gamma) \setminus \mathscr{Z}.$$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 5. *Тогда* $\boldsymbol{q}(s)$ *является матрицей преобразований Лапласа некоторой матрицы* $\boldsymbol{Q}$ *мер из* $S_{\varphi+}(\tau,0)$, *причем*

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{Q}) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma-s_j)^{p_j}}{(\gamma-\sigma)^p}[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}. \tag{18}$$

Доказательство леммы 5. Рассмотрим сначала матрицу

$$\boldsymbol{b}(s) := \frac{\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)}{s-\sigma} = -\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A} - \sigma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)}{s-\sigma}.$$

Переходя от преобразований Лапласа к их прообразам, видим, что $\boldsymbol{b}(s)$ является матрицей преобразований Лапласа $\widehat{\boldsymbol{B}}(s)$ для матрицы мер

$$\boldsymbol{B} := -\delta_0\boldsymbol{I} - \mathscr{E}_\sigma\boldsymbol{A} + \sigma\mathscr{E}_\sigma\boldsymbol{I} + \mathscr{E}_\sigma * \boldsymbol{K}.$$

Согласно лемме 1 $\boldsymbol{B} \in S_{\varphi+}(\tau,0)$. Отсюда вытекает, что присоединенная матрица к $\boldsymbol{b}(s)$ является матрицей преобразований Лапласа $\widehat{\boldsymbol{M}}(s)$ для некоторой матрицы мер $\boldsymbol{M}$ из $S_{\varphi+}(\tau,0)$. Воспользуемся очевидным равенством

$$[\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]^{-1} = \frac{1}{s-\sigma}\left[\frac{\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)}{s-\sigma}\right]^{-1}$$

и представим $\boldsymbol{q}(s)$ в виде

$$\boldsymbol{q}(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}}{(s-\sigma)^p}\frac{1}{s-\sigma}\frac{\widehat{\boldsymbol{M}}(s)}{\det \boldsymbol{b}(s)}.$$

Поскольку $\det \boldsymbol{b}(s) = u(s)$, имеем

$$\boldsymbol{q}(s) = \frac{1}{s-\sigma}\frac{\widehat{\boldsymbol{M}}(s)}{v(s)}.$$

Таким образом, согласно лемме 4 $\boldsymbol{q}(s)$ — матрица преобразований Лапласа для матрицы мер

$$\boldsymbol{Q} := -\mathscr{E}_\sigma * V^{-1} * \boldsymbol{M} \in S_{\varphi+}(\tau, 0). \tag{19}$$

Для того чтобы вычислить $\mathscr{L}(\boldsymbol{Q})$, умножим $\boldsymbol{q}(s) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(s)$ справа на матрицу $\widehat{\boldsymbol{B}}(s) = [\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]/(s-\sigma)$. Получим

$$\widehat{\boldsymbol{Q}}(s)\widehat{\boldsymbol{B}}(s) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(s)\frac{\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)}{s-\sigma} = \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}}{(s-\sigma)^{p+1}}\boldsymbol{I}. \tag{20}$$

Справа стоит матрица преобразований Лапласа мер из $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ с нулевыми значениями функционала $\mathscr{L}$. Действительно, разложим рациональную функцию — множитель перед $\boldsymbol{I}$ в правой части (20) — на простые дроби:

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}}{(s-\sigma)^{p+1}} = \sum_{k=1}^{p+1}\frac{c_k}{(s-\sigma)^k},$$

где c_k — константы. Очевидно, что правая часть — преобразование Лапласа меры $\mu := \sum\limits_{k=1}^{p+1}(-1)^k c_k \mathscr{E}_\sigma^{k*}$. Согласно лемме 1 $\mu \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$, и в силу (10) $\mathscr{L}(\mu) = 0$. Перейдем в равенстве (20) от преобразований Лапласа к соответствующим мерам и подействуем функционалом $\mathscr{L}$ на обе части полученного равенства. Имеем

$$\mathscr{L}[\boldsymbol{Q} * (-\delta_0\boldsymbol{I} - \mathscr{E}_\sigma\boldsymbol{A} + \sigma\mathscr{E}_\sigma\boldsymbol{I} + \mathscr{E}_\sigma * \boldsymbol{K})] = \boldsymbol{0}.$$

Вновь воспользуемся соотношением (10) и преобразуем левую часть этого равенства:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{Q})\frac{\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)}{\gamma-\sigma} &+ \widehat{\boldsymbol{Q}}(\gamma)\mathscr{L}(\mathscr{E}_\sigma * \boldsymbol{K}) \\ &= \mathscr{L}(\boldsymbol{Q})\frac{\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)}{\gamma-\sigma} + \widehat{\boldsymbol{Q}}(\gamma)\frac{\mathscr{L}(\boldsymbol{K})}{\sigma-\gamma} = \boldsymbol{0},\end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\boldsymbol{Q}) &= \widehat{\boldsymbol{Q}}(\gamma)\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1} \\ &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma-s_j)^{p_j}}{(\gamma-\sigma)^p}[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}.\end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Завершим доказательство теоремы 5. Имеем (см. (4))

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = [\boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]^{-1}[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)] = \frac{(s-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(s-s_j)^{p_j}}\widehat{\boldsymbol{Q}}(s)[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)]$$

$$= \left[1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{p_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right]\widehat{\boldsymbol{Q}}(s)[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)]. \quad (21)$$

Положим

$$\boldsymbol{W} := \boldsymbol{Q} * [\delta_0 \boldsymbol{X}(0) + \boldsymbol{F}]. \quad (22)$$

Очевидно, что $\boldsymbol{W} \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$ и $\widehat{\boldsymbol{W}}(s) = \widehat{\boldsymbol{Q}}(s)[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(s)]$. В силу (10)

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{W}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{Q})[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)] + \widehat{\boldsymbol{Q}}(\gamma)\mathscr{L}(\boldsymbol{F}). \quad (23)$$

Перепишем (21) в виде

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \left[1 + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{p_j}\frac{c_{jk}}{(s-s_j)^k}\right]\widehat{\boldsymbol{W}}(s)$$

и осуществим следующие преобразования:

$$\frac{\widehat{\boldsymbol{W}}(s)}{(s-s_j)^k} = \frac{\widehat{\boldsymbol{W}}(s_j)}{(s-s_j)^k} + \frac{\widehat{\boldsymbol{W}}(s) - \widehat{\boldsymbol{W}}(s_j)}{(s-s_j)^k} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\boldsymbol{w}_{i,j}(s_j)}{(s-s_j)^{k-i}} + \boldsymbol{w}_{k,j}(s),$$

$$\boldsymbol{w}_{0,j}(s) := \widehat{\boldsymbol{W}}(s), \quad \boldsymbol{w}_{i,j}(s) := \frac{\boldsymbol{w}_{i-1,j}(s) - \boldsymbol{w}_{i-1,j}(s_j)}{s-s_j}, \quad i = 1, \dots, p_j.$$

Согласно теоремам 2 и 3 матричная функция $\boldsymbol{w}_{i,j}(s)$ является преобразованием Лапласа меры $\boldsymbol{W}_{i,j} := T(s_j)^i \boldsymbol{W} \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$, для которой $\mathscr{L}(\boldsymbol{W}_{i,j}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{W})/(\gamma - s_j)^i$. В итоге в силу единственности разложения аналитической функции в ряд Лорана в окрестности изолированной особой точки получим

$$\widehat{\boldsymbol{X}}(s) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{q_j}(-1)^k\frac{\boldsymbol{B}_{jk}}{(s-s_j)^k} + \widehat{\boldsymbol{W}}(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}\widehat{\boldsymbol{W}}_{k,j}(s). \quad (24)$$

Из вышесказанного ясно, что функция

$$\widehat{\boldsymbol{\Delta}}(s) := \widehat{\boldsymbol{W}}(s) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j}c_{jk}\widehat{\boldsymbol{W}}_{k,j}(s), \quad s \in \Pi(\gamma),$$

— преобразование Лапласа некоторой матрицы мер $\boldsymbol{\Delta} \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$, причем элементы матрицы $\boldsymbol{\Delta}$ — абсолютно непрерывные меры, поскольку в предшествующих рассуждениях $\boldsymbol{W}$ — матрица абсолютно непрерывных мер (см. (19) и (22)), а применение операторов $T(s_j)^k$ к мерам дает абсолютно непрерывные меры. Теперь, чтобы получить искомое асимптотическое разложение (6), нам осталось перейти в равенстве (24) от преобразований Лапласа к прообразам.

Вычислим $\mathscr{L}(\boldsymbol{\Delta})$. Обозначим $\boldsymbol{G} := [\boldsymbol{A} - \gamma \boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}$. Учитывая равенства (10), (18) и (23), имеем

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\Delta}) = \mathscr{L}(\boldsymbol{W}) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\mathscr{L}(\boldsymbol{W}_{k,j})$$

$$= \mathscr{L}(\boldsymbol{W}) + \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{m_j} c_{jk}\frac{\mathscr{L}(\boldsymbol{W})}{(\gamma - s_j)^k} = \mathscr{L}(\boldsymbol{W})\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{p_j}}$$

$$= \{\mathscr{L}(\boldsymbol{Q})[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)] + \widehat{\boldsymbol{Q}}(s)\mathscr{L}(\boldsymbol{F})\}\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{p_j}}$$

$$= \left\{\frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{p_j}}{(\gamma-\sigma)^p}\boldsymbol{G}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{G}[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)] + \frac{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{p_j}}{(\gamma-\sigma)^p}\boldsymbol{G}\mathscr{L}(\boldsymbol{F})\right\}\frac{(\gamma-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(\gamma - s_j)^{p_j}}$$

$$= \boldsymbol{G}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})\boldsymbol{G}[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)] + \boldsymbol{G}\mathscr{L}(\boldsymbol{F}).$$

Теорема 5 доказана полностью.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (3).

Теорема 6. *Пусть* $\mathscr{Z} = \{s_1, \dots, s_l\}$ *— множество всех корней характеристического уравнения*

$$\det[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)] = 0,$$

лежащих в полуплоскости $\Pi(\gamma)$, *причем* $\operatorname{Re} s_j < \gamma$, $j = 1, \dots, l$. *Предположим, что* $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{K} \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$, *и пусть*

$$\sum_{k=1}^{q_j}(-1)^k\frac{\boldsymbol{C}_{jk}}{(s - s_j)^k}$$

— главная часть разложения функции $[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)]^{-1}\widehat{\boldsymbol{F}}(s)$ *в ряд Лорана в окрестности точки* s_j, $j = 1, \dots, l$. *Тогда для решения* $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (3) *справедливо разложение*

$$\boldsymbol{X}(t) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{q_j}\boldsymbol{C}_{jk}\frac{t^{k-1}e^{-s_j t}}{(k-1)!} + \boldsymbol{\Delta}(t),$$

в котором $\boldsymbol{\Delta} \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$ *и*

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{\Delta}) = [\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma) + [\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F}).$$

Теорема 6 доказывается аналогично теореме 5, следует лишь изменить определение вспомогательных функций $v(s)$ и $u(s)$:

$$v(s) := \frac{\det[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)](s-\sigma)^p}{\prod\limits_{j=1}^{l}(s - s_j)^{p_j}}, \quad u(s) := \det[\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(s)];$$

кроме того, отпадает необходимость в лемме 2, поскольку очевидно, что $u(s)$ — преобразование Лапласа некоторой меры $U \in S_{\varphi+}(\tau, 0)$.

Приведем весьма наглядное и в то же время довольно общее следствие теоремы 5. Напомним, что запись $f(t) \sim cg(t)$, $t \to \infty$, означает $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)/g(t) = c$. Полагая в теореме 5 $\varphi(t) = e^{\gamma t}$, $\tau(t) = t^\alpha L(t)$ и учитывая замечание 1, получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть* $\tau(t) = t^\alpha L(t)$, $t \geq 0$, *— правильно меняющаяся функция с показателем* $\alpha \leq -1$. *Предположим, что* $P_\tau(\boldsymbol{F})$ *и* $P_\tau(\boldsymbol{K})$ *конечны и*

$$\boldsymbol{F}(t) \sim \mathscr{L}(\boldsymbol{F})\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad \boldsymbol{K}(t) \sim \mathscr{L}(\boldsymbol{K})\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

Тогда для решения $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (2) *справедливо асимптотическое разложение* (6), *в котором* $P_\tau(\boldsymbol{\Delta}) < \infty$ *и*

$$\boldsymbol{\Delta}(t) \sim \{[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{K})[\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}[\boldsymbol{X}(0) + \widehat{\boldsymbol{F}}(\gamma)] + [\boldsymbol{A} - \gamma\boldsymbol{I} - \widehat{\boldsymbol{K}}(\gamma)]^{-1}\mathscr{L}(\boldsymbol{F})\}\frac{t^\alpha L(t)}{e^{\gamma t}}, \quad t \to \infty.$$

Многие авторы, исследуя уравнения типа (2), ограничиваются изучением *резольвентной функции* $\boldsymbol{R}(t)$, которая в нашем случае определяется как решение матричного уравнения

$$\boldsymbol{R}'(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{K} * \boldsymbol{R}(t)$$

с начальными значениями 0, $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{I}$. Резольвентная функция играет особую роль при исследовании уравнения (2) благодаря следующему факту. Если известна резольвентная функция $\boldsymbol{R}(t)$, соответствующая уравнению (2), то решение $\boldsymbol{X}(t)$ уравнения (2) с начальными значениями 0, $\boldsymbol{X}(0)$ представимо в виде

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{R}(t)\boldsymbol{X}(0) + \boldsymbol{R} * \boldsymbol{F}(t).$$

Не составляет труда сформулировать результат теоремы 5 для резольвентной функции.

Также легко выписать следствие теоремы 5 для системы дифференциальных уравнений ($\boldsymbol{K}(t) \equiv \boldsymbol{0}$)

$$\boldsymbol{X}'(t) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{F}(t), \quad t \geq 0.$$

Дополним теорему 5 аналогичными утверждениями в терминах банаховых алгебр $S^0_{\varphi+}(\tau)$ и $S_{\varphi+}(\tau)$. Пусть $\varphi(t)$ — полумультипликативная и $\tau(t)$ — нормирующая функции такие, что функции $\varphi(t)/\exp(\gamma t)$ и $\varphi(t)/[\tau(t)\exp(\gamma t)]$ не убывают начиная с некоторого места.

Теорема 7. *Предположим, что* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K} \in S^0_{\varphi+}(\tau)$. *Тогда для решения* $\boldsymbol{X}(t)$ *уравнения* (2) *справедливо разложение* (6), *в котором* $\boldsymbol{\Delta} \in S^0_{\varphi+}(\tau)$.

Предположим, что выполнено соотношение (15) *и* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K} \in S_{\varphi+}(\tau)$. *Тогда справедливо разложение* (6), *в котором* $\boldsymbol{\Delta} \in S_{\varphi+}(\tau)$. *Остаток* $\boldsymbol{\Delta}(t)$ *в обоих случаях удовлетворяет соотношению* $\varphi(t)\boldsymbol{\Delta}(t) \to \boldsymbol{0}$ *при* $t \to \infty$.

Поясним, что

$$\boldsymbol{F} \in S_{\varphi+}(\tau) \Longleftrightarrow \int_0^\infty |\boldsymbol{F}(x)|\varphi(x)\,dx < \infty \quad \text{и} \quad \operatorname*{ess\,sup}_{t\geq 0}\frac{|\boldsymbol{F}(t)|\varphi(t)}{\tau(t)} < \infty,$$

$$\boldsymbol{F} \in S^0_{\varphi+}(\tau) \Longleftrightarrow \boldsymbol{F} \in S_{\varphi+}(\tau) \quad \text{и} \quad \boldsymbol{F}(t) = o[\tau(t)/\varphi(t)]$$

при $t \to \infty$ и аналогично для $\boldsymbol{K}(t)$ и $\boldsymbol{\Delta}(t)$. Здесь $|\boldsymbol{F}(t)| := (|F_{im}(t)|)$.

Доказательство теоремы 7. Теорема 7 доказывается аналогично теореме 5 с заменой банаховой алгебры $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ алгебрами $S^0_{\varphi+}(\tau)$ и $S_{\varphi+}(\tau)$, при этом отпадает необходимость в вычислении значений функционала $\mathscr{L}$. Кроме того, вместо ссылок на теорему 3 необходимо ссылаться на теорему 4.

Для доказательства соотношения $\varphi(t)\boldsymbol{\Delta}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$ нам потребуется следующая лемма, которая будет доказана после завершения доказательства теоремы 7.

Лемма 6. *Пусть $\varphi(t)$, $t \geq 0$, — полумультипликативная функция и $\mathscr{E}_\sigma$ — мера с плотностью $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(t)e^{-\sigma t}$, где $\sigma > \gamma$. Тогда для любого элемента $f \in \widetilde{S}_{\varphi+}$ выполняется соотношение $\varphi(t) f * \mathscr{E}_\sigma(t) \to 0$ при $t \to \infty$.*

По лемме 6 плотность $\boldsymbol{W}(t)$ меры $\boldsymbol{W}$ такова, что $\varphi(t)\boldsymbol{W}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to \infty$. Согласно теореме 2 плотности $\boldsymbol{W}_{k,j}(t)$ мер $T(s_j)^k\boldsymbol{W}$ удовлетворяют соотношениям $\varphi(t)\boldsymbol{W}_{k,j}(t) \to \mathbf{0}$, $t \to \infty$, при всех k и j. Поскольку

$$\boldsymbol{\Delta}(t) = \boldsymbol{W}(t) + \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=1}^{q_j} c_{jk} \boldsymbol{W}_{k,j}(t),$$

отсюда вытекает, что остаток $\boldsymbol{\Delta}(t)$ удовлетворяет требуемому соотношению. Теорема 7 доказана.

Доказательство леммы 6. Справедлива оценка

$$|\varphi(t) f * \mathscr{E}_\sigma(t)| = \left|\varphi(t) \int_0^t e^{-\sigma(t-y)} f(y)\, dy\right| \leq \int_0^t \varphi(t-y) e^{-\sigma(t-y)} \varphi(y) |f(y)|\, dy$$
$$= \int_0^\infty \mathbf{1}_{(0,t)}(y) \varphi(t-y) e^{-\sigma(t-y)} \varphi(y) |f(y)|\, dy =: I(t).$$

Имеем $C := \sup\limits_{u \geq 0} \varphi(u) e^{-\sigma u} < \infty$ в силу соотношений (7) и того обстоятельства, что $\varphi(t)$ — ограниченная функция на ограниченных промежутках [8, теорема 7.4.1]. Подынтегральная функция в последнем интеграле мажорируется по абсолютной величине интегрируемой функцией $C\varphi(y)|f(y)|$. Кроме того, подынтегральная функция стремится к нулю при $t \to \infty$ для любого фиксированного y в силу тех же соотношений (7). По теореме о мажорируемой сходимости $I(t) \to 0$ при $t \to \infty$, что и требовалось доказать.

Замечание 4. Если $\mathscr{X} = \varnothing$, то при доказательстве теорем 5–7 и других утверждений отпадает надобность в ссылках на теоремы 2–4 и, следовательно, в дополнительных условиях на функции $\varphi(t)$ и $\tau(t)$, связанных с применением этих теорем. Таким образом, в теоремах 5–7 при $\mathscr{X} = \varnothing$ требуются лишь те условия, которые обеспечивают справедливость утверждений о строении максимальных идеалов соответствующих банаховых алгебр $S_{\varphi+}(\tau)$, $S^0_{\varphi+}(\tau)$ и $S_{\varphi+}(\tau, 0)$ (см. теорему 1 и замечание 2).

Автор выражает благодарность рецензенту за полезное обсуждение первоначального варианта рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Levin J. J., Shea D. F.* On the asymptotic behavior of the bounded solutions of some integral equations. I // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 42–82.
2. *Levin J. J., Shea D. F.* On the asymptotic behavior of the bounded solutions of some integral equations. II // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 288–326.
3. *Levin J. J., Shea D. F.* On the asymptotic behavior of the bounded solutions of some integral equations. III // J. Math. Anal. Appl. 1972. V. 37. P. 537–575.
4. *Miller R. K.* Structure of solutions of unstable linear Volterra integrodifferential equations // J. Differential Equations. 1974. V. 15. P. 129–157.
5. *Дербенев В. А., Цалюк З. Б.* Асимптотика резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 88–94.
6. *Цалюк З. Б.* Асимптотическая структура резольвенты неустойчивого уравнения Вольтерра с разностным ядром // Изв. вузов. Математика. 2000. № 4. С. 50–55.
7. *Цалюк З. Б.* Структура резольвенты системы уравнений восстановления с разностным ядром // Изв. вузов. Математика. 2001. № 6. С. 71–80.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Sgibnev M. S.* Submultiplicative moments of the supremum of a random walk with negative drift // Statist. Probab. Lett. 1997. V. 32. P. 337–383.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1967. Т. 2.
11. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. М.: Физматгиз, 1960.
12. *Сгибнев М. С.* Банаховы алгебры функций, обладающих одинаковым асимптотическим поведением на бесконечности // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 3. С. 179–187.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Статья поступила 20 декабря 2006 г., окончательный вариант — 28 марта 2007 г.

Сгибнев Михаил Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sgibnev@math.nsc.ru