Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.95

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЦЕЛОМ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов, Е. Н. Сейткулов

Аннотация. Получен критерий сильной разрешимости в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, сильное решение в целом.

1. Введение. Пусть H — сепарабельное действительное гильбертово пространство. Норму в H будем обозначать через $|\cdot|$, а скалярное произведение — через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть $C^\infty(H;0,a)$ — множество бесконечно гладких на $[0,a]$ $(a>0)$ функций со значениями в H. Пополнение множества $C^\infty(H;0,a)$ в метрике, определяемой скалярным произведением

$$\langle x,y\rangle_{H_2}=\int_0^a\langle x(t),y(t)\rangle\,dt,\quad x(t),y(t)\in C^\infty(H;0,a),$$

будем обозначать через $H_2=H_2[0,a]$.

Пусть A — самосопряженный неотрицательный оператор с вполне непрерывным обратным, а $D(A)$ — область определения оператора A. В пространстве функций со значениями в H рассмотрим задачу Коши

$$u'_t+Au+B(u,u)=f(t),\quad u(0)=0,\ 0<t<a,\tag{1}$$

где $B(u,g)$ — билинейный оператор, а $f(t)$ — функция со значениями в H.

Система уравнений Навье — Стокса может быть записана в виде (1), а известная проблема существования сильного решения в целом сводится к аналогичной проблеме для абстрактного уравнения (1).

В этой работе мы рассматриваем вопрос сильной разрешимости задачи (1) в целом, при этом предполагая, что A и $B(\cdot,\cdot)$ связаны некоторыми условиями подчиненности преобразования $B(\cdot,\cdot)$ оператору A. А именно, потребуем выполнения следующего условия:

$$|(A+E)^{-\gamma}B(u,g)|\le c[|(A+E)^{\gamma_0}u||(A+E)^{\gamma_0+1/2}g|+|(A+E)^{\gamma_0}g||(A+E)^{\gamma_0+1/2}u|]\tag{2}$$

для всех γ и γ_0, удовлетворяющих соотношениям

$$\gamma_0=\delta_0-\gamma/2,\quad -\infty<\gamma<3/4,\quad 0<\delta_0<1/2,\tag{3}$$

© 2008 Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н.

где δ_0 — постоянная, а c зависит от γ. Условия (2), (3) суть условия подчиненности нелинейного оператора $B(\cdot,\cdot)$ оператору A. Для трехмерной системы уравнений Навье — Стокса они выполняются при $\delta_0 = 3/8$. Условия подчиненности (2), (3) нами выбраны в соответствии с неравенствами, которым удовлетворяет нелинейный член в системе уравнений Навье — Стокса. На самом же деле их можно сильно разнообразить, в частности, потребовать выполнения условия (3) только для некоторых γ, а не для всех $\gamma \in (-\infty, 3/4)$.

Определение 1. Будем говорить, что *задача* (1) *сильно разрешима в целом*, если при любом $a > 0$ из условия $f(t) \in H_2[0,a]$ вытекает существование решения $u(t)$ задачи (1) в $(0,a)$ такого, что $u' + Au \in H_2[0,a]$.

Основным результатом работы является

Теорема A. *Пусть $A \geq E$, A^{-1} вполне непрерывен и выполнены условия* (2), (3). *Тогда задача* (1) *сильно разрешима в целом тогда и только тогда, когда решение $(w(t), s(t))$ системы уравнений*

$$
\begin{aligned}
-s'(t) + As(t) + B_w^* s(t) = 0, \quad s(a) = 0, \quad 0 < t < a,\\
w' + Aw(t) + B(w,w) = s(t), \quad w(0) = 0, \quad 0 < t < a,
\end{aligned} \tag{4}
$$

является только нуль-решением, т. е. $s(t) \equiv 0$ и $w(t) \equiv 0$.

Здесь B_w^* — оператор, сопряженный к B_w, а B_w определяется формулой $B_w g = B(w,g) + B(g,w)$. Эта теорема будет доказана в п. 3. Ниже поясним смысл слова «решение», употребляемое в этой теореме.

Определение 2. Пару $\{w_1, w_2\}$ бесконечно гладких вектор-функций со значениями в $D(A) \subseteq H$, удовлетворяющих условиям

а) $w_1 = 0$ в окрестности $t = 0$, а $w_2 = 0$ в окрестности $t = a$,

б) $Aw_j \in H_2[0,a]$ $(j = 1, 2)$,

назовем *пробной функцией*. Множество пробных функций обозначим через D_a.

Определение 3. Пару вектор-функций $(w(t), s(t))$ назовем *решением задачи* (4), если выполнены условия

в) при любом $\delta \in (0,a)$ имеют место соотношения

$$w(t), s(t) \in H_2[0,a], \quad w' + Aw \in H_2[0, a-\delta];$$

г) если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $B_w w_1 \in H_2[0,a]$, то справедливы равенства

$$\langle s, w_1' + Aw_1 + B_w w_1 \rangle_{H_2[0,a]} = 0;$$

$$\langle -w_2' + Aw_2 + (1/2) B_w^* w_2, w \rangle_{H_2[0,a]} - \langle w_2, s \rangle_{H_2[0,a]} = 0.$$

Таким образом, в теореме A речь идет об обобщенном решении.

Отметим, что уравнение для $s(t)$ обратно-параболическое и условие Коши задано на правом конце. Более того, оно линейное однородное. Поэтому если $w(t)$ в окрестности точки $t = a$ такова, что выражение $B_w^* s(t)$ подчиняется выражению $-s'(t) + As(t)$, то такая задача имеет только нуль-решение. Но так как в точке $t = a$ вектор-функция $w(t)$ может иметь особенности, то решение задачи для $s(t)$ возможно ненулевое. Поэтому теорема A не решает проблемы существования сильного решения в целом, а сводит ее к другой проблеме.

Из системы (4) можно исключить $s(t)$. Тогда из (4) для $w(t)$ получим двухточечную задачу

$$
\begin{gathered}
\left(-\frac{d^2}{dt^2} + A^2\right) w + \left(-\frac{d}{dt} + A\right) B(w,w) + B_w^* \left(\frac{d}{dt} w + Aw + B(w,w)\right) = 0,\\
(w' + Aw(t) + B(w,w))|_{t=a} = 0, \quad w(0) = 0.
\end{gathered} \tag{4'}
$$

Линейная часть (которая «кажется» главной частью) в этой задаче «эллиптична», но тем не менее нам не удалось доказать, что решением является только нуль-решение. Для системы уравнений Навье — Стокса верна слабая (энергетическая) оценка. Мы такой оценкой не пользуемся, и наши основные результаты верны и без наличия слабых априорных оценок. Поэтому наш главный результат сохраняет ценность, если даже кому-то удастся решить проблему существования сильного решения системы уравнений Навье — Стокса. Более того, теорема А допускает обобщения на довольно широкий класс параболических уравнений. Отметим, что существуют примеры, когда система (4) имеет нетривиальное обобщенное решение. Таким примером может послужить следующая система двух (скалярных) уравнений:

$$\begin{gathered} -s'(t)+s(t)+2w(t)s(t)=0, \quad w'+w(t)+w^2(t)-s(t)=0, \\ w(0)=0, \quad s(1)=0, \quad 0<t<1. \end{gathered} \tag{4''}$$

Краткое содержание этой работы изложено в [1] (где условие г) определения 3 следует заменить условием г) определения 3 настоящей работы). Полученные в этой статье результаты можно применить к системе уравнений Навье — Стокса, а также к уравнению магнитной газовой динамики. Такие применения будут изложены в одной из следующих работ.

2. Оценки решений одного нелинейного параболического уравнения в гильбертовом пространстве. Положим

$$T(\lambda)g=\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-\xi)}g(\xi)\,d\xi,$$

где E — единичный оператор, а $\exp(-A-\lambda E)(t-\xi)$ понимается в смысле спектрального разложения.

Помимо $T(\lambda)$ введем оператор $T(\lambda,\alpha)$, действующий по формуле

$$T(\lambda,\alpha)v=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}(t-\xi)^{\alpha-1}v(\xi)\,d\xi, \tag{5}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция, $\alpha>0$.

Лемма 1. *Если $\alpha,\beta>0$, то $T(\lambda,\alpha)T(\lambda,\beta)=T(\lambda,\alpha+\beta)$, $T(\lambda,1)=T(\lambda)$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} T(\lambda,\alpha)T(\lambda,\beta)v &= (\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))^{-1}\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}(t-\xi)^{\alpha-1} \\ &\qquad\times\left(\int\limits_0^{\xi} e^{-(A+\lambda)(\xi-\eta)}(\xi-\eta)^{\beta-1}v(\eta)d\eta\right)d\xi \\ &= (\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta))^{-1}\int\limits_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\eta)}v(\eta)\left(\int\limits_{\eta}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1}\,d\xi\right)d\eta, \end{aligned}$$

но

$$\int\limits_{\eta}^{t}(t-\xi)^{\alpha-1}(\xi-\eta)^{\beta-1}\,d\xi=\int\limits_{0}^{t-\eta}(t-\eta-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}\,d\tau$$

$$=\int\limits_{0}^{t-\eta}(t-\eta)^{\alpha-1}\left(1-\frac{\tau}{t-\eta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\tau}{t-\eta}\right)^{\beta-1}(t-\eta)^{\beta}\;d\left(\frac{\tau}{t-\eta}\right)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-\eta)^{\alpha+\beta-1},$$

поэтому

$$T(\lambda,\alpha)T(\lambda,\beta)v=T(\lambda,\alpha+\beta)v.$$

Так как $\Gamma(1)=1$, получаем $T(\lambda,1)=T(\lambda)$. Лемма доказана.

Отметим, что в силу доказанной леммы вместо $T(\lambda,\alpha)$ можно писать

$$T(\lambda,\alpha)=T^{\alpha}(\lambda)$$

и понимать $T(\lambda,\alpha)$ как дробные степени оператора $T(\lambda)$. При $\alpha=0$ в качестве $T^{\alpha}(\lambda)$ можно взять E, так как при $\alpha\to 0$ сильным пределом семейства $T^{\alpha}(\lambda)$ будет именно E.

Из леммы 1 получаем равенство $(0\le\alpha\le 1)$

$$T(\lambda)=(A+\lambda E)^{b}T^{\alpha}(\lambda)(A+\lambda E)^{-b}T^{1-\alpha}(\lambda).$$

Далее, обозначим

$$T(\lambda,\alpha,b)=(A+\lambda E)^{b}T^{\alpha}(\lambda). \tag{6}$$

Лемма 2. *При* $0\le\alpha\le 1$, $\gamma-\theta+b\ge 0$, $\alpha+\theta-\gamma-b>1/2$, $\lambda\ge 1$ *верна оценка*

$$\int\limits_{0}^{a}|(A+\lambda)^{\gamma+1/2}T(\lambda,\alpha,b)v|^{2}\,dt<C\int\limits_{0}^{a}|(A+\lambda)^{\theta}v|^{2}\,dt,$$

где $T(\lambda,\alpha,b)$ *из* (6).

Доказательство. Имеем

$$M\equiv\int\limits_{0}^{a}|(A+\lambda)^{\gamma+1/2}T(\lambda,\alpha,b)v|^{2}\,dt$$

$$=\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int\limits_{0}^{a}\left|\int\limits_{0}^{t}(A+\lambda)^{\gamma+b+1/2}(t-\xi)^{\alpha-1}e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}v(\xi)\,d\xi\right|^{2}dt$$

$$=C\int\limits_{0}^{a}\Bigg|\int\limits_{0}^{t}(A+\lambda)^{\gamma+b-\theta+1/2}(t-\xi)^{\gamma+b-\theta+1/2}e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}$$

$$\times(t-\xi)^{\alpha+\theta-\gamma-b-1/2-1}(A+\lambda)^{\theta}v(\xi)\,d\xi\Bigg|^{2}dt.$$

Здесь и в дальнейшем C — постоянная (вообще говоря, разная в разных местах), точное значение которой неважно. Далее, при $\gamma+b-\theta+1/2\geq 0$ имеем

$$\|(A+\lambda)^{\gamma+b-\theta+1/2}(t-\xi)^{\gamma+b-\theta+1/2}e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}\|\leq \sup_{x\geq 0}x^{\gamma+b-\theta+1/2}e^{-x}<\infty,$$

где $\|\cdot\|$ — норма оператора. Это неравенство является следствием спектрального разложения. Отсюда

$$M\leq C\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^t(t-\xi)^{\alpha+\theta-\gamma-b-\frac{3}{2}}|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|\,d\xi\right)^2 dt.$$

Вне отрезка $[0,a]$ функцию $|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|$ продолжим нулем. Тогда из последнего неравенства вытекает

$$M\leq C\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t-\xi|^{\alpha+\theta-\gamma-b-\frac{3}{2}}e^{-\delta|t-\xi|}\chi_a(\xi)|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|\,d\xi\right)^2 dt,$$

где $\chi_a(\xi)$ — характеристическая функция отрезка $[0,a]$, а C и $\delta>0$ — постоянные.

Пользуясь оценками операторов, инвариантных относительно сдвига (см. [2]), получаем

$$M\leq C\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{\alpha+\theta-\gamma-b-\frac{3}{2}}e^{-\delta|\xi|}d\xi\right]^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\chi_a(\xi)|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|^2\,d\xi$$
$$=C\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{\alpha+\theta-\gamma-b-\frac{3}{2}}e^{-\delta|\xi|}d\xi\right]^2\int\limits_0^a|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|^2\,d\xi.$$

Так как $\alpha+\theta-\gamma-b>1/2$, лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $0\leq\alpha\leq 1$, $\gamma+b-\theta\geq 0$, $\alpha-\gamma-b+\theta>1/2$, $\lambda\geq 1$. *Тогда*

$$\sup_{0<t<a}|(A+\lambda)^\gamma T(\lambda,\alpha,b)v(t)|^2\leq C\int\limits_0^a|(A+\lambda)^\theta v(t)|^2\,dt.$$

Доказательство. Имеем

$$|(A+\lambda)^\gamma T(\lambda,\alpha,b)v|^2(t)$$
$$=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\left|\int\limits_0^t(A+\lambda)^{\gamma+b-\theta}(t-\xi)^{\gamma+b-\theta}e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}(t-\xi)^{\alpha-1-\gamma-b+\theta}(A+\lambda)^\theta v(\xi)\,d\xi\right|^2$$
$$\leq C\left(\int\limits_0^t|(t-\xi)^{\alpha-1-\gamma-b+\theta}(A+\lambda)^\theta v(\xi)|\,d\xi\right)^2\leq C\int\limits_0^t|(A+\lambda)^\theta v(\xi)|^2\,d\xi.$$

При переходе использовали неравенство Коши. Отсюда ввиду произвольности $t\in(0,a)$ получаем результат леммы.

Введем норму

$$|v|^2_{\gamma,\lambda}=\sup_{0<t<a}|(A+\lambda)^\gamma v(t)|^2+\int\limits_0^a|(A+\lambda)^{\gamma+1/2}v(t)|^2\,dt.$$

Из лемм 2 и 3 вытекает

Следствие 1. *Если* $0 \le \alpha \le 1$, $\gamma + b - \theta \ge 0$, $\alpha - \gamma - b + \theta > 1/2$, $\lambda \ge 1$, *то*

$$|T(\lambda,\alpha,b)v|^2_{\gamma,\lambda} \le C \int\limits_0^a |(A+\lambda)^\theta v|^2\,dt.$$

Доказательство. В определении нормы $|\cdot|_{\gamma,\lambda}$ к первому члену применим лемму 3, а ко второму — лемму 2.

Лемма 4. *Пусть* $0 \le \alpha \le 1$, $\gamma + b - \theta \ge 0$, $\alpha - \gamma - b + \theta > 1/2$, $\lambda \ge 1$. *Тогда если* $\varepsilon > 0$, *то*

$$|T(\lambda,\alpha,b)v|^2_{\gamma-\varepsilon,\lambda} \le C\lambda^{-2\varepsilon} \int\limits_0^a |(A+\lambda)^\theta v(t)|^2\,dt.$$

Доказательство. Используя следствие 1, имеем

$$|T(\lambda,\alpha,b)v|^2_{\gamma-\varepsilon,\lambda} \le \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{2\varepsilon} |T(\lambda,\alpha,b)v|^2_{\gamma,\lambda} \le C\lambda^{-2\varepsilon} \int\limits_0^a |(A+\lambda)^\theta v(t)|^2\,dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$|T(\lambda)v|^2_{l,\lambda} \le 2 \int\limits_0^a |(A+\lambda)^{l-\frac{1}{2}} v|^2\,dt,$$

где $l \in \mathbb{R}$, $\lambda \ge 0$.

Доказательство. Имеем $(Tv)' + (A+\lambda)Tv = v$, $Tv|_{t=0} = 0$, где $T = T(\lambda)$. Умножим это уравнение на $(A+\lambda)^{2l}Tv$ скалярно и проинтегрируем от 0 до t. Тогда получим

$$\frac{1}{2}|(A+\lambda)^l Tv|^2(t) + \int\limits_0^t |(A+\lambda)^{l+1/2}Tv|^2\,dt = \int\limits_0^t \langle (A+\lambda)^{l-1/2}v, (A+\lambda)^{l+1/2}Tv\rangle\,dt$$

$$\le 1/2 \int\limits_0^t |(A+\lambda)^{l-1/2}v|^2\,dt + 1/2 \int\limits_0^t |(A+\lambda)^{l+1/2}Tv|^2\,dt.$$

Отсюда легко вытекает утверждение леммы.

Лемма 6. *Пусть* $b \ge 0$, $\alpha - b > -1$ *и* $\lambda \ge 1$. *Тогда оператор* $T(\lambda, \alpha+1, b)$ *вполне непрерывен из* $H_2[0,a]$ *в* $H_2[0,a]$.

Доказательство. Пусть $v(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$, где $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов самосопряженного оператора $A \ge 0$, соответствующих собственным числам $\{\lambda_n\}$. Последние занумерованы в порядке неубывания, и так как резольвента оператора A вполне непрерывна, то $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$.

При $\lambda \ge 1$ имеем

$$T(\lambda,\alpha+1,b)v = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\lambda_n+\lambda)^b \int\limits_0^t (t-\xi)^\alpha e^{-(\lambda_n+\lambda)(t-\xi)} \langle v(\xi), \varphi_n)\rangle\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=1}^{N} \varphi_n (\lambda_n + \lambda)^b \int_0^t (t-\xi)^\alpha e^{-(\lambda_n+\lambda)(t-\xi)} \langle v(\xi), \varphi_n \rangle\rangle \, d\xi$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \varphi_n (\lambda_n+\lambda)^b \int_0^t (t-\xi)^\alpha e^{-(\lambda_n+\lambda)(t-\xi)} \langle v(\xi), \varphi_n \rangle\rangle \, d\xi = S_N v + M_N v,$$

т. е. $T(\lambda, \alpha, b) = S_N + M_N$.

Оператор S_N есть конечная сумма компактных операторов, так как их ядра имеют слабую особенность. Поэтому достаточно доказать, что при $N \to \infty$

$$\|M_N\| \to 0. \tag{7}$$

Но

$$\int_0^a |M_N v|^2(t) \, dt = C \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^a (\lambda_n + \lambda)^{2b} \left| \int_0^t (t-\xi)^\alpha e^{-(\lambda_n+\lambda)(t-\xi)} \langle v(\xi), \varphi_n \rangle\rangle \, d\xi \right|^2 dt$$

$$\leq C \int_0^a \frac{1}{(\lambda_N + \lambda)^{2\varepsilon}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\int_0^t (\lambda_n + \lambda)^{b+\varepsilon} (t-\xi)^{b+\varepsilon} \right.$$

$$\left. \times e^{-(\lambda_n+\lambda)(t-\xi)} \langle v(\xi), \varphi_n \rangle (t-\xi)^{\alpha-b-\varepsilon} \, d\xi \right)^2 dt.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\alpha - b - \varepsilon > -1$. Это можно сделать, ибо $\alpha - b > -1$. Воспользуемся известным неравенством

$$\sup_{x>0} x^{b+\varepsilon} e^{-x} < \infty,$$

справедливым при $b + \varepsilon > 0$. Получаем

$$\int_0^a |M_N v|^2 dt \leq \frac{C}{(\lambda_N + \lambda)^{2\varepsilon}} \int_0^a \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\int_0^t |\langle v(\xi), \varphi_n \rangle| (t-\xi)^{\alpha-b-\varepsilon} d\xi \right)^2 dt.$$

Теперь воспользуемся приемом, использованным при доказательстве леммы 2. Тогда

$$\int_0^a |M_N v|^2 \, dt \leq \frac{C}{(\lambda_N + \lambda)^{2\varepsilon}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_0^a |\langle v(\xi), \varphi_n \rangle|^2 \, d\xi \leq \frac{C}{(\lambda_N + \lambda)^{2\varepsilon}} \int_0^a |v(\xi)|^2 \, d\xi.$$

В силу произвольности $v \in H_2[0, a]$, поскольку $\lambda_N \to +\infty$, а $\varepsilon > 0$, приходим к соотношению (7). Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть* $0 \leq \alpha \leq 1$, $\gamma + b - \theta \geq 0$, $\alpha - \gamma - b + \theta > 1/2$, $\lambda \geq 1$, $0 < -\theta - \varepsilon < 3/4$, $\varepsilon \geq 0$. *Тогда*

$$|T(\lambda, \alpha, b) B(u, v)|^2_{\gamma,\lambda} \leq C \lambda^{-2\varepsilon} |u|^2_{\frac{3}{8} + \frac{\theta+\varepsilon}{2}, 1} |v|^2_{\frac{3}{8} + \frac{\theta+\varepsilon}{2}, 1},$$

где C не зависит от $\varepsilon \geq 0$ и $\lambda \geq 1$.

Доказательство. Согласно следствию 1

$$|T(\lambda, \alpha, b) B(u, v)|^2_{\gamma,\lambda} \leq C \int_0^a |(A+\lambda)^\theta B(u, v)|^2 \, dt \leq C \lambda^{-2\varepsilon} \int_0^a |(A+\lambda)^{\theta+\varepsilon} B(u, v)|^2 \, dt.$$

Теперь используем условия (2), (3):

$$|T(\lambda,\alpha,b)B(u,v)|^2_{\gamma,\lambda} \le C\lambda^{-2\varepsilon}\int\limits_0^a |(A+E)^{\frac{3}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2}}u|^2|(A+E)^{\frac{7}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2}}v|^2(t)$$

$$+|(A+E)^{\frac{3}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2}}v|^2|(A+E)^{\frac{7}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2}}u|^2(t)\,dt \le C\lambda^{-2\varepsilon}|u|^2_{\frac{3}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2},1}|v|^2_{\frac{3}{8}+\frac{\theta+\varepsilon}{2},1}.$$

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $\gamma \ge -1/4$. Тогда*

$$|T(\lambda)B(u,v)|^2_{\gamma,1} \le C|u|^2_{\gamma_0,1}|v|^2_{\gamma_0,1}, \quad \gamma_0 = 1/8+\gamma/2.$$

Доказательство. Используем лемму 5 и затем условия (2), (3):

$$|T(\lambda)B(u,v)|^2_{\gamma,1} \le 2\int\limits_0^a |(A+E)^{\gamma-1/2}B(u,v)|^2\,dt$$

$$\le C\int\limits_0^a |(A+E)^{\gamma_0}u|^2(t)|(A+E)^{\gamma_0+1/2}v|^2(t)+|(A+E)^{\gamma_0}v|^2(t)|(A+E)^{\gamma_0+1/2}u|^2(t)\,dt.$$

Отсюда вытекает результат леммы.

Лемма 9. *Пусть $f(t) \in H_2[0,a]$ и решение $u(t)$ задачи (1) удовлетворяет условию $|u|^2_{\gamma,1} = C < \infty$ при некотором $\gamma > 1/4$. Тогда $u' + Au \in H_2[0,a]$.*

Доказательство. Решение задачи (1) обозначим через u_0. Оно будет решением линейного уравнения

$$u'_t + Au + B(u_0,u) = f(t), \quad u(0) = 0, \quad 0 < t < a.$$

Обозначим $u(t) = e^{\lambda t}v(t)$ $(\lambda > 0)$, тогда получим

$$v'_t + (A+\lambda)v + B(u_0,v) = e^{-\lambda t}f(t), \quad v(0) = 0.$$

Отсюда и из условий (2), (3) выводим, что

$$\int\limits_0^a |v'_t+(A+\lambda)v|^2\,dt \le 2\int\limits_0^a |f|^2(t)\,dt + 2\int\limits_0^a |B(u_0,v)|^2\,dt$$

$$\le C+C\int\limits_0^a |(A+E)^{\tilde\gamma}u_0|^2(t)|(A+E)^{\tilde\gamma+1/2}v|^2+|(A+E)^{\tilde\gamma}v|^2(t)|(A+E)^{\tilde\gamma+1/2}u_0|^2\,dt,$$

где $3/8 > \tilde\gamma > 1/4$, $\tilde\gamma < \gamma$. Такой выбор $\tilde\gamma$ в силу $\gamma > 1/4$ возможен. Поэтому, используя условие леммы и выбирая $\lambda \ge 1$, находим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^a |g|^2dt \equiv \int\limits_0^a |v'_t+(A+\lambda)v|^2\,dt \le C+C\int\limits_0^a |(A+E)^{1-\varepsilon}v|^2\,dt+C\sup_{0<t<a}|(A+E)^{1/2-\varepsilon}v|^2$$

$$\le C+\frac{C}{\lambda^\varepsilon}\int\limits_0^a |(A+\lambda)^{1-\varepsilon/2}v|^2\,dt+\frac{C}{\lambda^\varepsilon}\sup_{0<t<a}|(A+\lambda)^{1/2-\varepsilon/2}v|^2,$$

где через g обозначено выражение $v'+(A+\lambda)v$. Тогда $v'+(A+\lambda)v=g$, $v(0)=0$. Умножим это уравнение скалярно на $(A+\lambda)^{1-\varepsilon}v$ и проинтегрируем от 0 до t. Имеем

$$\frac{|(A+\lambda)^{\frac{1-\varepsilon}{2}}v|^2}{2}+\int_0^t |(A+\lambda)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}v|^2\,dt=\int_0^t \langle g,(A+\lambda)^{1-\varepsilon}v\rangle\,dt$$

$$\le\sqrt{\int_0^t |g|^2\,dt}\sqrt{\int_0^t |(A+\lambda)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}v|^2dt}\le\frac{1}{2}\int_0^t |g|^2\,dt+\frac{1}{2}\int_0^t |(A+\lambda)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}v|^2\,dt.$$

Из этого и предыдущих неравенств, если выберем λ достаточно большим ($\lambda^{-\varepsilon}C < 1/2$), вытекает, что $v'+(A+\lambda)v\in H_2[0,a]$. Отсюда, переходя от v к u, получаем утверждение леммы.

3. Условие существования гладкого решения и свойства разделяющей функции.

Определение 4. Функция $f(t)\in H_2[0,a]$, $|f|_{H_2}\neq 0$, называется *разделяющей функцией задачи* (1), если выполнены условия

(a) решение $u(t)$ задачи (1) в $(0,a)$ существует и $u'+Au\in H_2[0,a-\varepsilon]$ при любом $\varepsilon\in(0,a)$, но $u'+Au\notin H_2[0,a]$;

(b) если $g(t)\in H_2[0,a]$ и $|g|_{H_2}<|f|_{H_2}$, то решение задачи

$$v'(t)+Av+B(v,v)=g(t),\quad v(0)=0,\quad 0<t<a,$$

существует и $v'(t)+Av\in H_2[0,a]$.

Теорема 1. *Если существует $f(\cdot)\in H_2[0,a]$ такая, что задача* (1) *не имеет решения, удовлетворяющего условию $u'+Au\in H_2[0,a]$, то для задачи* (1) *существует разделяющая функция.*

Лемма 10. *Существует число $\varepsilon>0$ такое, что если $|f|^2_{H_2[0,a]}\le\varepsilon$, то задача* (1) *имеет решение $u(t)$, для которого $u'+Au\in H_2[0,a]$.*

Доказательство. Эта лемма для уравнений Навье — Стокса хорошо известна (см. [3, с. 203, теоремы 8 и 9]). Тем не менее мы приведем ее полное доказательство, так как известные авторам доказательства абстрактных лемм типа нашей леммы 10 используют различные условия (на $f(\cdot)$ и на нелинейность).

Обозначим $v=e^{-\lambda t}u$, $\lambda\ge 1$. Тогда для v получаем

$$v'_t+Av+\lambda v+e^{\lambda t}B(v,v)-e^{-\lambda t}f(t)=0,\quad v(0)=0.$$

Отсюда

$$v=-T(\lambda)B(v,v)e^{\lambda t}+T(\lambda)e^{-\lambda t}f(t)$$

$$=\int_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)}(-B(v(\xi),v(\xi))e^{\lambda\xi}+e^{-\lambda\xi}f(\xi))\,d\xi=R(v).$$

Далее,

$$R(v_1)-R(v_2)=\int_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)+\lambda\xi}[-B(v_1,v_1)+B(v_2,v_2)]\,d\xi$$

$$=\int_0^t e^{-(A+\lambda)(t-\xi)+\lambda\xi}[B(v_1,v_2-v_1)+B(v_2-v_1,v_2)]\,d\xi.$$

Теперь по лемме 8

$$|R(v_1) - R(v_2)|_{\theta-\frac{1}{2},1} \le C(|v_1|_{\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8},1} + |v_2|_{\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8},1})(|v_1 - v_2|_{\frac{\theta}{2}-\frac{1}{8},1}).$$

Берем $\theta = 1$. Тогда $1/2 = \theta - 1/2 > \theta/2 - 1/8 = 3/8$ и

$$|R(v_1) - R(v_2)|_{\frac{3}{8},1} \le |R(v_1) - R(v_2)|_{\frac{1}{2},1} \le C[|v_1|_{\frac{3}{8},1} + |v_2|_{\frac{3}{8},1}]|v_1 - v_2|_{\frac{3}{8},1}.$$

Отсюда следует, что в пространстве с нормой $|\cdot|_{\frac{3}{8},1}$ оператор R — сжатие, если v_1 и v_2 малы в этой норме.

По лемме 5

$$|T(\lambda)e^{-\lambda t}f(t)|^2_{\frac{3}{8},1} \le 2\int\limits_0^a |(A+E)^{-1/8}f|^2\,dt \le 2\varepsilon.$$

Поэтому уравнение $v = R(v)$ имеет решение v с ограниченной нормой $|v|_{\frac{3}{8},1}$. Возвращаясь от v к u, получаем, что $|u|_{\frac{3}{8},1}$ ограничена. Но тогда из леммы 9 вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через r^* верхнюю грань всех тех чисел r таких, что если $|f|^2_{H_2} < r$, то задача (1) имеет решение $u(t)$ такое, что $u' + Au \in H_2[0,a]$.

Пусть существует $f \in H_2[0,a]$ такая, что задача (1) не имеет решения, для которого $u' + Au \in H_2[0,a]$, т. е.

$$\int\limits_0^{a-\delta} |u' + Au|^2\,dt = \infty$$

при некотором $0 \le \delta < a$. Отсюда и из леммы 10 следует, что r^* существует и $0 < r^* < \infty$.

Из определения r^* вытекает, что найдутся функции $f_n \in H_2[0,a]$ и числа $0 \le \delta_n < a$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\int\limits_0^a |f_n|^2(t)\,dt \ge r^*, \quad \int\limits_0^a |f_n|^2(t)\,dt \to r^*$$

при $n \to \infty$,

$$\int\limits_0^{a-\delta_n} |u_n' + Au_n|^2\,dt = \infty, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\int\limits_0^{a-\delta_n-\varepsilon} |u_n' + Au_n|^2\,dt < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0,\ a - \delta_n - \varepsilon > 0,$$

где $u_n(t)$ — решение на $(0, a-\delta_n)$ задачи (1).

Используя сдвиг начала времени отсчета (при каждом n), можно считать, что $\delta_n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Последовательность $\{f_n\}$ имеет слабо сходящуюся к некоторому $\tilde f$ подпоследовательность; ее также обозначим через $\{f_n\}$. Итак,

$$u_n' + Au_n + B(u_n, u_n) = f_n \xrightarrow{H_2} \tilde f \in H_2[0,a], \quad n \to \infty, \quad u_n|_{t=0} = 0, \tag{8}$$

$$\int_0^{a-\varepsilon} |u_n' + Au_n|^2\,dt < \infty \quad \text{при любом } 0 < \varepsilon < a,$$

$$\int_0^{a} |u_n' + Au_n|^2\,dt = \infty, \quad |f_n|^2_{H_2[0,a]} \to r^*.$$

Для $\tilde f$ из (8) возможны два случая.

Случай 1. Решение задачи (1) с $f = \tilde f \in H_2[0,a]$ удовлетворяет условию $u' + Au \in H_2[0,a]$.

Случай 2. Существует $\varepsilon \geq 0$ такое, что для решения задачи (1) с $f = \tilde f \in H_2[0,a]$ выполнено

$$\int_0^{a-\varepsilon} |u' + Au|^2\,dt = \infty.$$

Исключим первый случай.

Лемма 11. *Если f_n слабо сходится к $\tilde f$ ($f_n \rightharpoonup \tilde f$) в $H_2[0,a]$ и решение $\tilde u(t)$ задачи (1) с $f = \tilde f$ удовлетворяет условию $\tilde u' + A\tilde u \in H_2[0,a]$, то найдется n (достаточно большое) такое, что решение u_n задачи (1), в котором $f = f_n$, также удовлетворяет условию $u_n' + Au_n \in H_2[0,a]$.*

Доказательство. Пусть $\tilde u$ — решение задачи (1) при $f = \tilde f$. По предположению $\tilde u' + A\tilde u \in H_2[0,a]$. Для разности $\tilde u - u_n \equiv \omega_n$ получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_n' + A\omega_n + B(\tilde u, \tilde u) - B(u_n, u_n) + f_n - \tilde f \\ &= \omega_n' + A\omega_n + B(\tilde u, \tilde u) - B(\tilde u - \omega_n, \tilde u - \omega_n) + f_n - \tilde f \\ &= \omega_n' + A\omega_n + B(\tilde u, \omega_n) + B(\omega_n, \tilde u) - B(\omega_n, \omega_n) + f_n - \tilde f, \quad \omega_n|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим $\omega_n = e^{\lambda t} y_n$. Имеем

$$y_n' + Ay_n + \lambda y_n E + B(\tilde u, y_n) + B(y_n, \tilde u) - e^{\lambda t} B(y_n, y_n) = (\tilde f - f_n)e^{-\lambda t} \equiv g_n,\ y_n|_{t=0} = 0.$$

Перейдем к интегральной записи и используем лемму 1:

$$\begin{aligned} y_n(t) &= -T(\lambda)[B(\tilde u, y_n) + B(y_n, \tilde u) - e^{\lambda t} B(y_n, y_n)] + T(\lambda) g_n \\ &= -T(\lambda)[B(\tilde u, y_n) + B(y_n, \tilde u) - e^{\lambda t} B(y_n, y_n)] + T(\lambda, \alpha, b)[T(\lambda, 1-\alpha, -b) g_n], \end{aligned} \tag{9}$$

где $0 < \alpha < 1$. Возьмем $-\alpha + b > -1$, $b \leq 0$. Тогда по лемме 6 оператор $T(\lambda, 1-\alpha, -b)$ вполне непрерывен в $H_2[0,a]$. Поэтому, так как $g_n = (\tilde f - f_n)e^{-\lambda t} \rightharpoonup 0$ в $H_2[0,a]$, из (9) получаем

$$\begin{gathered} y_n = -T(\lambda)[B(\tilde u, y_n) + B(y_n, \tilde u) - e^{\lambda t} B(y_n, y_n)] + T(\lambda, \alpha, b) d_n, \\ |d_n|_{H_2[0,a]} \to 0, \quad 0 < \alpha < 1,\ -\alpha + b > -1,\ b \leq 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $d_n = T(\lambda, 1-\alpha, -b) g_n$. Теперь из следствия 1 будем иметь

$$|T(\lambda, \alpha, b) d_n|^2_{\gamma,\lambda} \leq C |d_n|^2_{H_2[0,a]} \to 0$$

при $\theta = 0$, $\lambda \geq 1$, $\gamma + b \geq 0$, $\alpha - b - \gamma > 1/2$, $-\alpha + b + 1 > 0$, $b \leq 0$, $\alpha \in (0,1)$ и $n \to \infty$. (Такие условия выполняются, например, если $\gamma = 1/4 + \delta$, $b = -\delta/2$, $\alpha = 3/4 + \delta$, где $\delta > 0$ мало.)

Уравнение (10) рассмотрим в пространстве с нормой $|\cdot|_{\gamma,\lambda}$:

$$\begin{gathered} y_n = -T(\lambda)[B(\tilde{u}, y_n) + B(y_n, \tilde{u}) - e^{\lambda t} B(y_n, y_n)] + r_n \equiv R_\lambda(y_n), \\ |r_n|_{\gamma,\lambda} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \text{ где } r_n = T(\lambda, \alpha, b) d_n. \end{gathered} \tag{11}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |R_\lambda(y) - R_\lambda(g)|^2_{\gamma,\lambda} = |&-T(\lambda)(B(\tilde{u}, y-g) + B(y-g, \tilde{u})) \\ &+ T(\lambda)(e^{\lambda t}(B(y-g, y) + B(g, y-g)))|^2_{\gamma,\lambda} \le 2|T(\lambda)(B(\tilde{u}, y-g) \\ &+ B(y-g, \tilde{u}))|^2_{\gamma,\lambda} + 2|T(\lambda)(e^{\lambda t}B(y-g, y) + e^{\lambda t}B(g, y-g))|^2_{\gamma,\lambda} \\ &\le 2\lambda^{-2\varepsilon}|T(\lambda)(B(\tilde{u}, y-g) + B(y-g, \tilde{u}))|^2_{\gamma+\varepsilon,\lambda} \\ &+ 2e^{2a\lambda}|T(\lambda)(B(y-g, y) + B(g, y-g))|^2_{\gamma,\lambda}. \end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 7 (беря $\alpha = 1$, $b = 0$, $\theta = \gamma - 1/2 + 2\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ малое):

$$\begin{aligned} |R_\lambda(y) - R_\lambda(g)|^2_{\gamma,\lambda} \le C\lambda^{-2\varepsilon}\big(|\tilde{u}|^2_{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3\varepsilon}{2},1}|y-g|^2_{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3\varepsilon}{2},1}\big) \\ + Ce^{2\lambda a}\big(|y-g|^2_{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3\varepsilon}{2},1}\big(|y|^2_{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3\varepsilon}{2},1} + |g|^2_{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{8}+\frac{3\varepsilon}{2},1}\big)\big). \end{aligned}$$

Если $3/8 > \gamma > 1/4$, то можно ε брать таким малым, чтобы $\gamma/2 + 1/8 + 3\varepsilon/2 < \gamma$, поэтому

$$|R_\lambda(y) - R_\lambda(g)|^2_{\gamma,\lambda} \le C\lambda^{-2\varepsilon}\left(|\tilde{u}|^2_{\gamma,1}|y-g|^2_{\gamma,1}\right) + Ce^{2\lambda a}\big(|y-g|^2_{\gamma,1}\big(|y|^2_{\gamma,1} + |g|^2_{\gamma,1}\big)\big).$$

Величина $|\tilde{u}|^2_{\gamma,1}$ ограничена, тем самым, выбрав предварительно λ большим, а затем радиус шара, из которого берется y и g, малым, получаем, что $R_\lambda(g)$ — сжатие. Но тогда уравнение (11) при больших n имеет решение с малой нормой $|\cdot|_{\gamma,1}$. Возвращаясь от y_n к $w_n = \tilde{u} - u_n$, получаем, что $|\tilde{u} - u_n|_{\gamma,1} < \infty$ при больших n. Так как $|\tilde{u}|_{\gamma,1} < \infty$, выводим, что $|u_n|_{\gamma,1} < \infty$. Поэтому для u_n выполнены условия леммы 9. Следовательно, $u_n' + Au_n \in H_2[0, a]$. Лемма доказана.

Из леммы 11 вытекает, что случай 1 не может иметь места. Таким образом, имеет место случай 2. Из (8) и известных свойств слабого предела следует, что $|\tilde{f}(t)|_{H_2[0,a]} \le r^*$. Поэтому если $|g(t)|_{H_2[0,a]} < |\tilde{f}(t)|_{H_2[0,a]}$, то $|g(t)|_{H_2[0,a]} < r^*$. Отсюда и из определения r^* вытекает, что $v' + Av \in H_2[0, a]$, где $v(t)$ — решение задачи

$$v_t' + Av + B(v, v) = g(t), \quad v(0) = 0, \quad 0 < t < a.$$

Следовательно, $\tilde{f}$ — разделяющая функция. Теорема 1 доказана.

Приведем некоторые свойства разделяющей функции задачи (1). Сразу заметим, что в неравенстве $|\tilde{f}(t)|_{H_2[0,a]} \le r^*$ достигается равенство, в противном случае из определения числа r^* вытекало бы условие $u' + Au \in H_2[0, a]$, где $u(t)$ — решение задачи (1) при $f = \tilde{f}$. Но это, так как имеет место только случай 2, невозможно, поэтому $|\tilde{f}(t)|_{H_2[0,a]} = r^* > 0$.

Теорема 2. *Пусть $s(t)$ — разделяющая функция ($|s|_{H_2[0,a]} > 0$), а $w(t)$ — решение задачи* (1) *при $f = s(t)$. Тогда пара $(w(t), s(t))$ удовлетворяет системе уравнений* (4) (*см. введение*).

Доказательство. Напомним, что слово «решение» понимаем в смысле определения 3. Итак, пусть $w(t)$ — решение задачи (1), в котором $f = s(t)$ — разделяющая функция и (w_1, w_2) — произвольная пара из D_a и $B_w w_1 \in H_2[0, a]$

(где D_a из определения 2). Для $v = w(t) + \varepsilon w_1$ имеем

$$\int\limits_0^a |v' + Av + B(v,v)|^2\,dt = \int\limits_0^a |s(t) + \varepsilon(w_1' + Aw_1 + B_w w_1) + \varepsilon^2 B(w_1,w_1)|^2\,dt$$
$$= \int\limits_0^a (|s(t)|^2 + 2\varepsilon\langle s, w_1' + Aw_1 + B_w w_1\rangle)\,dt + \varepsilon^2 O(1).$$

Отсюда следует, что множитель при первой степени ε должен обратиться в нуль, в противном случае, подбирая ε малым, мы можем добиться выполнения неравенства $|v' + Av + B(v,v)|_{H_2[0,a]} < |s(t)|_{H_2[0,a]}$, но тогда из определения разделяющей функции вытекает, что $v' + Av \in H_2[0,a]$.

Отсюда, так как w_1 бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условию (б) из определения 2, получаем, что $w' + Aw \in H_2[0,a]$. Это противоречит тому, что $s(t)$ — разделяющая функция. Таким образом, выполняется равенство

$$\langle s(t), w_1' + Aw_1 + B_w w_1\rangle_{H_2[0,a]} = 0.$$

Далее, так как $w' + Aw + B(w,w) = s(t)$, имеем

$$0 = \langle w' + Aw + B(w,w) - s, w_2\rangle_{H_2} = \langle -w_2' + Aw_2, w\rangle_{H_2} + \langle B(w,w) - s, w_2\rangle_{H_2}$$
$$= \langle -w_2' + Aw_2, w\rangle_{H_2} + \frac{1}{2}\langle B_w w, w_2\rangle_{H_2} - \langle w_2, s\rangle_{H_2}$$
$$= \langle -w_2' + Aw_2, w\rangle_{H_2} + \frac{1}{2}\langle w, B_w^* w_2\rangle_{H_2} - \langle w_2, s\rangle_{H_2}$$
$$= \left\langle -w_2' + Aw_2 + \frac{1}{2}B_w^* w_2, w\right\rangle_{H_2} - \langle w_2, s\rangle_{H_2}.$$

Здесь $H_2 = H_2[0,a]$. Таким образом, $(w, s(t))$ — решение системы (4). Теорема доказана.

Можно доказать, что для разделяющей функции выполняется условие $s' - As \in H_2[0, a-\delta]$ при любом $0 < \delta < a$.

Теорема 3. *Пусть $f(t)$ — разделяющая функция задачи* (1) *и $w(t)$ — решение задачи* (1) *в* $(0,a)$*. Тогда*

$$(|w_t'|^2 - |Aw + B(w,w)|^2)_t' = 0$$

при $0 < t < a$.

Доказательство. Умножим первое уравнение (4) скалярно на $w'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t. После несложных вычислений получим равенство приведенное в теореме.

Доказательство теоремы А. Пусть задача (1) не сильно разрешима. Тогда существуют $a > 0$ и $f(t) \in H_2[0,a]$ такие, что для решения $u(t)$ задачи (1) выполнено $u' + Au \notin H_2[0,a]$. Из теоремы 1 получаем, что существует разделяющая функция $s(t)$. Если $w(t)$ — решение задачи (1) при $f(t) = s(t)$, то из теоремы 2 получаем, что пара (w,s) — нетривиальное решение системы (4).

Обратно, докажем, что если система (4) имеет нетривиальное решение, то задача (1) не сильно разрешима. Допустим противное. Пусть на $[0,a]$, $a > 0$, система (4) имеет нетривиальное решение $(w(t), s(t))$, но задача (1) сильно разрешима. Тогда $w' + Aw \in H_2[0,a]$ в силу того, что $s(t) \in H_2[0,a]$.

Пусть пара (w_1, w_2) из класса пробных функций D_a и $B_w w_1 \in H_2[0,a]$. Тогда из определения решения имеем

$$0 = \int_0^a \langle s, w_1' + Aw_1 + B_w w_1 \rangle\, dt = \int_0^a \langle s, w_1' + Aw_1 + B(w, w_1) + B(w_1, w) \rangle\, dt. \quad (12)$$

Рассмотрим задачу

$$\tilde{g}' + A\tilde{g} + B(w, \tilde{g}) + B(\tilde{g}, w) = s(t), \quad \tilde{g}(0) = 0, \quad 0 < t < a. \quad (13)$$

Положим $\tilde{g} = e^{\lambda t} g$. Для g имеем

$$g' + (A + \lambda)g + B(w, g) + B(g, w) = e^{-\lambda t} s(t), \quad g(0) = 0, \quad 0 < t < a. \quad (14)$$

Обозначим $g' + (A + \lambda)g \equiv v$. Тогда система (14) эквивалентна уравнению

$$v + D(\lambda)v = e^{-\lambda t} s(t), \quad \lambda \geq 1, \quad (15)$$

где $D(\lambda)$ — оператор, действующий по формуле

$$D(\lambda)v \equiv B(T(\lambda)v, w) + B(w, T(\lambda)v).$$

Возьмем $\lambda \geq 1$ и $0 < \varepsilon < 1/2 - \delta_0$. Оценим норму оператора $D(\lambda)$:

$$|D(\lambda)u|^2_{H_2[0,a]} = \int_0^a |D(\lambda)u|^2\, dt = \int_0^a |B(T(\lambda)u, w) + B(w, T(\lambda)u)|^2\, dt$$

$$\leq C \int_0^a |(A+E)^{\delta_0} T(\lambda)u|^2 |(A+E)^{\delta_0+1/2} w|^2 + |(A+E)^{\delta_0} w|^2 |(A+E)^{\delta_0+1/2} T(\lambda)u|^2\, dt$$

$$\leq C|(A+\lambda)^{-\varepsilon}| \int_0^a |(A+E)^{\delta_0+\varepsilon} T(\lambda)u|^2 |(A+E)^{\delta_0+1/2} w|^2$$

$$+ |(A+E)^{\delta_0} w|^2 |(A+E)^{\delta_0+1/2+\varepsilon} T(\lambda)u|^2\, dt$$

$$\leq \frac{C}{\lambda^\varepsilon} \int_0^a |(A+E)^{1/2} T(\lambda)u|^2 |(A+E)w|^2 + |(A+E)^{1/2} w|^2 |(A+E)T(\lambda)u|^2\, dt.$$

Воспользуемся приемом из доказательства леммы 9. Тогда получаем

$$|D(\lambda)u|^2_{H_2[0,a]} \leq \frac{C}{\lambda^\varepsilon} |u|^2_{H_2[0,a]} |w' + Aw|^2_{H_2[0,a]} \leq \frac{C_1}{\lambda^\varepsilon} |u|^2_{H_2[0,a]}.$$

Отсюда вытекает, что $\|D(\lambda)\| \leq 1/2$ при достаточно больших λ. Поэтому уравнение (15) имеет решение $v \in H_2[0,a]$. Но $v = g' + (A+\lambda)g$, следовательно, уравнение (14) имеет решение g такое, что $g' + (A+\lambda)g \in H_2[0,a]$. Возвращаясь от g к $\tilde{g}$, получаем, что решение $\tilde{g}$ задачи (13) удовлетворяет условию $\tilde{g}' + A\tilde{g} \in H_2[0,a]$.

Возьмем в (12) $w_1 = w_{1n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ так, чтобы в $H_2[0,a]$

$$\frac{d}{dt}(w_{1n}) + Aw_{1n} \to \tilde{g}' + A\tilde{g} \quad (16)$$

при $n \to \infty$. Это возможно, так как $A \geq E$ — постоянный самосопряженный оператор и гладкие функции плотны в пространстве Соболева. Как и при оценке нормы $D(\lambda)$, можно показать, что для любого v выполнена оценка

$$|B(w, v) + B(v, w)|_{H_2[0,a]} \leq C|v' + Av|_{H_2[0a]},$$

если $v(0) = 0$ и $v' + Av \in H_2[0,a]$. Поэтому из (16) вытекает, что в $H_2[0,a]$

$$B(w_{1n}, w) + B(w, w_{1n}) \to B(\tilde{g}, w) + B(w, \tilde{g}).$$

Отсюда и из (12), переходя к пределу при $n \to \infty$, находим
$$0 = \int\limits_0^a |s(t)|^2\,dt.$$
Следовательно, $s(t) \equiv 0$. Но тогда второе уравнение системы (4) дает, что $w \equiv 0$. Пришли к противоречию. Теорема А доказана.

Замечание 3.1. Основные результаты пп. 1–3 можно распространить на более общие уравнения, например на следующее:
$$u_t' + Au + \theta(t)B(u) = f(t), \quad u|_{t=0} = 0, \tag{17}$$
где $A = A^*$ — самосопряженный неотрицательный оператор с вполне непрерывной резольвентой, $\theta(t)$ — непрерывная скалярная функция, $B(\cdot)$ — нелинейный оператор, которые удовлетворяют условиям
$$B(u) - B(u + \varepsilon w) = \varepsilon B_u w + D(u, w, \varepsilon)\varepsilon^2,$$
здесь B_u — линейный при каждом u, $D(u, w, \varepsilon)$ — нелинейный операторы, для которых
$$|B_u w| \le \varphi(|A^{\gamma-1/2}u|)[|A^\gamma u||A^{\gamma-1/2}w| + |A^{\gamma-1/2}u||A^\gamma w|],$$
$$|D(u, w, \varepsilon)| \le \psi(|A^{\gamma-1/2}u|, |A^{\gamma-1/2}w|, \varepsilon)[|A^\gamma u||A^{\gamma-1/2}w| + |A^{\gamma-1/2}u||A^\gamma w|],$$
где γ — постоянная, $1/2 < \gamma < 1$, $\varphi(\cdot)$ — непрерывная на $[0, \infty)$, а $\psi(x, y, \varepsilon)$ — непрерывная при $0 \le x < \infty$, $0 \le y < \infty$, $0 \le \varepsilon \le 1$ функции. Можно доказать, что для задачи (17) при выполнении вышеприведенных условий верна теорема о разделяющей функции и имеет место теорема, аналогичная теореме А. Отметим, что условие $A \ge E$ несущественно; достаточно, чтобы A был полуограничен снизу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н.* Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 4. С. 446–449.
2. *Хёрмандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

Статья поступила 26 декабря 2006 г., окончательный вариант — 6 августа 2007 г.

Отелбаев Мухтарбай, Дурмагамбетов Асет Асхатбекович,
Сейткулов Ержан Нураханович
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 7, Астана 010010, Казахстан
otelbayev_m@rambler.ru, aset.durmagambetov@gmail.com, erj@mail.ru