Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 514.772.35

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

М. В. Коробков

Аннотация. Говорят, что область $U \subset \mathbb{R}^n$ однозначно определяется относительной метрикой (которая является продолжением по непрерывности внутренней метрики области на границу) своей хаусдорфовой границы, если любая область $V \subset \mathbb{R}^n$, хаусдорфова граница которой изометрична в относительной метрике хаусдорфовой границе области U, сама изометрична области U (в евклидовых метриках). В работе сформулированы необходимые и достаточные условия на плоскую область, чтобы она однозначно определялась относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.

Ключевые слова: плоская область, хаусдорфова граница, относительная метрика, однозначная определенность.

Введение

Тематика, по которой выполнена работа, хотя и является сравнительно молодой, но непосредственно связана также с классическими задачами, имеющими двухсотлетнюю историю. Отправной точкой можно считать известную теорему Коши об однозначной определенности выпуклого многогранника своей разверткой. В дальнейшем проблемами однозначной определенности выпуклых поверхностей занимались Минковский, Гильберт, Вейль, Бляшке, Кон-Фоссен и другие известные математики. Но наибольших успехов в этом направлении добились А. Д. Александров и его ученики. Упомянем ставшую уже классической теорему А. В. Погорелова об однозначной определенности замкнутой выпуклой поверхности ее внутренней метрикой (см., например, [1]).

Дальнейшее развитие данная тематика получила после предложенного А. П. Копыловым нового подхода, позволившего существенно расширить рамки указанных проблем. В подходе А. П. Копылова изучается однозначная определенность областей относительными метриками их границ, т. е. метрика на границе области определяется как продолжение по непрерывности внутренней метрики самой области. При таком подходе упомянутые вначале классические задачи являются частными случаями задач на однозначную определенность областей относительными метриками их границ, а также возникает целый класс новых и очень интересных проблем, в исследовании которых в разное время принимали участие А. Д. Александров, А. В. Кузьминых, В. А. Александров, М. К. Боровикова и др. (см., например, [2–5], а также обзорную статью [6]).

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а), гранта Фонда содействия отечественной науке для молодых кандидатов и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 117).

В работе найдены необходимые и достаточные условия однозначной определенности плоских областей относительными метриками их границ, причем в отличие от результатов большинства предыдущих работ на области не налагается никаких априорных условий регулярности.

Напомним необходимые для дальнейшего определения однозначной определенности (см., например, [6]).

Определение 0.1. Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и ρ_U — ее внутренняя метрика[1)]. Пополним метрическое пространство (U, ρ_U) по Хаусдорфу. Отождествляя точки построенного пополнения, соответствующие точкам области U, с самими этими точками и удаляя их из пополнения, мы получим метрическое пространство $(\partial_H U, \rho_{H,U})$, совокупность $\partial_H U$ элементов которого называется *хаусдорфовой границей области* U, а $\rho_{H,U}$ — *относительной метрикой ее хаусдорфовой границы.* Расстояние в этой метрике между элементами $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$ будем обозначать также через $|\tilde{x} - \tilde{y}|_{H,U}$, при этом индекс «$U$» будем опускать, если из контекста понятно, о какой именно области U идет речь.

Замечание 0.2. Если область U допускает продолжение по непрерывности внутренней ее метрики ρ_U в замыкание $\mathrm{Cl}\, U$, то $\partial_H U$ естественным способом отождествляется с евклидовой границей ∂U.

Пусть U, V — области в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f : \partial_H U \to \partial_H V$ является *изометрией* (*в относительных метриках*) *хаусдорфовых границ областей* U *и* V, если отображение f биективно и для любых $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$ справедливо равенство $|\tilde{x} - \tilde{y}|_{H,U} = |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})|_{H,V}$; при наличии такой изометрии будем говорить также, что *хаусдорфовы границы областей* U *и* V *изометричны в относительных метриках.*

Определение 0.3. Будем говорить, что *область* $U \subset \mathbb{R}^n$ *однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы*, если каждая область $V \subset \mathbb{R}^n$, хаусдорфова граница которой изометрична в относительных метриках аналогичной границе области U, сама изометрична U (в евклидовых метриках).

1. Основные результаты

Всюду в дальнейшем $\mathrm{Int}\, E$ — внутренность множества E, $\mathrm{Cl}\, E$ — замыкание множества E (иногда для той же цели служит значок $\overline{E}$), ∂E — граница множества E, $\mathrm{Conv}\, E$ — выпуклая оболочка множества E.

Для области U обозначим $F_U = U \setminus \mathrm{Cl}\,\mathrm{Conv}\,\partial U$, а через U_i будем обозначать компоненты связности открытого множества $U \cap \mathrm{Int}\,\mathrm{Conv}\,\partial U$.

Теорема 1.1. *Пусть* U *— область в* $\mathbb{R}^2$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(I) *Если* ∂U *лежит на некоторой прямой, то область* U *не является однозначно определенной в том и только том случае, когда* ∂U *является связным множеством, содержащим более одной точки.*

(II) *Если* ∂U *не содержится ни на какой прямой, то область* U *не является однозначно определенной в том и только том случае, когда существуют неизометричная ей область* V, *семейство изометрических отображений* $Q_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *и гомеоморфизм* $\theta : \partial F_U \to \partial F_V$, *удовлетворяющие следующим условиям.*

[1)]Напомним, что расстояние по внутренней метрике области U между точками $x, y \in U$ равно инфимуму длин кривых, лежащих в U и соединяющих x, y.

(IIa) *Для каждой компоненты* U_i *справедливо равенство* $Q_i(U_i) = V_i$. *Это же равенство справедливо и для каждой компоненты* V_i.

(IIb) *Включение* $x \in U \cap \partial U_i$ *выполняется тогда и только тогда, когда справедливо включение* $Q_i(x) \in V \cap \partial V_i$; *в случае выполнения этих включений справедливо также равенство* $\theta(x) = Q_i(x)$.

(IIc) *Гомеоморфизм* θ *сохраняет длину дуг* (*т. е. для любых двух точек* x, y *длина соединяющей их дуги, содержащейся в множестве* ∂F_U, *совпадает с длиной образа этой дуги при отображении* θ).

Из теоремы 1.1 непосредственно вытекает

Следствие 1.2. *Пусть область* $U \subset \mathbb{R}^2$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

1) $F_U = \varnothing$;

2) *множество* F_U *непусто и несвязно.*

Тогда область U *однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

В свою очередь, следствие 1.2 содержит как частный случай такой результат.

Следствие 1.3. *Пусть область* $U \subset \mathbb{R}^2$ *ограничена. Тогда она однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

Этот результат был впервые анонсирован (без доказательства) Д. А. Троценко в [7]. Однако его доказательство за прошедшие двадцать лет так и не было представлено. Настоящая статья содержит первое доказательство указанного факта. Отметим, что утверждение об однозначной определенности ограниченных областей в $\mathbb{R}^n$ доказано В. А. Александровым для случая кусочно-гладких областей [3], а также для случая областей с полиэдральной границей [4].

Следующая теорема, которую мы формулируем и для пространственного случая, в плоском случае вытекает из следствия 1.2.

Теорема 1.4. *Каждая выпуклая область* $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, *отличная от открытого полупространства в* $\mathbb{R}^n$, *однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

Из истории теоремы 1.4 отметим следующее. А. Д. Александровым (см. [3]) доказана однозначная определенность строго выпуклых областей $U \subset \mathbb{R}^n$ в классе областей, допускающих продолжения по непрерывности их внутренних метрик в замыкания $\operatorname{Cl} U$. А. П. Копылов в личном сообщении автору настоящей статьи доказал однозначную определенность строго выпуклых областей $U \subset \mathbb{R}^n$ относительной метрикой своей хаусдорфовой границы (т. е. в классе всех областей). Кроме того, ранее А. П. Копылов доказал (см. [2]) однозначную определенность выпуклых ограниченных областей $U \subset \mathbb{R}^n$ в классе областей, допускающих продолжения по непрерывности их внутренних метрик в замыкания $\operatorname{Cl} U$, при $n = 2$ — в классе всех областей (см. [6, теорема 6.1]). Наконец, А. В. Кузьминых [5] доказана однозначная определенность отличных от полупространства выпуклых областей $U \subset \mathbb{R}^n$ в классе областей, допускающих продолжения по непрерывности их внутренних метрик в замыкания $\operatorname{Cl} U$. Все перечисленные результаты содержатся в теореме 1.4 как частный случай (см. также замечание 0.2).

2. Предварительные сведения и обозначения

Через $B(z,r)$ обозначается открытый шар $B(z,r) = \{w \mid |w-z| < r\}$. *Кривой* мы называем непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \supset [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$. Если отображение $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ непрерывно и инъективно, то будем называть его также *дугой*. Символом $l(\gamma)$ обозначается длина кривой γ. Под *связностью* мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии.

Носителем элемента $\tilde{x}$ *хаусдорфовой границы* $\partial_H U$ *области* $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется точка x евклидовой границы ∂U, к которой сходится фундаментальная во внутренней метрике области U последовательность $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ точек $x_j \in U$, представляющая элемент $\tilde{x}$. Носитель элемента $\tilde{x} \in \partial_H U$ обозначается символом $p\tilde{x}$.

Ясно, что каждый элемент $\tilde{x} \in \partial_H U$ обладает единственным носителем $x = p\tilde{x}$. В то же время могут быть точки $x \in \partial U$, не являющиеся носителем никакого элемента из $\partial_H U$, а с другой стороны, могут быть точки $x \in \partial U$, которые являются носителями нескольких (может быть, даже несчетного множества) элементов из $\partial_H U$. Справедливы следующие простые факты.

Лемма 2.1 [6]. *Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$. Тогда множество $\{p\tilde{x} \mid \tilde{x} \in \partial_H U\}$ всюду плотно (относительно обычной евклидовой метрики) в ∂U.*

Лемма 2.2 [6]. *Если $\tilde{x} \in \partial_H U$, то носитель $x = p\tilde{x}$ достижим из области U по спрямляемой кривой $\gamma : [0,1] \to \mathrm{Cl}\, U$ такой, что $\gamma(1) = x$, $\gamma(t) \in U$ при $0 \leq t < 1$ и для каждой последовательности $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ точек $t_j \in [0,1)$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = 1$, последовательность $\{\gamma(t_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ фундаментальна во внутренней метрике области U и представляет граничный элемент $\tilde{x}$. С другой стороны, если точка $x \in \partial U$ достижима из области U по спрямляемой кривой γ, то любая последовательность $\{\gamma(t_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, где $t_j \in [0,1)$, $j = 1,2,\dots$, и $\lim\limits_{j\to\infty} t_j = 1$, фундаментальна во внутренней метрике области U и определяет (один и тот же) элемент $\tilde{x} \in \partial_H U$, носителем которого является точка x.*

Нам понадобятся некоторые дополнительные понятия. Для точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ обозначим $(x,y) = \{tx + (1-t)y \mid t \in (0,1)\}$, $[x,y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$. Множество (x,y) будем называть *интервалом*. Для упорядоченной тройки точек x, y, z обозначим через $\angle(x,y,z)$ плоский угол $\angle(x,y,z) = \{y + t(x-y) + s(z-y) \mid t \geq 0,\ s \geq 0\}$, а через $\triangle(x,y,z)$ — треугольник (замкнутый) с вершинами x, y, z. Символом $|\angle(x,y,z)|$ будем обозначать величину (в радианах) угла $\angle(x,y,z)$.

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, не совпадающая со всем $\mathbb{R}^n$ (в дальнейшем мы будем рассматривать только такие области). Интервал (x,y) будем называть *граничным интервалом* для области U, если $\varnothing \neq (x,y) \subset U$ и $x, y \in \partial U$. Будем говорить, что упорядоченная тройка точек x, y, z задает *граничный угол* для области U, если эти точки не лежат на одной прямой, $x, y, z \in \partial U$, $(x,y) \subset U$, $(y,z) \subset U$ и $\exists r > 0$ $B(y,r) \cap \angle(x,y,z) \setminus \{y\} \subset U$. Далее будем говорить, что треугольник $\triangle(x,y,z)$ является *граничным треугольником* для области U, если точки x, y, z не лежат на одной прямой, $x, y, z \in \partial U$ и $\triangle(x,y,z) \setminus \{x,y,z\} \subset U$. Очевидно, что каждая сторона граничного треугольника является граничным интервалом, а углы, образованные этим треугольником, — граничные углы.

Нетрудно видеть также, что каждый граничный интервал (x,y) порождает естественным образом пару элементов хаусдорфовой границы $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$ таких, что $p\tilde{x} = x$, $p\tilde{y} = y$ и $|\tilde{x} - \tilde{y}|_H = |x - y|$ (элементы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ порождаются фундаментальными последовательностями точек из интервала (x,y), сходящимися к точкам x, y соответственно). Аналогично каждый граничный угол $\angle(x,y,z)$ порождает естественным образом тройку элементов хаусдорфовой границы $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in\partial_H U$ таких, что $p\tilde{x}=x$, $p\tilde{y}=y$, $p\tilde{z}=z$ и $|\tilde{x}-\tilde{y}|_H=|x-y|$, $|\tilde{z}-\tilde{y}|_H=|z-y|$. То же самое можно сказать и в отношении граничного треугольника $\triangle(x,y,z)$, для которого вдобавок выполняется равенство $|\tilde{x}-\tilde{z}|_H=|x-z|$.

Пусть имеется отображение $f:\partial_H U\to\partial_H V$, и пусть $x\in\partial U$, $\tilde{x}\in\partial_H U$, $p\tilde{x}=x$ (обычно точка $\tilde{x}$ по умолчанию определяется из контекста, например, как конец граничного интервала, см. выше). Тогда будем обозначать $x'=pf(\tilde{x})$. Вообще, для точки $x\in\overline{U}$ символом x' будем обозначать соответствующую точку $x'\in\overline{V}$, когда из контекста понятно, о каком именно соответствии идет речь.

Ясно, что внутреннюю метрику области U можно по непрерывности распространить на множество $U\cup\partial_H U$. Таким образом определена величина $|x-y|_H$ для любой пары x,y из множества $U\cup\partial_H U$.

3. Доказательства основных результатов

Нам понадобится ряд лемм, при этом роль основных инструментов будут играть леммы 3.1 и 3.8.

Лемма 3.1 (об инвариантности граничного интервала). *Пусть $U,V\subset\mathbb{R}^n$ — области, и пусть $f:\partial_H U\to\partial_H V$ — изометрия* (*в относительных метриках*) *хаусдорфовых границ этих областей. Предположим, что (x,y) является граничным интервалом для области U. Тогда (x',y') является граничным интервалом для области V, причем $|x'-y'|=|x-y|$.*

Частные случаи этого утверждения были известны и ранее: например, в случае, когда U — ограниченная выпуклая область, подобное утверждение содержится в лемме 4 из [2].

Доказательство леммы 3.1. Вследствие изометричности f имеет место равенство
$$|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|_H=|x-y|. \tag{1}$$
Возьмем последовательности $V\ni v_\nu\to x'$, $V\ni w_\nu\to y'$, фундаментальные относительно внутренней метрики области V и порождающие элементы хаусдорфовой границы $f(\tilde{x})$, $f(\tilde{y})$ соответственно. (Существование таких последовательностей вытекает из определения хаусдорфовой границы.) Возьмем теперь последовательность кривых $\gamma_\nu:[0,1]\to V$ таких, что $\gamma_\nu(0)=v_\nu$, $\gamma_\nu(1)=w_\nu$, $l(\gamma_\nu)\to|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|_H$. Не умаляя общности, можно также считать, что параметризация кривых γ_ν с точностью до множителя совпадает с натуральной параметризацией и что отображения γ_ν равномерно сходятся к отображению $\gamma:[0,1]\to\operatorname{Cl}V$ так, что $\gamma(0)=x'$, $\gamma(1)=y'$, γ является спрямляемой кривой и
$$l(\gamma)\le|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|_H. \tag{2}$$
Теперь для окончания доказательства леммы 3.1 достаточно показать, что
$$\forall t\in(0,1)\quad \gamma(t)\in V. \tag{3}$$
В самом деле, если включение (3) справедливо, то по определению относительной метрики на хаусдорфовой границе будет справедливо неравенство $l(\gamma)\ge|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|_H$. Соединяя это с формулой (2), получаем, что
$$l(\gamma)=|f(\tilde{x})-f(\tilde{y})|_H. \tag{4}$$

Из формул (3), (4) легко следует, что кривая γ является прямолинейным отрезком с концами x', y', причем $(x', y') \subset V$ и $|x' - y'| = |f(\tilde{x}) - f(\tilde{y})|_H$. Это вместе с равенством (1) дает нам искомое утверждение леммы 3.1.

Итак, осталось доказать (3). Предположим, что она неверна, тогда найдется $t_0 \in (0, 1)$ такое, что $\gamma(t_0) \in \partial V$. Положим $r_\nu = l(\gamma_\nu(0, t_0))$, $s_\nu = l(\gamma_\nu(t_0, 1))$ и $R_\nu = \operatorname{dist}(\gamma_\nu(t_0), \partial V)$. Вследствие сделанных ранее предположений $R_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$, $\forall \nu\ (B(\gamma_\nu(t_0), R_\nu) \subset V\ \&\ \exists A_\nu \in \overline{B}(\gamma_\nu(t_0), R_\nu) \cap \partial V)$,

$$r_\nu + s_\nu \to |x - y| \quad \text{при } \nu \to \infty, \tag{5}$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall \nu\ (r_\nu > \varepsilon_0\ \&\ s_\nu > \varepsilon_0). \tag{6}$$

В силу (5), (6) можем считать, не умаляя общности, что $r_\nu \to r > 0$, $s_\nu \to s > 0$,

$$r + s = |x - y|. \tag{7}$$

Если мы возьмем последовательность точек из шара $B(\gamma_\nu(t_0), R_\nu)$, сходящуюся к точке A_ν, то она будет порождать некоторый элемент хаусдорфовой границы $\widetilde{A}_\nu \in \partial_H V$. Легко видеть, что $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} |f(\tilde{x}) - \widetilde{A}_\nu|_H \le r$, $\varlimsup\limits_{\nu\to\infty} |f(\tilde{y}) - \widetilde{A}_\nu|_H \le s$. Обозначим $\widetilde{B}_\nu = f^{-1}(\widetilde{A}_\nu)$. В силу изометричности отображения f получаем, что

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} |\tilde{x} - \widetilde{B}_\nu|_H \le r, \tag{8}$$

$$\varlimsup_{\nu\to\infty} |\tilde{y} - \widetilde{B}_\nu|_H \le s. \tag{9}$$

Положим $B_\nu = p\widetilde{B}_\nu$. Тогда по определению относительной метрики $|\cdot|_H$ справедливы неравенства

$$|x - B_\nu| \le |\tilde{x} - \widetilde{B}_\nu|_H, \tag{10}$$

$$|y - B_\nu| \le |\tilde{y} - \widetilde{B}_\nu|_H. \tag{11}$$

Из формул (7)–(11) и неравенства треугольника вытекает, что $B_\nu \to B = \frac{s}{|x-y|}x + \frac{r}{|x-y|}y$. Поскольку $B_\nu \in \partial U$, то $B \in \partial U$. Но последнее включение противоречит условию леммы 3.1 о том, что $(x, y) \subset U$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.1. $\square$

В следующих леммах, если не оговорено противное, будем предполагать, что U, V — области в $\mathbb{R}^2$ и $f : \partial_H U \to \partial_H V$ — изометрия (в относительных метриках) хаусдорфовых границ этих областей.

Замечание 3.2. В принятых нами определениях отображение $f : \partial_H U \to \partial_H V$ будет изометрией хаусдорфовых границ тогда и только тогда, когда обратное отображение $f^{-1} : \partial_H V \to \partial_H U$ является изометрией хаусдорфовых границ. Поэтому следующие леммы останутся справедливыми, если в них поменять местами области U и V.

Лемма 3.3. *Пусть $\angle(x, y, z)$ — граничный угол для области U. Тогда $|x' - y'| = |x - y|$, $|z' - y'| = |z - y|$ и $|x' - z'| \le |x - z|$.*

Суть этой леммы можно выразить следующими словами: граничный угол переходит при отображении f в равный себе или меньший угол (здесь пока еще не утверждается, что этот угол будет граничным).

Далее нам понадобится еще одно обозначение. Пусть $\angle(x, y, z)$ — граничный угол для некоторой области Ω. Положим $E = E(\angle(x, y, z), \Omega) = \operatorname{Conv}\bigl(\angle(x, y, z) \cap (\partial\Omega) \setminus \{y\}\bigr)$. Из определений вытекает, что $[x, z] \subset E$ и

$$\exists r_1 > 0 \quad B(y, r_1) \cap E = \varnothing. \tag{12}$$

Обозначим
$$\Gamma^{\Omega}_{\angle(x,y,z)} = \{w \in (\partial\Omega) \cap (\partial E) \mid (y,w) \subset \Omega \setminus E\}. \tag{13}$$
Отметим, в частности, что по построению
$$x, z \in \Gamma^{\Omega}_{\angle(x,y,z)}, \tag{14}$$
$$\forall w \in \Gamma^{\Omega}_{\angle(x,y,z)} \quad (y,w) \text{ — граничный интервал для области } \Omega. \tag{15}$$

Доказательство леммы 3.3. Совершая, если необходимо, параллельные переносы, мы можем считать, не умаляя общности, что
$$y = y' = 0 \in \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Пусть $\Phi = |\angle(x,0,z)|$, $E = E(\angle(x,0,z),U)$ (см. выше). Построим дугу (непрерывное инъективное отображение) $\gamma : [0,\Phi] \to \partial E$, определяя точку $\gamma(\varphi)$ по следующим свойствам: $\gamma(\varphi) \in \angle(x,0,z)$, $\gamma(\varphi) \in E$, $(0,\gamma(\varphi)) \cap E = \varnothing$, $|\angle(x,0,\gamma(\varphi))| = \varphi$. Ясно, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(\Phi) = z$ и γ является выпуклой дугой, содержащейся в $E \cap \partial E$ и соединяющей точки x, z.

Обозначим $\Gamma = \gamma([0,1])$, $\Gamma_1 = \Gamma \cap \partial U$, $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. Из сказанного выше следует равенство $\Gamma_1 = \Gamma^{U}_{\angle(x,0,z)}$, откуда ввиду формулы (15) получаем, что
$$\forall w \in \Gamma_1 \quad (0,w) \text{ — граничный интервал.} \tag{17}$$
Кроме того, по построению $\forall w \in \Gamma_2 \exists w_1, w_2 \in \Gamma_1 \quad w \in (w_1,w_2) \subset U \cap \Gamma$.

Зададим отображение $g : \Gamma_1 \to \partial V$ по правилу $g(w) = w'$ для $w \in \Gamma_1$. По лемме 3.1 (см. формулы (16), (17)) имеем
$$\forall w \in \Gamma_1 \quad |g(w)| = |w|. \tag{18}$$
Из сделанных построений вытекают также равенства
$$x' = g(x), \quad z' = g(z). \tag{19}$$
Отсюда и из (18), в частности, следует, что
$$|x'| = |x|, \quad |z'| = |z|. \tag{20}$$

Поскольку Γ — выпуклая дуга и все ее крайние[2)] точки содержатся в множестве Γ_1, геометрически очевидно, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_N = \Phi$, $N = N(\varepsilon)$, такое, что $\forall \nu = 0,1,\dots,N$ $\gamma(\varphi_\nu) \in \Gamma_1$,
$$\forall \nu = 0,1,\dots,N-1 \quad \frac{l(\gamma([\varphi_\nu,\varphi_{\nu+1}]))}{|\gamma(\varphi_\nu) - \gamma(\varphi_{\nu+1})|} \le 1 + \varepsilon. \tag{21}$$
Используя определение хаусдорфовой метрики, получаем, что
$$\forall \nu = 0,1,\dots,N-1 \quad |\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)} - \widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})}|_{H,U} \le l(\gamma([\varphi_\nu,\varphi_{\nu+1}])). \tag{22}$$
Из (21), (22) и определения хаусдорфовой метрики заключаем, что
$$\begin{aligned} \forall \nu = 0,1,\dots,N-1 \quad |g(\gamma(\varphi_\nu)) - g(\gamma(\varphi_{\nu+1}))| &\le |f(\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)}) - f(\widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})})|_{H,V} \\ = |\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)} - \widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})}|_{H,U} \le l(\gamma([\varphi_\nu,\varphi_{\nu+1}])) &\le (1+\varepsilon)|\gamma(\varphi_\nu) - \gamma(\varphi_{\nu+1})|. \end{aligned} \tag{23}$$

[2)] *Крайней точкой* множества F называется такая точка $A \in F$, что не существует пары отличных от A точек $B, C \in F$ и числа $p \in (0,1)$, для которых справедливо равенство $A = pB + (1-p)C$.

Из произвольности $\varepsilon > 0$, формул (18), (23) и наглядных геометрических соображений вытекает, что $|g(z) - g(x)| \le |x - z|$, а это вместе с (19), (20) дает нам искомое утверждение леммы 3.3. $\square$

Введем еще одно определение. Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$. Будем говорить, что спрямляемая кривая $\gamma : [0, L] \to \mathrm{Cl}\, U$ является H-*кратчайшей* между $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, если существует последовательность спрямляемых естественно параметризованных кривых $\gamma_\nu : [0, L_\nu] \to U$ таких, что $L_\nu \to L = |\tilde{x} - \tilde{y}|$, $\gamma_\nu \rightrightarrows \gamma$, $|\gamma_\nu(0) - \tilde{x}|_H \to 0$, $|\gamma_\nu(L_\nu) - \tilde{y}|_H \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Лемма 3.4. *Для любой пары точек $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$ существует H-кратчайшая. Далее, всякая H-кратчайшая $\gamma : [0, L] \to \mathrm{Cl}\, U$ обладает следующими свойствами.*

(H-i) *Для любой пары чисел $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, L]$ если*

$$\gamma(\varphi_1), \gamma(\varphi_2) \in \partial U \quad \text{и} \quad \gamma(\varphi) \in U \text{ при всех } \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), \tag{24}$$

то $\gamma(\varphi) \in (\gamma(\varphi_1), \gamma(\varphi_1))$ при всех $\varphi \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

(H-ii) *Если $\gamma(\varphi) \in U$, то*

$$l(\gamma([0, \varphi])) \le |\tilde{x} - \gamma(\varphi)|_H = \varphi, \quad l(\gamma([\varphi, L])) \le |\tilde{y} - \gamma(\varphi)|_H = L - \varphi.$$

Утверждение (H-i) означает, что пересечение H-кратчайшей с областью U состоит из граничных интервалов.

Доказательство леммы 3.4 простое, поэтому мы его опускаем. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $\tilde{x}, \tilde{y} \in \partial_H U$ и $\gamma : [0, L] \to \mathrm{Cl}\, U$ — H-кратчайшая между $\tilde{x}$, $\tilde{y}$. Тогда существует H-кратчайшая $\gamma_V : [0, L] \to \mathrm{Cl}\, V$ между $f(\tilde{x})$, $f(\tilde{y})$ со следующими свойствами.*

(H-iii) $\forall \varphi \in (0, L) \quad (\gamma(\varphi) \in U \Leftrightarrow \gamma_V(\varphi) \in V)$.

(H-iv) *Для любой пары чисел $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, L]$, удовлетворяющих условиям (24), справедливы равенства $f(\gamma(\varphi_1)) = \gamma_V(\varphi_1)$, $f(\gamma(\varphi_2)) = \gamma_V(\varphi_2)$.*

Доказательство основано на использовании соответствующих определений и лемм 2.2, 3.1, 3.4 и проводится стандартными рассуждениями из вещественного анализа, поэтому мы его опускаем. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $\triangle(x, y, z)$ — граничный треугольник для области U. Тогда $\triangle(x', y', z')$ — граничный треугольник для области V, причем*

$$|x' - y'| = |x - y|, \quad |z' - y'| = |z - y|, \quad |x' - z'| = |x - z|.$$

Суть этой леммы можно выразить следующими словами: граничный треугольник переходит при отображении f в равный ему граничный треугольник.

Доказательство. По определению граничного треугольника имеем, в частности, включение

$$\mathrm{Int}\, \triangle(x, y, z) \subset U. \tag{25}$$

Из леммы 3.1 следует, что $x', y', z' \in \partial V$,

$$(x', y') \cup (y', z') \cup (x', z') \subset V, \tag{26}$$

$$|x' - y'| = |x - y|, \quad |z' - y'| = |z - y|, \quad |x' - z'| = |x - z|. \tag{27}$$

Осталось доказать, что

$$\mathrm{Int}\, \triangle(x', y', z') \subset V. \tag{28}$$

Допустим, что некоторая точка w удовлетворяет условиям $w \in \partial U$, $(y,w) \subset U$, $(y,w) \cap (x,z) \neq \varnothing$. Тогда геометрически очевидно, что $\angle(x,y,w)$, $\angle(w,y,z)$ суть граничные углы. Тогда по леммам 3.1, 3.3 $(y',w') \subset V$, $|w'-x'| \leq |w-x|$, $|w'-z'| \leq |w-z|$ и

$$|w'-y'| = |w-y|. \tag{29}$$

Отсюда с учетом равенств (27) заключаем, что

$$|w'-x'| = |w-x|, \quad |w'-z'| = |w-z|. \tag{30}$$

Равенства (27), (29), (30) показывают, что фигура, состоящая из четырех точек x, y, z, w, евклидово-изометрична фигуре из точек x', y', z', w'.

Итак, мы доказали импликацию

$$(w{\in}\partial U,\ (y,w){\subset}U,\ (y,w){\cap}(x,z){\neq}\varnothing) \Rightarrow \begin{pmatrix} (y',w') \subset V,\ |w'-y'|{=}|w-y|, \\ |w'-x'|{=}|w-x|,\ |w'-z'|{=}|w-z| \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Аналогично доказываются импликации

$$(w{\in}\partial U,\ (x,w){\subset}U,\ (x,w){\cap}(y,z){\neq}\varnothing) \Rightarrow \begin{pmatrix} (x',w') \subset V,\ |w'-y'|{=}|w-y|, \\ |w'-x'|{=}|w-x|,\ |w'-z'|{=}|w-z| \end{pmatrix},$$

$$\bigl(w{\in}\partial U,\ (z,w){\subset}U,\ (z,w){\cap}(x,y){\neq}\varnothing\bigr) \Rightarrow \begin{pmatrix} (z',w') \subset V,\ |w'-y'|{=}|w-y|, \\ |w'-x'|{=}|w-x|,\ |w'-z'|{=}|w-z| \end{pmatrix}.$$

Далее, рассмотрим сначала случай, когда

$$\exists r > 0 \quad B(y',r) \cap (\operatorname{Int} \triangle(x',y',z')) \cap \partial V = \varnothing. \tag{32}$$

Тогда искомое равенство (28) доказывается очень легко. В самом деле, если выполнена импликация (32), но не выполнено включение (28), то существует точка $v \in (\operatorname{Int} \triangle(x',y',z')) \cap \partial V$ такая, что $\angle(x',y',v)$, $\angle(v,y',z')$ суть граничные углы. Возьмем соответствующий элемент $\tilde v \in \partial_H V$, $p\tilde v = v$, и рассмотрим $u = pf^{-1}(\tilde v) \in \partial U$. Точно таким же методом, как и при доказательстве импликации (31), можно доказать, что фигура, состоящая из четырех точек x', y', z', v, евклидово-изометрична фигуре из точек x, y, z, u. Но тогда $u \in (\operatorname{Int} \triangle(x,y,z)) \cap \partial U$, что противоречит включению (25).

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда импликация (32) не выполнена, т. е. когда

$$\forall r > 0 \quad B(y',r) \cap (\operatorname{Int} \triangle(x',y',z')) \cap \partial V \neq \varnothing. \tag{33}$$

По тем же причинам, не умаляя общности, можно считать вдобавок, что

$$\forall r > 0 \quad B(x',r) \cap (\operatorname{Int} \triangle(x',y',z')) \cap \partial V \neq \varnothing; \tag{34}$$

$$\forall r > 0 \quad B(z',r) \cap (\operatorname{Int} \triangle(x',y',z')) \cap \partial V \neq \varnothing. \tag{35}$$

Предположим теперь, что выполнено хотя бы одно из следующих двух утверждений:

$$\exists w_0 \in (x,z)\, \forall w_1 \in (w_0,z)\, \exists w \in \partial U \quad w_1 \in (y,w) \subset U \tag{36}$$

или

$$\exists w_0 \in (x,z)\, \forall w_1 \in (x,w_0)\, \exists w \in \partial U \quad w_1 \in (y,w) \subset U. \tag{37}$$

Тогда из (31) следует, что

$$\exists w_0' \in (x',z')\,\forall w_1' \in (w_0',z')\,\exists w' \in \partial V \quad w_1' \in (y',w') \subset V \tag{38}$$

или

$$\exists w_0' \in (x',z')\forall w_1' \in (x',w_0')\exists w' \in \partial V \quad w_1' \in (y',w') \subset V. \tag{39}$$

Если выполнено (38), то получаем, в частности, что $\exists w_0' \in (x',z')\,\forall w_1' \in (w_0',z')$ $(y',w_1') \subset V$, а это противоречит утверждению (35). Если же выполнено утверждение (39), то аналогично получаем противоречие с (34).

Таким образом, мы доказали, что из (34), (35) следует невозможность выполнения ни одного из утверждений (36), (37), т. е.

$$\forall w_0 \in (x,z)\,\exists w_1 \in (w_0,z) \quad \{w \in \mathbb{R}^2 \mid w-y=\tau(w_1-y),\ \tau>0\} \subset U;$$

$$\forall w_0 \in (x,z)\,\exists w_1 \in (x,w_0) \quad \{w \in \mathbb{R}^2 \mid w-y=\tau(w_1-y),\ \tau>0\} \subset U.$$

Отсюда, из (25) и свойства (H-i) геометрически очевидно, что для любой точки $\tilde u \in \partial_H U$ такой, что $u = p\tilde u \in \operatorname{Int}\angle(x,y,z)$, и для каждой H-кратчайшей $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$, соединяющей $\tilde y$ и $\tilde u$, существуют $w \in \angle(x,y,z) \cap \partial U \setminus \triangle(x,y,z)$ и $\alpha_0 \in (0,L]$ такие, что $\gamma(\alpha_0) = w$ и $\gamma(\tau) \in (y,w) \subset U$ при $\tau \in (0,\alpha_0)$. С другой стороны, геометрически очевидно, что если H-кратчайшая соединяет вершину $f(\tilde y)$ с точкой из $\operatorname{Int}\triangle(x',y',z')$, то эта H-кратчайшая не может выходить за пределы треугольника $\triangle(x',y',z')$. Поэтому из сказанного выше, леммы 3.5 и (31) следует, что справедлива импликация

$$\forall \tilde v \in \partial_H V \quad (v = p\tilde v \in \operatorname{Int}\triangle(x',y',z') \Rightarrow u = pf^{-1}(\tilde v) \notin \operatorname{Int}\angle(x,y,z)). \tag{40}$$

Итак, из (34), (35) мы получили импликацию (40). Точно таким же образом можно получить из (33), (35) еще две импликации

$$\forall \tilde v \in \partial_H V \quad (v = p\tilde v \in \operatorname{Int}\triangle(x',y',z') \Rightarrow u = pf^{-1}(\tilde v) \notin \operatorname{Int}\angle(z,x,y)); \tag{41}$$

$$\forall \tilde v \in \partial_H V \quad (v = p\tilde v \in \operatorname{Int}\triangle(x',y',z') \Rightarrow u = pf^{-1}(\tilde v) \notin \operatorname{Int}\angle(y,z,x)). \tag{42}$$

Без потери общности можно считать, что

$$|y'-z'| \le |x'-z'| \ge |x'-y'|. \tag{43}$$

Далее, из (26), (34), (35) нетрудно вывести, что существуют последовательности точек

$$\operatorname{Int}\triangle(x',y',z') \ni v_\nu^1 \to x', \quad \operatorname{Int}\triangle(x',y',z') \ni v_\nu^2 \to z' \tag{44}$$

такие, что $v_\nu^1, v_\nu^2 \in \partial V$, $\left(v_\nu^1, v_\nu^2\right) \subset V$ (т. е. $\left(v_\nu^1, v_\nu^2\right)$ — граничный интервал для области V) и имеет место сходимость

$$\left|\tilde v_\nu^1 - f(\tilde x)\right|_H \to 0, \quad \left|\tilde v_\nu^2 - f(\tilde z)\right|_H \to 0.$$

Из (43), (44) следует справедливость неравенства $\left|v_\nu^1 - v_\nu^2\right| < |x'-z'|$. Обозначим $u_\nu^1 = pf^{-1}\left(\tilde v_\nu^1\right)$, $u_\nu^2 = pf^{-1}\left(\tilde v_\nu^2\right)$. Тогда из леммы 3.1 и сделанных предположений получаем, что $u_\nu^1, u_\nu^2 \in \partial U$, $\left(u_\nu^1, u_\nu^2\right) \subset U$,

$$u_\nu^1 \to x, \quad u_\nu^2 \to z, \quad \left|u_\nu^1 - u_\nu^2\right| = \left|v_\nu^1 - v_\nu^2\right| < |x'-z'| = |x-z|. \tag{45}$$

Кроме того, импликации (40)–(42) и предыдущие выкладки дают нам, что

$$u_\nu^1, u_\nu^2 \notin (\operatorname{Int}\angle(x,y,z)) \cup (\operatorname{Int}\angle(z,x,y)) \cup (\operatorname{Int}\angle(y,z,x)) \cup \triangle(x,y,z). \tag{46}$$

Но соотношения (45), (46) противоречат друг другу. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.6. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть $\angle(x, y, z)$ — граничный угол для области U. Тогда $\angle(x', y', z')$ — граничный угол для области V.*

Суть этой леммы можно выразить следующими словами: граничный угол переходит при отображении f в граничный угол.

Доказательство. Из лемм 3.1, 3.3 следует, что $x', y', z' \in \partial V$, $(x', y') \cup (y', z') \subset V$, $|x'-y'| = |x-y|$, $|z'-y'| = |z-y|$, $|x'-z'| \le |x-z|$. Из этих формул и того факта, что точки x, y, z не лежат на одной прямой, вытекает, что точки x', y', z' тоже не лежат на одной прямой.

Осталось доказать, что

$$\exists r > 0 \quad B(y', r) \cap \angle(x', y', z') \setminus \{y'\} \subset V. \tag{47}$$

Совершая, если необходимо, параллельные переносы, можем считать, не умаляя общности, что $y = y' = 0 \in \mathbb{R}^2$. Сначала будем действовать точно так же, как и при доказательстве леммы 3.3: повторим все рассуждения из доказательства леммы 3.3 до формулы (20) включительно. Рассмотрим построенное при этом отображение $g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^2$. По построению

$$\forall w \in \Gamma_1 \quad (0, g(w)) \subset V. \tag{48}$$

Распространим отображение g на все множество Γ следующим образом. Пусть $w \in \Gamma \setminus \Gamma_1 (= \Gamma_2)$. Геометрически очевидно, что $\exists w_1, w_2 \in \Gamma_1 \quad w \in (w_1, w_2) \subset U$. Геометрически очевидно также, что точки w_1, w_2 из предыдущей формулы определяются однозначно, более того,

$$(w_1, w_2) \subset U \cap \Gamma, \tag{49}$$

$$\triangle(0, w_1, w_2) \text{ является граничным треугольником для области } U. \tag{50}$$

В этом случае положим $g(w) = sg(w_1) + (1-s)g(w_2)$, где число $s \in (0, 1)$ определяется из равенства $w = sw_1 + (1-s)w_2$.

Из определения отображения g и (18) немедленно получаем, что

$$\forall w \in \Gamma \quad |g(w)| = |w|. \tag{51}$$

Определим кривую $\gamma_V : [0, \Phi] \to \mathbb{R}^2$ по правилу $\gamma_V(\varphi) = g(\gamma(\varphi))$ для $\varphi \in [0, \Phi]$, где кривая $\gamma(\varphi)$ определена при доказательстве леммы 3.3. По построению функция γ_V непрерывна, и в силу (19), (51) имеем

$$x' = \gamma_V(0), \quad z' = \gamma_V(\Phi) \tag{52}$$

и $\forall \varphi \in [0, \Phi] \quad |\gamma_V(\varphi)| = |\gamma(\varphi)|$. Из последнего тождества с учетом (12) и построения кривой $\gamma(\varphi)$ заключаем, что

$$\exists r_1 > 0 \; \forall \varphi \in [0, \Phi] \quad |\gamma_V(\varphi)| \ge r_1. \tag{53}$$

Согласно (48)

$$\forall \varphi \in [0, \Phi] \quad (\gamma(\varphi) \in \Gamma_1 \Rightarrow (0, \gamma_V(\varphi)) \subset V). \tag{54}$$

Далее, по построению (см., в частности, формулы (49), (50)) и по лемме 3.6

$$\forall \varphi \in [0, \Phi] \;\; (\gamma(\varphi) \in \Gamma_2 \Rightarrow (0, \gamma_V(\varphi)) \subset V). \tag{55}$$

Наконец, объединяя (54), (55), получаем нужные нам включения

$$\forall \varphi \in [0, \Phi] \quad (0, \gamma_V(\varphi)) \subset V. \tag{56}$$

Теперь из (56), (53), (52) и непрерывности функции γ_V следует искомое соотношение (47). Лемма 3.7 доказана. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть* $\angle(x, y, z)$ *— граничный угол для области* U*. Тогда* $\angle(x', y', z')$ *— граничный угол для области* V*, причем* $|x'-y'| = |x-y|$, $|z'-y'| = |z-y|$, $|x'-z'| = |x-z|$.

Суть этой леммы можно выразить следующими словами: граничный угол переходит при отображении f в равный ему граничный угол.

Доказательство. Нужно применить два раза леммы 3.3, 3.7. $\square$

Следующее ниже техническое утверждение ввиду равенства (14) содержит лемму 3.8 как частный случай.

Лемма 3.9. *Пусть* $\angle(x, y, z)$ *— граничный угол для области* U*. Тогда*

$$\Gamma^V_{\angle(x',y',z')} = \{w' \mid w \in \Gamma^U_{\angle(x,y,z)}\}, \tag{57}$$

причем справедливы равенства

$$|w_1' - w_2'| = |w_1 - w_2| \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \Gamma^U_{\angle(x,y,z)} \cup \{y\}. \tag{58}$$

Доказательство. По лемме 3.8 $\angle(x', y', z')$ — граничный угол для области V, евклидово-изометричный углу $\angle(x, y, z)$. Далее, геометрически очевидно, что для любого $w \in \Gamma^U_{\angle(x,y,z)} \setminus \{x, z\}$ углы $\angle(x, y, w)$ и $\angle(w, y, z)$ граничные для области U. Аналогично для любого $v \in \Gamma^V_{\angle(x',y',z')} \setminus \{x', z'\}$ углы $\angle(x', y', v)$ и $\angle(v, y', z')$ граничные для области V. Теперь искомые утверждения (57), (58) получаются из последних двух предложений, леммы 3.8 и следующего простого факта.

(P_1) *Положение точки на плоскости однозначно определяется ее расстояниями до трех точек, не лежащих на одной прямой.*

Оставшиеся технические подробности мы опускаем, так как они не представляют сложности. $\square$

Лемма 3.10. *Пусть* $x_i \in \partial U$, $i = 1, \ldots, m$, *таковы, что* $\angle(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ *образуют граничные углы для области* U *при всех* $i = 1, \ldots, m-2$*. Тогда* $|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|$ *для всех* $i, j = 1, \ldots, m$.

Доказательство. Для $m = 3$ утверждение леммы 3.10 совпадает с утверждением леммы 3.8. Теперь ясно, что достаточно доказать лемму 3.10 для случая $m = 4$, так как при $m > 4$ утверждение леммы 3.10 выводится по индукции применением простого факта (P_1) (см. выше). Итак, будем считать ниже, что $m = 4$.

Из леммы 3.8 и определения граничных углов следует, что

$$|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{59}$$

$$|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|, \quad i, j = 2, 3, 4, \tag{60}$$

$$\text{точки } x_1', x_2', x_3' \text{ не лежат на одной прямой}, \tag{61}$$

$$\text{точки } x_2', x_3', x_4' \text{ не лежат на одной прямой}. \tag{62}$$

Осталось доказать только одно равенство:

$$|x_1' - x_4'| = |x_1 - x_4|. \tag{63}$$

Совершая, если необходимо, изометрические преобразования и используя равенства (59), можем считать, не умаляя общности, что

$$x_i' = x_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{64}$$

Тогда с учетом (59)–(62) искомое равенство (63) эквивалентно равенству $x_4' = x_4$. Допустим, что это равенство не выполнено, тогда с учетом (59)–(62)

$$x_4' \text{ — отражение точки } x_4 \text{ относительно прямой } x_2x_3. \tag{65}$$

Из формул (64), (58) следует, что

$$w' = w \quad \text{для всех } w \in \Gamma^U_{\angle(x_1,x_2,x_3)}. \tag{66}$$

Из формул (65), (64), (58) вытекает, что

$$w' \text{ — отражение } w \text{ относительно прямой } x_2x_3 \text{ для всех } w \in \Gamma^U_{\angle(x_2,x_3,x_4)}. \tag{67}$$

Тогда, меняя при необходимости ролями области U и V, мы можем считать, не умаляя общности, что точки x_1, x_4 лежат по одну сторону от прямой x_2x_3, а точки x_1', x_4' лежат по разные стороны от прямой $x_2'x_3'$. Теперь геометрически очевидно, что в нашей ситуации всегда реализуется по крайней мере одна из следующих трех возможностей[3)]:

(i) существует граничный угол $\angle(x_1, x_2, u)$ для области U, где $u \in \Gamma^U_{\angle(x_2,x_3,x_4)} \setminus \{x_2\}$;

(ii) существует граничный угол $\angle(x_4, x_3, u)$ для области U, где $u \in \Gamma^U_{\angle(x_1,x_2,x_3)} \setminus \{x_3\}$;

(iii) существует граничный интервал (v_1, v_2) для области V, соединяющий точки $v_1 \in \Gamma^V_{\angle(x_1',x_2',x_3')} \setminus \{x_3'\}$ и $v_2 \in \Gamma^V_{\angle(x_2',x_3',x_4')} \setminus \{x_2'\}$.

По леммам 3.1, 3.9 утверждение (iii) эквивалентно следующему утверждению:

(iv) существует граничный интервал (u_1, u_2) для области U, соединяющий точки $u_1 \in \Gamma^U_{\angle(x_1,x_2,x_3)} \setminus \{x_3\}$ и $u_2 \in \Gamma^U_{\angle(x_2,x_3,x_4)} \setminus \{x_2\}$.

Поэтому можно считать, что всегда выполнено по крайней мере одно из трех утверждений: (i), (ii) или (iv). Но каждое из этих утверждений по леммам 3.1, 3.8 влечет выполнение следующего утверждения:

(v) существуют[4)] точки $u_1 \in \Gamma^U_{\angle(x_1,x_2,x_3)} \setminus \{x_3\}$ и $u_2 \in \Gamma^U_{\angle(x_2,x_3,x_4)} \setminus \{x_2\}$ такие, что

$$|u_2' - u_1'| = |u_2 - u_1|. \tag{68}$$

Геометрически очевидно, что

$$u_1 \text{ не лежит на прямой } x_2x_3, \tag{69}$$

$$u_2 \text{ не лежит на прямой } x_2x_3. \tag{70}$$

В силу леммы 3.9 (см. формулы (14), (58)) и включения $u_2 \in \Gamma^U_{\angle(x_2,x_3,x_4)}$ имеем также равенства

$$|u_2' - x_2'| = |u_2 - x_2|, \tag{71}$$

$$|u_2' - x_3'| = |u_2 - x_3|. \tag{72}$$

С учетом формул (64), (66) равенства (68), (71), (72) можно переписать в виде $|u_2' - u_1| = |u_2 - u_1|$, $|u_2' - x_2| = |u_2 - x_2|$, $|u_2' - x_3| = |u_2 - x_3|$. Тогда из условия (69) и свойства (P_1) получаем, что $u_2' = u_2$. Но последнее равенство противоречит формулам (67), (70). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.10. $\square$

[3)] Утверждение (iii) справедливо, если $x_2' \in \mathrm{Cl}\big(\Gamma^V_{\angle(x_2',x_3',x_4')} \setminus \{x_2'\}\big)$ и $x_3' \in \mathrm{Cl}\big(\Gamma^V_{\angle(x_1',x_2',x_3')} \setminus \{x_3'\}\big)$, а если хотя бы одно из этих включений не выполнено, то справедливо одно из утверждений (i), (ii).

[4)] Точки u_1, u_2 из утверждения (v) вычисляются следующим образом: если выполнено утверждение (iv), то они совпадают с одноименными точками из (iv); если выполнено (i), то $u_1 = x_1$, $u_2 = u$, где u определено в (i); если же выполнено (ii), то $u_1 = u$, $u_2 = x_4$, где u определено в (ii).

Лемма 3.11. *Пусть точки $x_1, x_2, x_3 \in \partial U$, $z \in (x_1, x_2)$ таковы, что (x_1, x_2) — граничный интервал, $(x_3, z] \subset U$, $z = \tau x_1 + (1-\tau)x_2 \in (x_1, x_2)$, $\tau \in (0,1)$. Положим $z' = \tau x_1' + (1-\tau)x_2'$, $x_3' = pf(\tilde{x}_3)$, где через $\tilde{x}_3$ обозначен элемент хаусдорфовой границы $\partial_H U$, порожденный фундаментальной последовательностью точек из интервала (x_3, z), сходящейся к x_3. Тогда $|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|$ для всех $i, j = 1, \ldots, 3$, $(x_3', z'] \subset V$ и $f(\tilde{x}_3)$ совпадает с элементом хаусдорфовой границы $\partial_H V$, порожденным фундаментальной последовательностью точек из интервала (x_3', z'), сходящейся к x_3'.*

Доказательство. Если точки x_1, x_2, x_3 лежат на одной прямой, то x_3 будет совпадать с x_1 или x_2 и тогда доказывать нечего. Будем далее считать, что точки x_1, x_2, x_3 не лежат на одной прямой. Обозначим $\Gamma_1 = \Gamma^U_{\angle(x_1,z,x_3)}$, $\Gamma_2 = \Gamma^U_{\angle(x_2,z,x_3)}$, где указанные множества определяются так же (см. формулу (13)), как и в случае граничных углов. Геометрически очевидно, что существует конечная или бесконечная последовательность точек u_ν, $\nu \in \mathbb{Z} \cap (\alpha, \omega)$, $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$, такая, что $u_\nu \in \Gamma_1$ при нечетных ν и $u_\nu \in \Gamma_2$ при четных ν, причем

$$\angle(u_\nu, u_{\nu+1}, u_{\nu+2}) \text{ — граничный угол при } \nu \in \mathbb{Z} \cap (\alpha, \omega - 2),$$

$$\text{если } \omega = +\infty, \text{ то } u_\nu \to x_3 \text{ при } \nu \to +\infty,$$

$$\text{если } \omega < +\infty, \text{ то } u_{\omega-1} = x_3,$$

$$\text{если } \alpha = -\infty, \text{ то } u_{2\kappa+1} \to x_1, \ u_{2\kappa} \to x_2 \text{ при } \kappa \to -\infty,$$

$$\text{если } \alpha > -\infty, \text{ то } \{u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}\} = \{x_1, x_2\}.$$

Теперь утверждение леммы 3.11 легко выводится из лемм 3.8-3.10 и наглядных геометрических соображений. Подробности выкладок ввиду их простоты мы опускаем. ☐

Замечание 3.12. Фактически из леммы 3.9 и метода доказательства леммы 3.11 вытекает более сильное утверждение:

$$\Gamma^V_{\angle(x_1',z',x_3')} = \{w' \mid w \in \Gamma^U_{\angle(x_1,z,x_3)}\}, \quad \Gamma^V_{\angle(x_2',z',x_3')} = \{w' \mid w \in \Gamma^U_{\angle(x_2,z,x_3)}\},$$

причем справедливы равенства

$$|w_1' - w_2'| = |w_1 - w_2| \quad \text{для всех } w_1, w_2 \in \Gamma^U_{\angle(x_1,z,x_3)} \cup \Gamma^U_{\angle(x_2,z,x_3)} \cup \{z\}.$$

Доказательство п. (I) теоремы 1.1. Необходимость легко вытекает из лемм 3.11, 3.1, а достаточность очевидна. ☐

Замечание 3.13. Ввиду доказанного п. (I) теоремы 1.1 мы будем всегда предполагать далее, если не оговорено противное, что не существует прямой, содержащей ∂U или ∂V.

Лемма 3.14. *Пусть точки $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \partial U$, $z_1, z_2 \in U$ таковы, что (x_1, y_1), (x_2, y_2) суть граничные интервалы, $z_1 = \tau_1 x_1 + (1-\tau_1)y_1 \in (x_1, y_1)$, $z_2 = \tau_2 x_2 + (1-\tau_2)y_2 \in (x_2, y_2)$, $\tau_1, \tau_2 \in (0,1)$, причем $[z_1, z_2] \subset U$. Обозначим $z_1' := \tau_1 x_1' + (1-\tau_1)y_1'$, $z_2' := \tau_2 x_2' + (1-\tau_2)y_2'$. Тогда $[z_1', z_2'] \subset V$ и четырехугольник $x_1 y_1 y_2 x_2$ евклидово-изометричен четырехугольнику $x_1' y_1' y_2' x_2'$.*

Доказательство. Если $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) \neq \varnothing$, то утверждение леммы 3.14 легко следует из леммы 3.11 и замечания 3.12. Рассмотрим теперь ситуацию, когда $(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) = \varnothing$. Без потери общности будем считать, что точки x_1, x_2 лежат по одну сторону от прямой $z_1 z_2$. Рассмотрим четырехугольник G_x с вершинами $z_1 x_1 x_2 z_2$. Положим $E_x = \{w \mid$ существует набор точек $w_i \in \partial U$,

$i = 1, \dots, k$, такой, что $w \in \mathrm{Conv}(w_1, \dots, w_k) \subset G_x\}$. По построению $[x_1, x_2] \subset E_x$. Обозначим

$$\Gamma_x^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) = \{w \in (\partial U) \cap (\partial E_x) \mid \exists z \in [z_1, z_2]\ (z, w) \subset U \setminus E_x\}.$$

По построению также получаем, что $x_1, x_2 \in \Gamma_x^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)$. Аналогично рассмотрим четырехугольник G_y с вершинами $z_1 y_1 y_2 z_2$. Положим $E_y = \{w \mid$ существует набор точек $w_i \in \partial U$, $i = 1, \dots, k$, такой, что $w \in \mathrm{Conv}(w_1, \dots, w_k) \subset G_y\}$. Обозначим

$$\Gamma_y^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) = \{w \in (\partial U) \cap (\partial E_y) \mid \exists z \in [z_1, z_2]\ (z, w) \subset U \setminus E_y\}.$$

По построению получаем, что $y_1, y_2 \in \Gamma_y^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)$. Геометрически очевидно, что существует конечная или бесконечная последовательность точек u_ν, $\nu \in \mathbb{Z} \cap (\alpha, \omega)$, $-\infty \le \alpha < \omega \le +\infty$, такая, что $u_\nu \in \Gamma_x^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)$ при нечетных ν и $u_\nu \in \Gamma_y^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)$ при четных ν, причем

$$\angle(u_\nu, u_{\nu+1}, u_{\nu+2}) \text{ — граничный угол при } \nu \in \mathbb{Z} \cap (\alpha, \omega - 2),$$

$$\text{если } \omega = +\infty, \text{ то } u_{2\kappa+1} \to x_2, \quad u_{2\kappa} \to y_2 \text{ при } \kappa \to +\infty,$$

$$\text{если } \omega < +\infty, \text{ то } \{u_{\omega-1}, u_{\omega-2}\} = \{x_1, y_1\},$$

$$\text{если } \alpha = -\infty, \text{ то } u_{2\kappa+1} \to x_1, \quad u_{2\kappa} \to y_1 \text{ при } \kappa \to -\infty,$$

$$\text{если } \alpha > -\infty, \text{ то } \{u_{\alpha+1}, u_{\alpha+2}\} = \{x_2, y_2\}.$$

Теперь утверждение леммы 3.14 легко выводится из лемм 3.8–3.10 и наглядных геометрических соображений. Подробности выкладок ввиду их простоты опускаем. $\square$

Замечание 3.15. Из лемм 3.9, 3.10 и метода доказательства леммы 3.14 вытекает, что справедливы равенства

$$\Gamma_x^V(x_1', y_1', x_2', y_2', z_1', z_2') = \{w' \mid w \in \Gamma_x^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)\},$$

$$\Gamma_y^V(x_1', y_1', x_2', y_2', z_1', z_2') = \{w' \mid w \in \Gamma_y^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2)\},$$

$$\forall w_1, w_2 \in \Gamma_x^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) \cup \Gamma_y^U(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1, z_2) \quad |w_1' - w_2'| = |w_1 - w_2|.$$

Мы будем говорить, что граничные (относительно области U) интервалы (x_1, y_1) и (x_2, y_2) *U-соединимы*, если найдутся точки $z_1, z_2 \in U$ такие, что выполнены условия леммы 3.14.

Лемма 3.16. *Пусть (x_i, y_i), $i = 1, \dots, m$, — граничные интервалы (относительно области U). Предположим, что интервалы (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) U-соединимы для всех $i = 1, \dots, m-1$. Тогда граничные интервалы (x_i', y_i'), (x_{i+1}', y_{i+1}') V-соединимы для всех $i = 1, \dots, m-1$, причем*

$$|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|, \quad |x_i' - y_j'| = |x_i - y_j|, \quad |y_i' - y_j'| = |y_i - y_j|, \quad i, j = 1, \dots, m. \tag{73}$$

Доказательство. Для $m = 2$ утверждение леммы 3.16 совпадает с утверждением леммы 3.14. Теперь ясно, что достаточно доказать лемму 3.16 для случая $m = 3$, так как для $m > 3$ утверждение леммы 3.16 выводится по индукции применением простого факта (P_1) (см. выше). Итак, будем считать ниже, что $m = 3$.

По определению U-соединимости найдутся точки $z_1^+, z_2^-, z_2^+, z_3^- \in U$ такие, что $z_i^+ = \tau_i^+ x_i + \bigl(1-\tau_i^+\bigr) y_i \in (x_i, y_i)$, $z_i^- = \tau_i^- x_i + \bigl(1-\tau_i^-\bigr) y_i \in (x_i, y_i)$, причем $\bigl[z_i^+, z_{i+1}^-\bigr] \subset U$. Обозначим ${z'}_i^+ = \tau_i^+ x_i' + \bigl(1-\tau_i^+\bigr) y_i'$, ${z'}_i^- = \tau_i^- x_i' + \bigl(1-\tau_i^-\bigr) y_i'$. Тогда из лемм 3.14, 3.1 непосредственно следует, что $\bigl[{z'}_i^+, {z'}_{i+1}^-\bigr] \subset V$, $i = 1, 2$,

$$|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|, \quad |x_i' - y_j'| = |x_i - y_j|, \quad |y_i' - y_j'| = |y_i - y_j|, \quad i, j = 1, 2, \qquad (74)$$

$$|x_i' - x_j'| = |x_i - x_j|, \quad |x_i' - y_j'| = |x_i - y_j|, \quad |y_i' - y_j'| = |y_i - y_j|, \quad i, j = 2, 3. \qquad (75)$$

Совершая, если необходимо, изометрические преобразования и используя равенства (74), мы можем считать, не умаляя общности, что

$$x_i' = x_i, \quad y_i' = y_i, \quad i = 1, 2. \qquad (76)$$

Тогда с учетом (74), (75) искомые равенства (73) эквивалентны равенствам $x_3' = x_3$, $y_3' = y_3$. Допустим, что эти равенства не выполнены, тогда с учетом (75), (76)

$$x_3' \text{ — отражение точки } x_3 \text{ относительно прямой } x_2 y_2, \qquad (77)$$

$$y_3' \text{ — отражение точки } y_3 \text{ относительно прямой } x_2 y_2. \qquad (78)$$

Предположим сначала, что

$$(x_1, y_1) \cap (x_2, y_2) = (x_2, y_2) \cap (x_3, y_3) = \varnothing. \qquad (79)$$

Не умаляя общности, можно считать, что точки x_1, z_1^+ лежат по одну сторону от прямой $x_2 x_3$, точки x_1, x_2 — по одну сторону от прямой $z_1^+ z_2^-$, точки x_2, x_3 — по одну сторону от прямой $z_2^+ z_3^-$. Из замечания 3.15 и формул (77), (78) следует, что

$$w' = w \text{ для всех } w \in \Gamma_x^U\bigl(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1^+, z_2^-\bigr) \cup \Gamma_y^U\bigl(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1^+, z_2^-\bigr), \qquad (80)$$

$$\begin{gathered} w' \text{ — отражение } w \text{ относительно прямой } x_2 y_2 \\ \text{для всех } w \in \Gamma_x^U\bigl(x_3, y_3, x_2, y_2, z_3^-, z_2^+\bigr) \cup \Gamma_y^U\bigl(x_3, y_3, x_2, y_2, z_3^-, z_2^+\bigr). \end{gathered} \qquad (81)$$

Меняя при необходимости ролями области U и V, мы можем считать, не умаляя общности, что точки x_1, z_1^+, z_3^- лежат по одну сторону от прямой $x_2 y_2$. Теперь геометрически очевидно, что в нашей ситуации всегда реализуется по крайней мере одна из следующих трех возможностей:

(i) существует точка $u_0 \in \Gamma_x^U\bigl(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1^+, z_2^-\bigr) \cap \Gamma_x^U\bigl(x_3, y_3, x_2, y_2, z_3^-, z_2^+\bigr) \setminus \{x_2\}$;

(ii) существует точка $u_0 \in \Gamma_x^U\bigl(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1^+, z_2^-\bigr)$ такая, что (x_2, u_0) является граничным интервалом, пересекающим множество $\bigl(z_2^+, z_3^-\bigr) \cup (x_3, y_3)$, и, таким образом, интервал (x_2, u_0) является U-соединимым с интервалом (x_3, y_3);

(iii) существует точка $u_0 \in \Gamma_x^U\bigl(x_3, y_3, x_2, y_2, z_3^-, z_2^+\bigr)$ такая, что (x_2, u_0) является граничным интервалом, пересекающим множество $\bigl(z_1^+, z_2^-\bigr) \cup (x_1, y_1)$, и, таким образом, интервал (x_2, u_0) является U-соединимым с интервалом (x_1, y_1).

Но каждое из этих утверждений по лемме 3.14 и замечанию 3.15 влечет выполнение следующего утверждения:

(iv) существует точка $u_0 \in \Gamma_x^U\bigl(x_1, y_1, x_2, y_2, z_1^+, z_2^-\bigr) \cup \Gamma_x^U\bigl(x_3, y_3, x_2, y_2, z_3^-, z_2^+\bigr)$ такая, что u_0 не лежит на прямой $x_2 y_2$, $|u_0' - x_i'| = |u_0 - x_i|$, $|u_0' - y_i'| = |u_0 - y_i|$ для всех $i = 1, 2, 3$.

Но это с очевидностью противоречит формулам (77), (78), (80), (81). Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.16 в случае, когда выполнены равенства (79). Если же равенства (79) не выполнены, то доказательство проводится сходным образом, причем оно даже упрощается, нужно только использовать лемму 3.11 и замечание 3.12. Соответствующие выкладки ввиду их простоты мы опускаем. □

Определение 3.17. Будем говорить, что граничные (относительно области U) интервалы (x,y) и (w,z) *U-эквивалентны*, если существует последовательность граничных интервалов (x_i,y_i), $i=1,\dots,m$, таких, что $x_1=x$, $y_1=y$, $x_m=w$, $y_m=z$, причем интервалы (x_i,y_i), (x_{i+1},y_{i+1}) U-соединимы для всех $i=1,\dots,m-1$.

Теперь лемму 3.16 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 3.18. *Граничные (относительно области U) интервалы (x,y), (w,z) U-эквивалентны тогда и только тогда, когда интервалы (x',y'), (w',z') V-эквивалентны. Если граничные интервалы (x,y) и (w,z) U-эквивалентны, то четырехугольник $xywz$ евклидово-изометричен четырехугольнику $x'y'w'z'$.*

Лемма 3.19. *Граничные (относительно области U) интервалы (x,y), (w,z) U-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует компонента U_i (определение U_i см. в разд. 1) такая, что $(x,y)\cup(w,z)\subset \operatorname{Cl} U_i$.*

Доказательство несложное и проводится элементарными средствами, поэтому мы его опускаем.

Лемма 3.20. *Пусть $\tilde{x}\in(\partial_H U_i)\cap(\partial_H U)$, $x=p\tilde{x}$. Тогда существует последовательность точек x_ν,y_ν таких, что (x_ν,y_ν) суть граничные интервалы для области U, $(x_\nu,y_\nu)\subset \operatorname{Cl} U_i$, причем $|\tilde{x}_\nu-\tilde{x}|_{H,U}\le|\tilde{x}_\nu-\tilde{x}|_{H,U_i}\to 0$ при $\nu\to\infty$.*

В связи с леммой 3.20 отметим, что под $(\partial_H U_i)\cap(\partial_H U)$ мы естественным образом понимаем множество элементов $\tilde{x}\in\partial_H U$ таких, что существует последовательность точек $w_\nu\in U_i$, фундаментальная относительно внутренней метрики области U_i, причем $|w_\nu-\tilde{x}|_{H,U}\to 0$.

Доказательство леммы 3.20. Возьмем последовательность w_ν. Тогда в силу соответствующих определений сразу же имеем сходимость $|w_\nu-\tilde{x}|_{H,U}\le |w_\nu-\tilde{x}|_{H,U_i}\to 0$ при $\nu\to\infty$.

Положим $R_\nu=\operatorname{dist}(w_\nu,\partial U)$. Вследствие выбора w_ν и R_ν имеем, что $R_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$ и

$$\forall\nu\quad (B(w_\nu,R_\nu)\subset U\ \&\ \exists x_\nu\in\overline{B}(w_\nu,R_\nu)\cap\partial U). \tag{82}$$

По построению имеем также включения $(x_\nu,w_\nu)\subset U_i$, $x_\nu\in\partial U_i$. Если мы возьмем последовательность точек из (открытого) промежутка (x_ν,w_ν), сходящуюся к точке x_ν, то она будет порождать некоторый элемент хаусдорфовой границы $\tilde{x}_\nu\in(\partial_H U_i)\cap(\partial_H U)$. Отсюда, в свою очередь, получаем, что $|\tilde{x}_\nu-w_\nu|_{H,U}=|\tilde{x}_\nu-w_\nu|_{H,U_i}=R_\nu\to 0$ при $\nu\to\infty$. Далее, геометрически очевидно, что

$$\forall\nu\ \exists y_\nu\in\partial U\quad ((x_\nu,y_\nu)\subset U\ \&\ (x_\nu,y_\nu)\cap B(w_\nu,R_\nu)\ne\varnothing). \tag{83}$$

В самом деле, если это неверно, то ввиду формулы (82) полуплоскость, проходящая через точку x_ν и содержащая шар $B(w_\nu,R_\nu)$, целиком лежит в области U. Но это противоречит включению $w_\nu\in U_i$ и определению области U_i.

Итак, формула (83) верна. Тогда из определения U_i и предыдущих построений немедленно получаем, что $(x_\nu,y_\nu)\subset\operatorname{Cl}U_i$. Последнее включение вместе с установленными ранее фактами дает нам справедливость искомого утверждения леммы 3.20. □

Лемма 3.21. *Можно перенумеровать компоненты U_i, V_i таким образом, что эта нумерация задает биективное соответствие между компонентами U_i и V_i, причем найдутся евклидово-изометрические отображения $Q_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ такие, что для каждой компоненты U_i справедливо равенство $Q_i(U_i) = V_i$. Далее, включение $\tilde{x} \in (\partial_H U_i) \cap (\partial_H U)$ справедливо тогда и только тогда, когда $f(\tilde{x}) \in (\partial_H V_i) \cap (\partial_H V)$, и в случае выполнения этих включений справедливо также равенство $x' = Q_i(x)$, где $x = p\tilde{x}$. Наконец, включение $y \in U \cap \partial U_i$ выполняется тогда и только тогда, когда справедливо включение $Q_i(y) \in V \cap \partial V_i$.*

Лемма 3.21 является простым следствием лемм 2.1, 3.18–3.20, подробности опускаем. Всюду в дальнейшем будем считать, что компоненты U_i, V_i занумерованы так, как указано в лемме 3.21.

Из леммы 3.21 немедленно получаем следующий результат.

Лемма 3.22. *Если $F_U = \varnothing$ (определение F_U см. в разд. 1), то область U однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

Замечание 3.23. Ввиду леммы 3.22 будем всегда предполагать далее, если не оговорено противное, что $F_U \neq \varnothing$.

Замечание 3.24. Пусть $x \in (\partial F_U) \cap (\partial U)$. Тогда очевидно, что существует единственный[5] элемент $\tilde{x} \in (\partial_H F_U) \cap (\partial_H U)$ такой, что $p\tilde{x} = x$. В этом случае, если не оговорено противное, будем обозначать $x' = pf(\tilde{x})$.

Из леммы 3.21 и замечания 3.24 легко следует также следующий результат.

Лемма 3.25. *Если $x \in (\partial F_U) \cap (\partial U)$, то $f(\tilde{x}) \in (\partial_H F_V) \cap (\partial_H V)$, в частности, $x' \in (\partial F_V) \cap (\partial V)$. Если же $x \in (\partial F_U) \setminus \partial U$, то существует единственный номер $i = i(x)$ такой, что справедливы включения $x \in U \cap \partial U_i$, $Q_i(x) \in V \cap \partial V_i$.*

Имеет место тривиальная геометрическая

Лемма 3.26. *Граница ∂F_U имеет не более двух компонент связности. При этом если граница ∂F_U имеет две компоненты связности, то эти компоненты связности суть две параллельные прямые, а само множество F_U представляет собой объединение двух полуплоскостей, ограниченных этими прямыми.*

Лемма 3.26 поможет нам вывести следующие две леммы.

Лемма 3.27. *Граница ∂F_U содержит две компоненты связности тогда и только тогда, когда граница ∂F_V содержит две компоненты связности.*

Доказательство основано на применении лемм 3.21, 3.25, 3.26 и общих фактов, связанных с непрерывностью отображения f. Детали выкладок ввиду их простоты опускаем. □

Лемма 3.28. *Если граница ∂F_U несвязна, то область U однозначно определяется относительной метрикой своей хаусдорфовой границы.*

Доказательство легко проводится применением лемм 3.21, 3.25–3.27. □

Лемма 3.29. *Пусть каждая из границ ∂F_U, ∂F_V является связным множеством (т. е. выпуклой кривой). Определим отображение $\theta : \partial F_U \to \mathbb{R}^2$ по правилу*

$$\theta(w) = \begin{cases} w', & w \in (\partial F_U) \cap (\partial U); \\ Q_i(w), & w \in U \cap \partial U_i. \end{cases}$$

[5] Здесь мы используем замечание 3.13.

Тогда θ является гомеоморфизмом между выпуклыми кривыми ∂F_U и ∂F_V, причем этот гомеоморфизм сохраняет длину дуг (т. е. для любых двух точек x, y длина соединяющей их дуги, содержащейся в множестве ∂F_U, совпадает с длиной образа этой дуги при отображении θ).

Доказательство. Тот факт, что θ является гомеоморфизмом между выпуклыми кривыми ∂F_U и ∂F_V, следует из построения и лемм 3.21, 3.25 (см. также замечания 3.24, 3.2). Докажем теперь, что этот гомеоморфизм сохраняет длину дуг. Возьмем произвольно пару точек $x, y \in \partial F_U$. Так как все Q_i являются изометриями, то ввиду построения θ можно считать, не умаляя общности, что $x, y \in \partial U$. Обозначим через Γ выпуклую дугу, содержащуюся в ∂F_U и соединяющую точки x, y, и положим $\Gamma_1 = \Gamma \cap \partial U$. Пусть $\gamma : [0, \Phi] \to \Gamma$ — некоторая параметризация дуги Γ.

Поскольку Γ — выпуклая дуга и все крайние точки этой дуги содержатся в множестве Γ_1, то геометрически очевидно, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует разбиение $0 < \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_N = \Phi$, $N = N(\varepsilon)$, такое, что $\forall \nu = 0, 1, \dots, N \quad \gamma(\varphi_\nu) \in \Gamma_1$ и

$$\forall \nu = 0, 1, \dots, N-1 \quad \frac{l(\gamma([\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}]))}{|\gamma(\varphi_\nu) - \gamma(\varphi_{\nu+1})|} \le 1 + \varepsilon. \tag{84}$$

Используя определение хаусдорфовой метрики и определение множества F_V, получаем, что

$$\forall \nu = 0, 1, \dots, N-1 \quad |f(\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)}) - f(\widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})})|_{H,V} \le l(\theta(\gamma([\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}]))). \tag{85}$$

Из формул (84), (85) заключаем, что

$$\begin{aligned}\forall \nu = 0, 1, \dots, N-1 \qquad & \frac{1}{1+\varepsilon} l(\gamma([\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}])) \le |\gamma(\varphi_\nu) - \gamma(\varphi_{\nu+1})| \\ \le |\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)} - \widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})}|_{H,U} &= |f(\widetilde{\gamma(\varphi_\nu)}) - f(\widetilde{\gamma(\varphi_{\nu+1})})|_{H,V} \le l(\theta(\gamma([\varphi_\nu, \varphi_{\nu+1}]))).\end{aligned} \tag{86}$$

Из произвольности $\varepsilon > 0$ и формулы (86) вытекает, что $l(\Gamma) \le l(\theta(\Gamma))$. Обратное неравенство получается, если мы в рассуждениях поменяем местами области U и V. Лемма 3.29 доказана. □

Доказательство п. (II) теоремы 1.1. Необходимость в п. (II) следует из уже доказанного п. (I) и лемм 3.1, 3.21, 3.28, 3.29. Достаточность в п. (II) очевидна: при наличии гомеоморфизма $\theta : \partial F_U \to \partial F_V$ и изометрий $Q_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ со свойствами (IIa)–(IIc) очень легко естественным образом построить изометрию $f : \partial_H U \to \partial_H V$. □

Доказательство теоремы 1.4. Пусть U — отличная от полупространства выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$. При этих условиях элементы хаусдорфовой границы $\partial_H U$ можно отождествить с элементами обычной евклидовой границы ∂U. Предположим, что область $V \subset \mathbb{R}^n$ такова, что имеется изометрия $f : \partial_H U \to \partial_H V$. Тогда изометрия f естественным образом порождает отображение $g : \partial U \to \partial V$ по формуле $g(x) = pf(x)$. Нетрудно видеть, что вследствие выпуклости области U полученное отображение g будет 1-липшицевым. Имеет место следующая элементарная

Лемма 3.30. *Пусть U — отличная от полупространства выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, и пусть $[x, y] \subset \partial U$. Тогда найдется последовательность граничных (относительно области U) интервалов (x_ν, y_ν) такая, что $\forall z \in [x, y]$ $\operatorname{dist}(z, [x_\nu, y_\nu]) \big(= \inf\limits_{w \in [x_\nu, y_\nu]} |z - w|\big) \to 0$ при $\nu \to \infty$.*

Из этой леммы, леммы 3.1 и 1-липшицевости отображения g вытекает, что на самом деле $|g(x) - g(y)| = |x - y|$ для всех $x, y \in \partial U$. Отсюда следует, что существует евклидова изометрия $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что $Q(x) = g(x)$ для всех $x \in \partial U$. Нетрудно видеть, что $Q(U) = V$. Теорема 1.4 доказана. $\square$

В заключение автор выражает глубокую признательность профессору А. П. Копылову за постановку задач и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.
2. *Копылов А. П.* О граничных значениях отображений, близких к изометрическим // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 120–131.
3. *Александров В. А.* Изометричность областей в $\mathbb{R}^n$ и относительная изометричность их границ // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 3–13.
4. *Александров В. А.* Однозначная определенность областей с нежордановыми границами // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 3–12.
5. *Кузьминых А. В.* Об изометричности областей, границы которых изометричны в относительных метриках // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 3. С. 91–99.
6. *Копылов А. П.* Об однозначной определенности областей в евклидовых пространствах // Современная математика и ее приложения. 2007. Т. 21. С. 138–166.
7. *Троценко Д. А.* Однозначная определенность ограниченных областей метрикой границы, индуцированной метрикой области // Всесоюз. конф. по геометрии «в целом», Новосибирск, сент. 1987 г.: Тез. докл. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. С. 122.

Статья поступила 15 августа 2006 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru