Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 517.95

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШАРЕ

Т. Ш. Кальменов, Б. Д. Кошанов

Аннотация. В явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений в пространстве произвольной размерности. Полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, задача Дирихле, функция Грина.

1. Вспомогательные утверждения и основной результат

Постановка задачи. *Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области* $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N},\ \delta > 0)$ *с границей* $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^i} u\bigg|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \tag{2}$$

где $\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}$ *— нормальная производная вдоль* $\partial\Omega_\delta$, Δ *— оператор Лапласа.*

Для этого сформулируем несколько известных утверждений.

Утверждение 1. *Существует единственная функция* $G_{2m,n}(x,y)$ *такая, что*

1) *она удовлетворяет условиям*

$$\Delta_x^m G_{2m,n}(x,y) = \delta(x-y), \quad \frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^i} G_{2m,n}(x,y)\bigg|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

где $\delta(x-y)$ *— дельта-функция Дирака,*

2) *при любых* $f(y) \in L_2(\Omega_\delta)$ *решение задачи* (1), (2) *представляется в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_\delta} G_{2m,n}(x,y) f(y)\, dy,$$

3) *она симметричная, т. е. при любых* $x, y \in \Omega_\delta$ *выполняется тождество*

$$G_{2m,n}(x,y) = G_{2m,n}(y,x).$$

Такая функция $G_{2m,n}(x,y)$ называется *функцией Грина задачи* (1), (2).

В целях сокращения объема статьи в дальнейшем считаем, что n — нечетное число. Справедливы следующие леммы.

Лемма 1 [1, 2]. *Фундаментальное решение уравнения* (1) *задается формулой*

$$\varepsilon_{2m,n} = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}. \tag{3}$$

Лемма 2 [3]. (a) *При любых* $x, y \in \Omega_\delta$ *выполняется тождество*

$$\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right| = \left|\frac{x}{\delta}\right| \left|y - \frac{x}{|x|^2}\delta^2\right|. \tag{4}$$

(б) *При* $x \in S_\delta$ *и для любого* $y \in \Omega_\delta$ *выполняется тождество*

$$\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right| = |y-x|. \tag{5}$$

Доказательство. В единичном шаре ($\delta = 1$) справедливо равенство

$$\begin{aligned} |x| \left|y - \frac{x}{|x|^2}\right| &= \left||x|y - \frac{x}{|x|}\right| = [|x|^2|y|^2 - 2(x,y) + 1]^{1/2} \\ &= \left||y|x - \frac{y}{|y|}\right| = |y| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\right|, \end{aligned}$$

откуда следуют утверждения леммы. Выражение для константы $c_{2m,n}$ будет указано ниже.

Теорема 1. (A) *В случае нечетного* n *функция Грина задачи Дирихле* (1), (2) *представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y), \tag{6}$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}, \tag{7}$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} g^k_{2m,n}(x,y) &= (2m-n)(2m-2-n)\dots(2m-2k+4-n)c_{2m,n} \\ &\times \left[\left|\frac{y}{\delta}\right| \left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n} \left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1} \left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1} \\ &\times \frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 2, \dots, m, \end{aligned} \tag{9}$$

$$c_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)!2^{m-1}(2m-n)(2(m-1)-n)\dots(2-n)} \cdot \frac{1}{(2\pi)^n}. \tag{10}$$

(B) *Утверждение* (A) *остается справедливым при четных* n, *если* $2m < n$.

(C) *Когда* n *четное и* $2m \geqslant n$, *функция Грина задачи Дирихле* (1), (2) *представима в виде*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|, \tag{11}$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n} \ln\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right], \tag{12}$$

$$\begin{aligned} g^k_{2m,n}(x,y) &= (2m-n)(2m-2-n)\dots(2m-2k+4-n)c_{2m,n} \\ &\times \left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n} \ln\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]\left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1} \\ &\times \left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1} \frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 2,\dots,m, \end{aligned} \tag{13}$$

$$c_{2m,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}. \tag{14}$$

2. Краткое доказательство теоремы

Требуемая функция Грина строится за m шагов, где m — степень оператора Лапласа в уравнении (1). На первом шаге построим первое приближение $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)$ функции Грина, которое является фундаментальным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям:

(i) оно является симметричным относительно перестановки (x,y) на (y,x),

(ii) $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = 0$.

Для этого вводим компенсирующую функцию

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}, \tag{15}$$

которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Delta^m_x g^1_{2m,n}(x,y) = 0, \quad g^1_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = \varepsilon_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta}.$$

При проверке последнего соотношения существенно использовалась лемма 2. Поэтому первое приближение функции Грина вводим по формуле

$$\varepsilon^1_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y).$$

На втором шаге вычислим производные по $\vec{n}_x = \frac{x}{|x|}$ от $\varepsilon_{2m,n}(x,y)$, $g^1_{2m,n}(x,y)$ и составим разность их следов на границе $S_\delta = \partial\Omega_\delta$. В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} &= \left[\frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)\right]\Big|_{|x|=\delta} \\ &= \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}} g^1_{2m-2,n}(x,y)\left(1 - \frac{|y|^2}{\delta^2}\right)|x|\Big|_{|x|=\delta}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь учтено, что на границе значения функций $\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)$, $g^1_{2m-2,n}(x,y)$ совпадают, т. е. $\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = g^1_{2m-2,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}$. Поэтому введем новую компенсирующую функцию $g^2_{2m,n}(x,y)$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta^2_x g^2_{2m,n}(x,y) = 0, \quad g^2_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta} = 0 \quad \big(g^2_{2m,n}(x,y) = g^2_{2m,n}(y,x)\big),$$

$$\frac{\partial g^2_{2m,n}}{\partial\vec{n}_x}\Big|_{|x|=\delta} = \frac{\partial\varepsilon^1_{2m,n}}{\partial\vec{n}_x}\Big|_{|x|=\delta} = \left[\frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)\right]\Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда единственным образом определяется функция $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$g^2_{2m,n}(x,y) = \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}} g^1_{2m-2,n}(x,y) \left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right) \left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right) \frac{\delta^2}{(-2)^1 1!}. \quad (17)$$

В результате получим второе приближение функции Грина:

$$\varepsilon^2_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - g^2_{2m,n}(x,y), \quad (18)$$

которое удовлетворяет условиям

$$\Delta^m_x \varepsilon^2_{2m,n}(x,y) = \delta(x-y), \quad \varepsilon^2_{2m,n}(x,y)|_{|x|=\delta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} \varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0.$$

Выполним еще раз аналогичные вычисления: найдем вторые производные от второго приближения функции Грина, рассмотрим их следы, построим компенсирующую функцию и напишем третье приближение функции Грина. Продемонстрируем сказанное. Берем вторые производные по нормали к $\partial\Omega_\delta$ в точке x от функций $\varepsilon_{2m,n}(x,y)$, $g^1_{2m,n}(x,y)$, $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} \varepsilon_{2m,n}(x,y) = \frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}} \times \varepsilon_{2m-4,n}(x,y) \left(|x| - \frac{(x,y)}{|x|}\right)^2 + \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}} \varepsilon_{2m-2,n}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} g^1_{2m,n}(x,y) = \frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}} \times g^1_{2m-4,n}(x,y) \left(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|}\right)^2 + \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}} g^1_{2m-2,n}(x,y) \frac{|y|^2}{\delta^2};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} g^2_{2m,n}(x,y) &= \frac{(2m-n)(2m-2-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-6,n}} \\ &\times g^1_{2m-6,n}(x,y) \left(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|}\right)^2 \left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right) \left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right) \left(-\frac{\delta^2}{2}\right) \\ &+ \frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}} g^1_{2m-4,n}(x,y) \frac{|y|^2}{\delta^2} \left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right) \left(-\frac{\delta^2}{2}\right) \\ &+ 2\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}} g^1_{2m-4,n}(x,y) \left(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|}\right) \left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right) |x| \\ &+ \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}} g^1_{2m-2,n}(x,y) \left(1 - \frac{|y|^2}{\delta^2}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим на границе $S_\delta = \partial\Omega_\delta$ след второго приближения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} \varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} \varepsilon_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} g^1_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}^2_x} g^2_{2m,n}(x,y)\right]\Big|_{|x|=\delta} \\ &= \frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}} g^1_{2m-4,n}(x,y) \left(1 - \frac{|y|^2}{\delta^2}\right)^2 |x|^2\Big|_{|x|=\delta}. \quad (19) \end{aligned}$$

Новая компенсирующая функция $g^3_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta^3_x g^3_{2m,n}(x,y)=0,\quad g^3_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=0\quad \big(g^3_{2m,n}(x,y)=g^3_{2m,n}(y,x)\big),$$

$$\frac{\partial g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x}\bigg|_{|x|=\delta}=0,\quad \frac{\partial^2 g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x^2}\bigg|_{|x|=\delta}=\frac{\partial^2\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x^2}\bigg|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда единственным образом определяется функция $g^3_{2m,n}(x,y)$:

$$g^3_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-m)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\times g^1_{2m-4,n}(x,y)\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^2\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^2\frac{\delta^4}{(-2)^2 2!}. \tag{20}$$

Таким образом, третье приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{3}g^k_{2m,n}(x,y), \tag{21}$$

где каждое слагаемое определяется по формулам (3), (15), (17), (20) и $\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$\Delta^m_x\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),\quad \varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec n_x}\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\bigg|_{|x|=\delta}=0,\quad \frac{\partial^2}{\partial\vec n_x^2}\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\bigg|_{|x|=\delta}=0.$$

Аналогичным образом получаем компенсирующие функции при всех $2\le k<m$:

$$g^k_{2m,n}(x,y)=(2m-n)(2m-2-n)\dots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!} \tag{22}$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\Delta^k_x g^k_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$\frac{\partial^i g^k_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x^i}\bigg|_{|x|=\delta}=0,\quad i=\overline{0,k-2}\ \big(g^k_{2m,n}(x,y)=g^k_{2m,n}(y,x)\big),\dots,$$

$$\frac{\partial^{k-1}g^k_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x^{k-1}}\bigg|_{|x|=\delta}=\frac{\partial^{k-1}\varepsilon^{k-1}_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec n_x^{k-1}}\bigg|_{|x|=\delta};$$

k-е приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon^k_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{k}g^j_{2m,n}(x,y) \tag{23}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta^m_x\varepsilon^k_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),\quad \frac{\partial^i}{\partial\vec n_x^i}\varepsilon^k_{2m,n}(x,y)\bigg|_{|x|=\delta}=0,\quad i=\overline{0,k-1}. \tag{24}$$

Таким образом, m-е приближение функции Грина будет совпадать с искомой функцией $G_{2m,n}(x,y)$:

$$\varepsilon^m_{2m,n}(x,y) = G_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n} - c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n}$$
$$- \sum_{k=2}^{m}(2m-n)(2m-2-n)\dots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}$$
$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}. \tag{25}$$

Наконец, применение метода математической индукции дает полное доказательство утверждения (A) теоремы 1. Утверждения (B), (C) доказываются так же, как было доказано утверждение (A).

Замечание. Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеется в работе [4]. Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но и для полуплоскости и других канонических областей [5–7]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами.

Авторы выражают благодарность д.ф.-м.н., профессору Б. Е. Кангужину за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.
4. *Begehr H., Vanegas C. J.* Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation // Math. Nachr. 2006. V. 279. P. 38–57.
5. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д., Искакова У. А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы, 2005. 54 с. (Препринт).
6. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д.* О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Докл. НАН РК. 2006. Т. 5. С. 9–12.
7. *Kalmenov T. Sh., Koshanov B. D.* Representation Green function of the Dirichlet problems for the bi-harmonic equation // Intern. congr. math., August 22–30, 2006: abstracts. Madrid, 2006. P. 416.

Статья поступила 16 января 2007 г. окончательный вариант — 16 мая 2007 г.

Кальменов Танысбек Шарипович, Кошанов Бакытбек Данебекович
Центр физико-математических исследований МОН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
koshanov@list.ru