Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 519.542

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТОЙ ГРУППЫ $PSL_5(5)$ ПО МНОЖЕСТВУ ПОРЯДКОВ ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

М. Р. Дарафшех, А. Садрудини

Аннотация. Пусть G — конечная группа и $\omega(G)$ — множество порядков элементов из G. Для простой группы $PSL_5(5)$ доказано, что если G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(PSL_5(5))$, то либо $G \cong PSL_5(5)$, либо $G \cong PSL_5(5) : \langle\theta\rangle$, где θ — графовый автоморфизм $PSL_5(5)$ порядка 2.

Ключевые слова: специальная проективная линейная группа, порядок элемента.

1. Введение. Для конечной группы G через $\omega(G)$ будем обозначать множество порядков элементов из G и называть его *спектром* G. Это множество замкнуто и частично упорядочено по делимости, поэтому оно однозначно определяется множеством $\mu(G)$ его максимальных элементов. Пусть $h(G)$ — число неизоморфных конечных групп G, имеющих $\omega(G)$ множеством порядков их элементов. Группу G называют *характеризуемой* или *распознаваемой* по множеству $\omega(G)$, если $h(G) = 1$, *k-распознаваемой*, если $h(G) = k$, и *нераспознаваемой*, если $h(G) = \infty$.

Для конечной группы G множество $\omega(G)$ задает граф, у которого вершины суть простые делители порядка группы G и два различных простых p и q смежны, если в G есть элемент порядка pq. Этот граф определен Грюнбергом и Кегелем, поэтому обозначается через $GK(G)$ и называется *графом Грюнберга — Кегеля* группы G. Мы будем также называть $GK(G)$ *графом простых чисел группы* G. Связные компоненты графа $GK(G)$ будем обозначать через π_i, $1 \leq i \leq t(G)$, где $t(G)$ — количество связных компонент графа. Определим π_1 как компоненту, содержащую простое число 2 для группы четного порядка.

В [1–3] доказано, что группы $L_2(q)$, $q > 3$, $q \neq 9$, характеризуемы. Группы $L_3(q)$, $q = 7$, $q = 2^m$, распознаваемы [4]. Относительно групп $G = PSL_3(q)$, q нечетно, в [5] доказано, что $h(G) = 1$ при $q = 11, 13, 19, 23, 25, 27$; $h(G) = 2$ для $q = 17, 29$. Группа $PSL_4(3)$ характеризуема [6].

Цель настоящей статьи — изучить свойство распознаваемости простой группы $PSL_5(5)$. В частности, будет доказанно, что простая группа $PSL_5(5)$ 2-распознаваема по множеству порядков ее элементов. Это будет следовать из гипотезы Ши и Би, справедливой для $PSL_5(5)$. Иначе говоря, если $\omega(G) = \omega(PSL_5(5))$ и $|G| = |PSL_5(5)|$, то $G \cong PSL_5(5)$.

2. Предварительные результаты. Приведем некоторые утверждения, используемые при доказательстве основной теоремы нашей статьи.

Лемма 1 [7]. *Пусть G — конечная разрешимая группа, все элементы которой примарны. Тогда $|\pi(G)| \leq 2$.*

Перечислим некоторые свойства фробениусовой группы, доказательства которых могут быть найдены в [8].

Лемма 2. *Пусть G — фробениусова группа с ядром F и дополнением C. Тогда*

(a) *F — нильпотентная группа; в частности, граф простых чисел F полный.*

(b) $|F| \equiv 1 (\mathrm{mod}\,|C|)$.

(c) *Каждая подгруппа в C порядка pq, где p и q — (необязательно различные) простые числа, циклична. В частности, каждая силовская подгруппа в C нечетного порядка циклична, и силовская 2-подгруппа в C либо циклична, либо является обобщенной группой кватернионов. Если C неразрешима, то в C есть подгруппа индекса не более 2, изоморфная $SL_2(5) \times M$, где M имеет циклические силовские p-подгруппы порядка, взаимно простого с $2, 3, 5$.*

Ниже фробениусова группа с ядром F и дополнением C обозначается через $F : C$. Если F и C имеют соответственно порядки a и b, то $F : C$ обозначается также через $a : b$.

Определение. 2-*Фробениусова группа* — это группа G, имеющая нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что K и $\frac{G}{H}$ — фробениусовы группы с ядрами H и $\frac{K}{H}$ соответственно.

Лемма 3. *Пусть G — 2-фробениусова группа. Тогда G разрешима.*

Доказательство см. в [9]. $\square$

Для групп с несвязным графом простых чисел полезен следующий результат.

Лемма 4 [10]. *Если G — группа такая, что $t(G) \geq 2$, то она имеет одну из следующих структур:*

(a) *G — фробениусова или 2-фробениусова группа;*

(b) *G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq N \triangleleft G_1 \trianglelefteq G$ такой, что $\pi(N) \cup \pi\big(\frac{G}{G_1}\big) \subseteq \pi_1$ и $\overline{G}_1 = \frac{G_1}{N}$ — неабелева простая группа.*

Лемма 5 [11]. *Пусть G — конечная группа, $N \triangleleft G$ и $\frac{G}{N}$ — фробениусова группа с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $\frac{NC_G(N)}{N}$, то $p|C| \in \omega(G)$ для некоторого простого делителя p числа $|N|$.*

Простое число r называют *примитивным делителем* $q^m - 1$, если $r \mid q^m - 1$, но $r \nmid q^i - 1$ для всех $0 < i < m$.

Лемма 6 [12]. *Пусть L — конечная простая группа $L_n(q)$, $d = (q-1, n)$.*

(1) *Если существует примитивный простой делитель r числа $q^n - 1$, то L включает фробениусову подгруппу с ядром порядка r и циклическим дополнением порядка n.*

(2) *L содержит фробениусову подгруппу с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $\frac{(q^{n-1}-1)}{d}$.*

В дальнейшем мы будем обращаться к некоторому внешнему автоморфизму общей линейной группы.

Определение. Пусть $\theta : GL_n(q) \longrightarrow GL_n(q)$ — отображение, переводящее A в $(A^t)^{-1}$, где A^t — транспонированная к A матрица и $n \geq 2$. Тогда θ — инволютивный внешний автоморфизм $G = GL_n(q)$, если $(n, q) \neq (2, 2)$. Этот автоморфизм называют *графовым автоморфизмом* группы G.

Согласно [13] если $(n, q-1) = 1$ и $q = p$ — простое число, то для $n \geq 3$ имеем $\mathrm{Out}(PSL_n(q)) \cong \mathbb{Z}_2$. Поэтому для $PSL_5(5)$ единственным внешним автоморфизмом является графовый автоморфизм.

Конечные простые группы G с несвязным $GK(G)$ классифицированы в [10, 14, 15]. Перечень таких групп можно найти в [16]. Большинство специальных проективных линейных групп имеют связный граф Грюнберга — Кегеля. Такие группы с $t(G) \geq 2$ описаны в табл. 1.

Таблица 1. Простые группы $G = PSL_n(q)$ с $t(G) \geq 2$ (p простое нечетное)

G	Условие	π_1	π_2	π_3	π_4
$PSL_p(q)$	$(p,q) \neq (3,2)$, $(3,4)$	$\pi\left(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1)\right)$	$\pi\left(\frac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}\right)$	—	—
$PSL_{p+1}(q)$	$q-1 \mid p+1$	$\pi\left(q(q^{p+1}-1)\times\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1)\right)$	$\pi\left(\frac{q^p-1}{q-1}\right)$	—	—
$PSL_2(q)$	$q \equiv 1 (\operatorname{mod} 4)$	$\pi(q-1)$	$\{p\}$	$\pi\left(\frac{q+1}{2}\right)$	—
$PSL_2(q)$	$q \equiv -1 (\operatorname{mod} 4)$	$\pi(q+1)$	$\{p\}$	$\pi\left(\frac{q-1}{2}\right)$	—
$PSL_2(q)$	$q > 2, q$ четно	$\{2\}$	$\pi(q-1)$	$\pi(q+1)$	—
$PSL_3(4)$	–	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{5\}$	$\{7\}$

Тем самым если $q = 5$ и p — нечетное простое число, то $t(PSL_n(5)) = 2$, где n равно p или $p+1$. Связные компоненты графа Грюнберга — Кегеля для $PSL_n(5)$ суть $\pi_1 = \pi\left(5\prod_{i=1}^{p-1}(5^i-1)\right)$ или $\pi\left(5(5^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(5^i-1)\right)$ соответственно в случаях $n = p$ или $n = p+1$. В любом случае вторая компонента $\pi_2 = \pi\left(\frac{5^p-1}{4}\right)$.

Для группы $PSL_5(5)$ имеем $|PSL_5(5)| = 2^{11}\cdot 3^2\cdot 5^{10}\cdot 11\cdot 13\cdot 31\cdot 71$, и компоненты ее графа простых чисел — это $\pi_1 = \{2,3,5,13,31\}$ и $\pi_2 = \{11,71\}$. Для нахождения множества порядков элементов $PSL_5(5)$ используем [17].

Имеем $\mu(PSL_5(5)) = \{120, 620, 624, 744, 781\}$. Поэтому $\omega(PSL_5(5)) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 20, 24, 26, 30, 31, 39, 40, 48, 52, 60, 62, 71, 78, 93, 104, 120, 124, 155, 156, 186, 208, 248, 310, 312, 372, 620, 624, 744, 781\}$ и граф простых чисел для группы $PSL_5(5)$ имеет вид, изображенный на рис. 1.

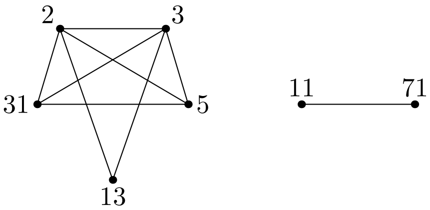

Рис. 1. Граф простых чисел группы $PSL_5(5)$.

Лемма 7. *Пусть G — простая группа лиева типа. Если $\{11,71\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2,3,5,11,13,31,71\}$, то G изоморфна $A_4(5) \cong PSL_5(5)$.*

Доказательство. Пусть $G = L(q)$ — группа лиева типа над конечным полем порядка $q = p^s$, где p простое и s натуральное. Порядки таких групп описаны в [18] и равны произведениям чисел вида $p^k \pm 1$, где $k \in \mathbb{N}$. Так как p делит $|G|$, то p может быть одним из чисел: $2, 3, 5, 11, 13, 31, 71$.

Если $p = 2$, то ясно, что порядок 2 по модулю 71 равен 35 и наибольшее целое k, для которого $2^k + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 11)$, равно 5. Однако $7 \mid 2^3 - 1$ и $7 \nmid |G|$. Отсюда согласно [18] других кандидатов для G не возникает.

Если $p = 3$, то порядок 3 по модулю 11 равен 5 и порядок 3 по модулю 71 равен 35. Но $7 \mid 3^6 - 1$ и $7 \nmid |G|$. Мы не получаем возможности для G и в этом случае.

Если $p = 5$, то $11 \mid 5^5 - 1$ и $71 \mid 5^5 - 1$, откуда $G \cong A_4(5) \cong PSL_5(5)$.

Если $p = 11$, то порядок 11 по модулю 71 равен 35. Так как $11^3 - 1 = 7 \times 190$ и $7 \notin \pi(G)$, и в этом случае возможности нет.

Если $p = 13$, наибольшее целое k, для которого $13^k + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 11 \text{ или } 71)$, есть 5 или 35. Поскольку $7 \mid 13 + 1$ и $7 \nmid |G|$, снова получили противоречие.

Если $p = 31$, то порядок 31 по модулю 11 равен 5, а по модулю 71 равен 70 и наибольшее целое k, для которого $31^k + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 71)$, равно 35. Так как $7 \mid 31^3 + 1$, но $7 \nmid |G|$, приходим к противоречию.

Если $p = 71$, то $11 \mid 71^5 - 1$, но $7 \mid 71 - 1$, и так как $7 \notin \pi(G)$, снова противоречие. $\square$

3. Доказательство основной теоремы. В этом пункте докажем 2-распознаваемость группы $PSL_5(5)$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа. Если $\omega(G) = \omega(PSL_5(5))$, то G изоморфна $PSL_5(5)$ или $PSL_5(5) : \langle\theta\rangle$, где θ — графовый автоморфизм.*

Доказательство. Имеем $\mu(PSL_5(5)) = \{120, 620, 624, 744, 781\}$. Пусть G — конечная группа такая, что $\mu(G) = \mu(PSL_5(5))$. Тогда компоненты графа простых чисел группы G суть $\pi_1 = \{2, 3, 5, 13, 31\}$ и $\pi_2 = \{11, 71\}$. По лемме 4 G имеет одну из следующих структур:

(a) G — фробениусова или 2-фробениусова группа;

(b) G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq N \triangleleft G_1 \trianglelefteq G$ таким, что $\pi(N) \cup \pi\big(\frac{G}{G_1}\big) \subset \pi_1$ и $\overline{G}_1 := \frac{G_1}{N}$ — неабелева простая группа и $t(\overline{G}_1) \geq 2$.

Доказательство проведем в несколько шагов.

(i) G не может быть разрешимой.

Если G — разрешимая группа, то должна существовать $\{5, 11, 13\}$-холлова подгруппа L в G. По условию $\omega(G) = \omega(PSL_5(5))$ и все элементы L имеют порядки простых степеней. Поэтому согласно лемме 1 должно быть $\pi(L) \leq 2$; противоречие.

(ii) G не является ни фробениусовой, ни 2-фробениусовой группой. Предположим сначала, что G фробениусова с ядром H и дополнением C. Из леммы 2(a) известно, что H — нильпотентная, а следовательно, разрешимая группа. Если C разрешима, то G разрешима, что противоречит (i). Если C неразрешима, то по лемме 2(c) C имеет подгруппу индекса не больше 2, изоморфную $SL_2(5) \times M$, где M имеет циклическую силовскую подгруппу порядка, взаимно простого с $2, 3, 5$. Найдется простое число p в π_1 такое, что p делит $|M|$ ($p = 13, 31$). Тогда $13 \times 5 \in \omega(G)$ или $31 \times 5 \in \omega(G)$; противоречие. Поэтому G не фробениусова. По лемме 2 G не может быть 2-фробениусовой.

(iii) Существует нормальный ряд $1 \trianglelefteq N \triangleleft G_1 \trianglelefteq G$ такой, что $\frac{G}{G_1}$ и N суть π_1-группы, $\overline{G}_1 := \frac{G_1}{N}$ — неабелева группа и $t(\overline{G}_1) \geq 2$. Можно считать, что $\frac{G}{N} \leq Aut(\overline{G}_1)$. Отметим, что одна из компонент графа простых чисел группы $\overline{G}_1$ должна быть $\{11, 71\}$, откуда 11 и 71 оба делят $|\overline{G}_1|$.

Согласно классификации конечных неабелевых простых групп возможности для $\overline{G}_1$ таковы: знакопеременная группа A_n, $n \geq 5$, — одна из 26 спорадических простых групп и конечных простых групп лиева типа. Разберемся с указанными классами по отдельности.

Случай 1. Пусть $\overline{G}_1$ — знакопеременная группа A_n, $n \geq 5$. Так как $11 \in \omega(\overline{G}_1)$, имеем $n \geq 11$, откуда $7 \in \omega(G)$; противоречие.

Случай 2. В силу [18] легко увидеть, что $\overline{G}_1$ не может быть изоморфна спорадической простой группе.

Случай 3. Пусть, наконец, $\overline{G}_1$ — простая группа лиева типа. По лемме 7 $\overline{G}_1 \cong PSL_5(5)$. Поэтому $\frac{G}{N} \leq \mathrm{Aut}(PSL_5(5))$, значит, $\frac{G}{N} \cong PSL_5(5)$ или $\frac{G}{N} \cong PSL_5(5) : \langle\theta\rangle$, где θ — графовый автоморфизм $PSL_5(5)$.

Покажем теперь, что $N = 1$. Предположим, что $N \neq 1$. Тогда можно считать, что N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого $p \in \pi_1 = \{2, 3, 5, 11, 13, 31, 71\}$. Допустим сначала, что $p \neq 5$. По лемме 6(2) $PSL_5(5)$ содержит фробениусову группу вида $5^4 : 624$. Поскольку $\frac{G}{N}$ содержит подгруппу, изоморфную $PSL_5(5)$, то $\frac{G}{N}$ включает фробениусову подгруппу $\frac{H}{N} = 5^4 : 624 = F : C$. Так как $\frac{NC_H(N)}{N} \cong \frac{C_H(N)}{N \cap C_H(N)}$ и $C_H(N) \leq C_G(N) = N$, выводим, что F не содержится в $\frac{NC_H(N)}{N}$. По лемме 5 получаем элемент порядка $624p$ в G; противоречие. Поэтому будем считать, что N — элементарная абелева 5-группа. Но 11 — простой делитель $5^5 - 1$, откуда по лемме 6(1) $PSL_5(5)$ содержит фробениусову группу вида $11 : 5$. Вновь используя лемму 5, заключаем, что G включает элемент порядка $5 \cdot 5 = 25$; противоречие с $\omega(PSL_5(5))$. Это окончательное противоречие показывает, что $N = 1$, откуда $G \cong PSL_5(5)$ или $G \cong PSL_5(5) : \langle\theta\rangle$. Использовав GAP, мы получили 465 классов сопряженности для $PSL_5(5) : \langle\theta\rangle$, у которых множество порядков элементов такое же, как у $PSL_5(5)$. Так что на самом деле $\omega(PSL_5(5)) = \omega(PSL_5(5)) : \langle\theta\rangle$ и группа $PSL_5(5)$ 2-распознаваема. $\square$

Благодарности. Исследования первого автора были проведены на математическом факультете университета штата Северная Каролина в Шарлотте, США, во время его пребывания там в 2006–2007, и он выражает благодарность указанному факультету.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brandl R., Shi W. J.* The characterization of $PSL(2, q)$ by its element orders // J. Algebra. 1994. V. 163, N 1. P. 109–114.
2. *Shi W. J.* A characteristic property of $PSL_2(7)$ // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1984. V. 36, N 3. P. 354–356.
3. *Shi W. J.* A Characteristic property of J_1 and $PSL_2(2^n)$ // Adv. Math. (in Chinese). 1987. V. 16, N 4. P. 397–401.
4. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Ч. П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.
5. *Darafsheh M. R., Karamzadeh N. S.* A characterization of groups $PSL(3, q)$ by their element orders for certain q // J. Appl. Math. Comput. (Old KJCAM). 2002. V. 9, N 2. P. 409–421.
6. *Lipschutz S., Shi W. J.* Finite groups whose element orders do not exceed twenty // Prog. Nat. Sc. 2000. V. 10, N 1. P. 11–21.
7. *Higman G.* Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. 1957. V. 32. P. 335–342.
8. *Passman D. S.* Permutation groups. New York: W. A. Benjamin, 1968.
9. *Darafsheh M. R., Farjami Y., Sadrudini A.* A characterization property of the simple group $PSL_4(5)$ by the set of its element orders // Arch. Math. (Brno). 2007. V. 43, N 1. P. 31–37.

10. *Willams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
11. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
12. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознавании по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 749–758.
13. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
14. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
15. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic // Proc. Japan Acad. Ser. A. 1991. V. 67, N 3. P. 82–83.
16. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 93–110.
17. *Darafsheh M. R.* Order of elements in the groups related to the general linear group // Finite Fields Appl. 2005. V. 11, N 4. P. 738–744.
18. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 16 августа 2006 г.

M. R. Darafsheh
School of Mathematics, College of Science, University of Tehran,
Tehran, Iran
darafsheh@ut.ac.ir

A. Sadrudini
Department of Mathematics, Tarbiat Modarres University,
P.O. Box 14115-137, Tehran, Iran
asadr@modares.ac.ir