Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 512.54

ПРИМАРНО СТУПЕНЧАТЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДГРУПП

В. А. Ведерников, Г. В. Савичева

Аннотация. Пусть G — примарно ступенчатая группа и D — подгруппа, порожденная всеми недополняемыми подгруппами из G. Получено полное описание строения группы G, если D содержится в произведении подгруппы Фраттини и центра группы G.

Ключевые слова: примарно ступенчатая группа, локально почти разрешимая группа, подгруппа Фраттини, центр группы, дополняемая подгруппа.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *дополняемой в* G, если в G существует подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K = 1$.

В 1937 г. Холл в работе [1] исследовал строение конечной группы, в которой каждая подгруппа дополняема. В работе [2] Н. В. Черникова получила полное описание строения произвольных групп с таким свойством, которые были названы ею *вполне факторизуемыми группами*. В дальнейшем многими авторами были изучены как конечные, так и бесконечные группы с той или иной системой дополняемых подгрупп. Сводное изложение основных результатов в этом направлении содержится в монографии [3].

Пусть $D(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми подгруппами из G, не имеющими дополнений в G. Если в группе G все подгруппы дополняемы, то полагаем $D(G) = 1$. Так как каждая циклическая подгруппа из подгруппы Фраттини $\Phi(G)$ группы G не имеет дополнения в G, то $\Phi(G) \subseteq D(G)$. В [4–6] установлено строение примарно ступенчатой группы, когда $D(G) = \Phi(G) \neq G$. Оказалось, что в этом случае $D(G) \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G. В работах [7, 8] получено строение конечной группы, когда $D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G)$.

Н. С. Черников в 1999 г. ввел понятие примарно ступенчатой группы. Группа G называется *примарно ступенчатой*, если в произвольной ее подгруппе, порожденной двумя сопряженными примарными элементами, любая неединичная подгруппа конечного индекса обладает собственной подгруппой конечного индекса. Класс примарно ступенчатых групп очень широк. Он включает в себя все локально ступенчатые, линейные, локально почти разрешимые, бинарно конечные и многие другие группы (см. [6]).

Цель настоящей работы — дать полное описание строения примарно ступенчатой группы G, для которой $D(G) \subseteq Z(G)\Phi(G)$.

На подгруппу $D(G)$ можно смотреть как на некоторый аналог подгруппы Фраттини $\Phi(G)$. Поэтому естественно ожидать много общего между свойствами подгрупп $\Phi(G)$ и $D(G)$. Однако имеются и существенные различия между свойствами этих подгрупп. Так, в конечной неединичной группе G подгруппа

Фраттини $\Phi(G)$ всегда является собственной подгруппой в G, а $D(G)$ может совпадать с G.

Пусть $D(G) \neq G$ и H — подгруппа группы G, содержащая $D(G)$. Тогда каждая подгруппа из G, не содержащаяся в H, дополняема в G. Поэтому, следуя работе [9], подгруппу H будем называть *D-сепарирующей подгруппой* группы G. Ясно, что в группе G может быть несколько D-сепарирующих подгрупп и $D(G)$ является пересечением всех D-сепарирующих подгрупп из G. Удобно считать D-сепарирующей подгруппой в G и саму группу G. Этим обеспечивается существование $D(G)$ в любой группе G, а также равносильность двух приведенных определений для $D(G)$.

Отметим, что изучение групп с $D(G) \neq G$ равносильно исследованию групп G, содержащих собственную D-сепарирующую подгруппу. Единичную группу считаем вполне факторизуемой. По следствию 7.7 из [3] неединичная абелева группа вполне факторизуема тогда и только тогда, когда она является прямым произведением групп простых порядков. Это без оговорок неоднократно используется в дальнейшем.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп. Группа G, принадлежащая $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-группой. Группа H называется почти $\mathfrak{F}$-группой, если H не принадлежит $\mathfrak{F}$, но H содержит нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу конечного индекса.

Не приведенные в работе обозначения и определения в основном стандартные, их можно найти в книгах [3, 10–15].

Через $J(G)$ для произвольной группы G будем обозначать пересечение всех ее подгрупп конечного индекса (информацию о свойствах и применениях подгруппы $J(G)$ можно найти в книге [14]); если $J(G) = 1$, то группа G называется *финитно аппроксимируемой*; если A — подгруппа группы G, то $A_G = \bigcap\limits_{g \in G} A^g$; $A[B]$ или $[B]A$ обозначает полупрямое произведение подгруппы A и нормальной подгруппы B, причем $A \cap B = 1$.

2. Предварительные результаты

Определение 1. Неабелеву группу G порядка p^3 назовем *$D_{\langle p \rangle}$-группой*, если при $p = 2$ она является диэдральной группой, а при $p > 2$ будет $\exp(G) = p$.

Определение 2. Конечную неабелеву неразложимую группу G назовем *$C_{\langle p \rangle}$-группой*, если центром G является элементарная абелева p-группа либо $Z(G) = 1$.

Замечание 1. Класс всех $C_{\langle p \rangle}$-групп достаточно широк, он включает в себя все конечные специальные p-группы, конечные неабелевы простые и квазипростые группы, центрами которых являются элементарные абелевы p-группы.

Лемма 1. *Пусть H — локально конечная подгруппа группы G и $H \nsubseteq D(G)$. Тогда*

(1) *$N_G(H)$ является локально конечной группой;*

(2) *$N_G(H) \cap J(G) = 1$, в частности, $H \cap J(G) = 1$.*

Доказательство. (1) Так как $H \nsubseteq D(G)$, каждая подгруппа группы G, содержащая H, дополняема в G и, значит, по тождеству Дедекинда [15, лемма I.2.12c] дополняема в $N = N_G(H)$. Тогда N/H является вполне факторизуемой группой. Из теоремы Н. В. Черниковой [3, теорема 7.2] и теоремы Шмидта [11, теорема 23.1.1] следует, что N/H и N являются локально конечными группами.

(2) Пусть $a \in H \backslash D(G)$ и $g \in N$. Тогда $\langle a, g\rangle = K \leq N$ и, значит, $|K| < \infty$. Так как $K \nsubseteq D(G)$, то K дополняема в G. Следовательно, существует подгруппа L в группе G такая, что $G = KL$ и $K \cap L = 1$. Так как $|G : L| = |K| < \infty$, то $J(G) \leq L$ и $\langle g\rangle \cap J(G) = 1$ для любого $g \in N$. Поэтому $N \cap J(G) = 1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная группа, A, B — подгруппы группы G и $N \lhd G$. Тогда*

(1) [8, лемма 1] *$D(A) \subseteq D(G)$;*

(2) [8, лемма 2] *$D(G/N) \subseteq D(G)N/N$;*

(3) [5, лемма 2] *$\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$;*

(4) [5, лемма 7] *если $x \in G \backslash D(G)$, то $|x| < \infty$;*

(5) $J(G)$ является пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса в группе G и $J(G)\Phi(G) \subseteq D(G)$, в частности, если G — вполне факторизуемая группа, то $D(G) = \Phi(G) = J(G) = 1$;

(6) [8, лемма 5] если $G = AB$, $B \lhd G$ и $\Phi(A) \nsubseteq B$, то $D(A)B \leq D(G)$;

(7) если $G = (AN)B$ и $A \cap N = (AN) \cap B = 1$, то $G = A(NB)$ и $A \cap (NB) = 1$;

(8) если A — подгруппа в G конечного индекса, то $J(A) = J(G)$;

(9) если $D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$, то $D(G/N) \leq \Phi(G/N)Z(G/N)$;

(10) $D(G)$ является пересечением всех нормальных подгрупп в G, содержащих $D(G)$, и конечного индекса в группе G;

(11) если группа $G/J(G)$ неабелева, то $G \neq \Phi(G)Z(G)$*;*

(12) [6, лемма 2] *если G — 2-группа, $|A| < \infty$, $N \neq 1$ и $A \cap N = 1$, то $C_N(A) \neq 1$.*

Доказательство. (4) Пусть $x \in G \backslash D(G)$. Допустим, что $|x| = \infty$. Так как подгруппы $\langle x^2\rangle$ и $\langle x^3\rangle$ не дополняемы в группе $\langle x\rangle$, то они не дополняемы в группе G и, значит, содержатся в $D(G)$. Отсюда следует, что $x \in \langle x^2, x^3\rangle \subseteq D(G)$. Получили противоречие. Следовательно, $|x| < \infty$.

(5) Так как $J(G) = \bigcap\limits_{i\in I} H_i$, где $\{H_i : i \in I\}$ — множество всех подгрупп конечного индекса в группе G, и по теореме Пуанкаре [11, теорема 12.2.2] $(H_i)_G$ — нормальная подгруппа конечного индекса в G, то $J(G) = \bigcap\limits_{i\in I}(H_i)_G$ является пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса в G.

Если $G = D(G)$, то $J(G)\Phi(G) \subseteq G = D(G)$. Пусть $G \neq D(G)$ и $x \in G \backslash D(G)$. Тогда по п. (4) $|x| < \infty$ и по лемме 1 $\langle x\rangle \cap J(G) = 1$. Следовательно, $x \notin J(G)$. Отсюда $J(G) \leq D(G)$. Пусть $y \in \Phi(G)$ и $y \neq 1$. Так как y — непорождающий элемент группы G, подгруппа $\langle y\rangle$ не дополняема в G. Отсюда $\langle y\rangle \leq D(G)$ и $\Phi(G) \leq D(G)$.

(7) Из $G = (AN)B$ следует, что $G = A(NB)$. Пусть $D = A \cap (NB)$ и $d \in D$. Тогда $d = nb$, где $n \in N$, $b \in B$. Отсюда $b = n^{-1}d \in NA = AN$ и, значит, $b \in (AN) \cap B = 1$. Поэтому $b = 1$, $d = n$ и $d \in A$. Из $A \cap N = 1$ вытекает, что $d = 1$ и тем самым $D = 1$.

(8) Пусть K — подгруппа конечного индекса в группе A. Тогда индекс K в группе G конечен, так что $J(G) \subseteq J(A)$. Пусть L — подгруппа конечного индекса в группе G. Тогда индекс $L \cap A$ в группе A конечен и, значит, $J(A) \subseteq L \cap A \subseteq L$. Отсюда $J(A) \subseteq J(G)$. Поэтому $J(G) = J(A)$.

(9) По п. (2)

$$D(G/N) \subseteq D(G)N/N \subseteq \Phi(G)Z(G)N/N = (\Phi(G)N/N)(Z(G)N/N).$$

Так как $Z(G)N/N \subseteq Z(G/N)$ и по п. (3) $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$, то $D(G/N) \subseteq \Phi(G/N)Z(G/N)$.

(10) Если $D(G) = G$, то утверждение верно. Пусть $D(G) \neq G$. Так как $G/D(G)$ — вполне факторизуемая группа, по п. (5) $J(G/D(G)) = 1$ является пересечением всех нормальных подгрупп конечного индекса в $G/D(G)$. Следовательно, $D(G)$ является пересечением всех нормальных подгрупп в G, содержащих $D(G)$, и конечного индекса в группе G.

(11) Допустим, что $G = \Phi(G)Z(G)$. По п. (5) $J(G) = \bigcap_{i \in I} N_i$, где $\{N_i : i \in I\}$ — множество всех нормальных подгрупп конечного индекса в группе G. По теореме Ремака [11, теорема 4.3.9] группа $G/J(G)$ изоморфна некоторому поддекартову произведению групп G/N_i, $i \in I$. Так как группа $G/J(G)$ неабелева, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что G/N неабелева. По п. (3) получим, что

$$G/N = (\Phi(G)N/N)(Z(G)N/N) \leq \Phi(G/N)Z(G/N) = Z(G/N).$$

Получили противоречие. Следовательно, $G \neq \Phi(G)Z(G)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть G — абелева группа. Соотношение $1 \neq D(G) \neq G$ имеет место тогда и только тогда, когда $G = A \times B$, где A — циклическая p-группа порядка $> p$ и B — вполне факторизуемая абелева группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — абелева группа и $x \in G \backslash D(G)$. Тогда $\langle x \rangle$ дополняема в G и по лемме 2(4) $|x| < \infty$. Пусть x — элемент наименьшего порядка с такими свойствами. Тогда x является p-элементом, причем в G существует подгруппа B такая, что $G = \langle x \rangle B$ и $\langle x \rangle \cap B = 1$. Так как каждая подгруппа из G, содержащая $\langle x \rangle$, дополняема в G, отсюда следует, что $G/\langle x \rangle \simeq B$ является вполне факторизуемой группой. Ввиду $D(G) \neq 1$ получим, что $|x| > p$.

Достаточность очевидна. Следствие доказано.

Лемма 3 [8, теорема 1]. *Пусть P — конечная неабелева p-группа. Включение $D(P) \subseteq Z(P)\Phi(P)$ имеет место тогда и только тогда, когда $P = Q \times A$, где Q — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а A — вполне факторизуемая конечная p-группа.*

Лемма 4 [8, теорема 2]. *Пусть G — конечная группа. Включение $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G является группой одного из следующих типов:*

(1) *G — конечная абелева группа;*

(2) *$G = P \times A$, где P — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а A — вполне факторизуемая конечная абелева группа;*

(3) *G — вполне факторизуемая конечная неабелева группа.*

Лемма 5. *Пусть H — собственная D-сепарирующая подгруппа группы G. Тогда*

(1) *G содержит нормальную D-сепарирующую подгруппу F простого индекса, причем если H дополняема в G, то и F дополняема в G;*

(2) *если F — нормальная D-сепарирующая подгруппа конечной группы G и $|G : F| = p$, то каждая силовская q-подгруппа группы G при $q \neq p$ является элементарной абелевой q-группой и $D(G_p) \neq G_p$.*

Доказательство. (1) Так как H — собственная D-сепарирующая подгруппа в G, то $D(G) \neq G$. По лемме 2(2) $D(G/D(G)) = 1$. Следовательно, группа $G/D(G)$ вполне факторизуема, и по теореме 7.2 из [3] $G/D(G)$ содержит нормальную подгруппу $F/D(G)$ простого индекса. Тогда $F \lhd G, |G : F|$ — простое число и F — D-сепарирующая подгруппа группы G. Пусть H дополняема в G. Если $F \neq D(G)$, то F дополняема в G. Если $F = D(G)$, то $F = H$ и, значит, F дополняема в G.

(2) Так как $|G : F| = p$, то F_q является силовской q-подгруппой конечной группы G при $q \in \pi(G)\backslash\{p\}$. По лемме Фраттини $G = FN_G(F_q) = FT$, где $T = N_G(F_q)$. Так как $G_p = F_pT_p$ и $T_p \not\subseteq F$, существует элемент $x \in T_p\backslash F$. Рассмотрим группу $R = \langle x\rangle[G_q]$. По лемме 3 из [8] $F \cap R$ является D-сепарирующей подгруппой группы R. Так как $U = \langle x\rangle[\Phi(G_q)] \not\subseteq F \cap R$, то U дополняема в R. Следовательно, $R = UV$, $U \cap V = 1$ и V является q-подгруппой в R. Тогда $G_q = \Phi(G_q)V = V$ и $\Phi(G_q) \cap V = 1$. Тем самым $\Phi(G_q) = 1$ и, значит, G_q — элементарная абелева группа. По лемме 3 [8] $F \cap G_p$ является D-сепарирующей подгруппой группы G_p. Так как $F \cap G_p \neq G_p$, то $D(G_p) \neq G_p$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $G = [A]B$, где A — конечно порожденная абелева нормальная подгруппа и B — конечная подгруппа группы G. Если каждая подгруппа в G, содержащая B, дополняема в G, то G является конечной группой.*

Доказательство. Допустим, что A — бесконечная группа. Тогда по теореме 8.1.2 из [11] получим, что $A = CF$, где C — свободная абелева группа ранга r и F — конечная абелева группа, являющаяся множеством всех элементов конечного порядка группы A. Так как при автоморфизме элемент конечного порядка переходит в элемент такого же порядка, то F характеристична в A и, значит, $F \lhd G$. Пусть $\overline{G} = G/F$, $\overline{A} = A/F$, $\overline{B} = BF/F$. Тогда $\overline{G} = [\overline{A}]\overline{B}$, причем $\overline{A} \simeq C$ и $\overline{B} \simeq B$. Пусть $\overline{H} = H/F$ — подгруппа из $\overline{G}$, содержащая $\overline{B}$. Тогда $B \subseteq H$ и по условию H дополняема в G. Отсюда следует, что $\overline{H}$ дополняема в $\overline{G}$ и по лемме 7 из [5] $\overline{A} = 1$. Следовательно, $A = F$ — конечная абелева группа, и, значит, G — конечная группа. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если G — локально почти разрешимая группа и $D(G) \neq G$, то G является локально конечной группой.*

Доказательство. Пусть $x \in G\backslash D(G)$, Y — конечное подмножество из G и $F = \langle\{x\} \cup Y\rangle$. Тогда $F \not\subseteq D(G)$ и, значит, F дополняема в G. Следовательно, в G существует подгруппа H такая, что $G = FH$ и $F \cap H = 1$. Так как G — локально почти разрешимая группа, то F — почти разрешимая группа. Следовательно, в F существует разрешимая нормальная подгруппа S конечного индекса. Так как $\langle x\rangle$ дополняема в G , то $\langle x\rangle$ дополняема в F. Пусть $F = \langle x\rangle K$, где $K \leq F$ и $\langle x\rangle \cap K = 1$.

По лемме 2(4) элемент x имеет конечный порядок. Следовательно, $|F : K| < \infty$. По теореме Пуанкаре $|F : K_F| < \infty$. Пусть $T = S \cap K_F$. Тогда $T \lhd F$, $|F : T| < \infty$ и T — разрешимая группа. Следовательно, T обладает конечным производным рядом. Пусть $T^{(i)}/T^{(i+1)}$ — фактор производного ряда группы T. Рассмотрим в F подгруппу $U = \langle x\rangle[T^{(i)}]$. Так как $\langle x\rangle \not\subseteq D(G)$, то каждая подгруппа из U, содержащая $\langle x\rangle$, дополняема в G, а значит, и в U. Поэтому в $U/T^{(i+1)} = (\langle x\rangle T^{(i+1)}/T^{(i+1)})(T^{(i)}/T^{(i+1)})$ каждая подгруппа, содержащая $\langle x\rangle T^{(i+1)}/T^{(i+1)}$, дополняема. По лемме 6 $U/T^{(i+1)}$ — конечная группа. Поэтому $|T| < \infty$ и, значит, $|F| < \infty$. Тогда $|\langle Y\rangle| < \infty$ и тем самым G — локально конечная группа. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G = H \times A$, где H является $C_{\langle p\rangle}$-группой, A — вполне факторизуемая абелева группа. Тогда*

(1) *$Z(H) \subseteq \Phi(H)$;*

(2) *если Q — подгруппа группы G и $Q \simeq H$, то $G = Q \times A$.*

Доказательство. (1) Допустим, что $Z = Z(H) \nsubseteq \Phi(H)$. Тогда в H существует максимальная подгруппа M, не содержащая Z, и, значит, $H = MZ$. Пусть $D = M \cap Z$. По определению 2 Z является элементарной абелевой p-группой. Поэтому в Z существует подгруппа F такая, что $Z = D \times F$ и $H = M \times F$. Получили противоречие с неразложимостью группы H. Следовательно, $Z(H) \subseteq \Phi(H)$.

(2) Так как $Q \simeq H$, то Q является $C_{\langle p \rangle}$-группой. Пусть $R = Q \cap A$. Допустим, что $R \neq 1$. Так как $A \subseteq Z(G)$, то $R \subseteq Z(Q)$. По условию A является вполне факторизуемой абелевой группой. Тогда в A найдется подгруппа B такая, что $A = R \times B$, $G = (HB) \times R$ и по тождеству Дедекинда получим $Q = R \times (Q \cap (HB))$. Получили противоречие с неразложимостью группы Q. Следовательно, $R = 1$. Тогда $Q \simeq QA/A \leq G/A \simeq H$. Так как по условию $Q \simeq H$, то $|QA/A| = |G/A|$. Отсюда следует, что $QA/A = G/A$ и значит, $G = Q \times A$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть G — локально почти разрешимая группа, и пусть $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$. Если группа G содержит конечную неабелеву вполне факторизуемую подгруппу B такую, что $B \nsubseteq D(G)$, то G — вполне факторизуемая неабелева группа.*

Доказательство. Если $G = B$, то G вполне факторизуема. Пусть $G \neq B$, $g \in G$ и $F = \langle B \cup \{g\} \rangle$. Так как $B \nsubseteq D(G)$, то $D(G) \neq G$ и по лемме 7 группа G локально конечна. Отсюда следует, что $|F| < \infty$, $F \nsubseteq D(G)$ и, значит, F дополняема в G. Пусть $G = FH$, где $H \leq G$ и $F \cap H = 1$. Тогда $|G : H| < \infty$ и по теореме Пуанкаре в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, содержащаяся в H. Поэтому $G/N = (FN/N)(H/N)$, $(FN/N) \cap (H/N) = 1$ и $|G/N| < \infty$. По лемме 2(9) $D(G/N) \subseteq \Phi(G/N)Z(G/N)$. Так как G/N — конечная группа и $B \simeq BN/N \leq G/N$, то по лемме 4 G/N — вполне факторизуемая группа. Тогда по лемме 2(5) $\Phi(G/N) = 1$ и по лемме 2(3) $\Phi(G)N/N = 1$. Следовательно, $\Phi(G) \subseteq N$. Пусть $g \in \Phi(G)$. Тогда $g \in N \cap F = 1$. Отсюда $\Phi(G) = 1$ и $D(G) \subseteq Z(G)$.

Из $F \simeq FN/N \leq G/N$ следует, что F — вполне факторизуемая группа и, значит, каждый элемент из G имеет порядок, свободный от квадратов. Если $Z = Z(G) = 1$, то $D(G) = 1$ и G — вполне факторизуемая группа. Пусть $Z \neq 1$. Тогда Z является абелевой группой с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Так как $D(G) \subseteq Z$, то G/Z — вполне факторизуемая группа. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех подгрупп из Z, имеющих простой порядок. Так как $\Phi(G) = 1$, для любой подгруппы $S \in \mathfrak{M}$ в G существует нормальное дополнение D_S, т. е. $G = S \times D_S$ для любой $S \in \mathfrak{M}$. Пусть $D = \bigcap_{S \in \mathfrak{M}} D_S$. Тогда $D \lhd G$ и по теореме Ремака группа G/D изоморфна некоторому поддекартову произведению групп G/D_S. Следовательно, G/D является абелевой группой, причем $D \cap Z = 1$. Так как G — неабелева группа, то $D \neq 1$. Пусть $U = D \times Z$. Из $U \nsubseteq D(G)$ следует, что U дополняема в G. Тогда в G найдется подгруппа V такая, что $G = UV$ и $U \cap V = 1$. По лемме 2(7) $G = ([D]V) \times Z$ и $DV \simeq G/Z$ является вполне факторизуемой группой. Тогда по теореме 7.2 из [3] G — вполне факторизуемая группа. Лемма доказана.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть G — произвольная группа. Тогда $D(G) \subseteq Z(G)$ в том и только в том случае, если G — группа одного из следующих типов:*

(1) *G — абелева группа;*

(2) *$G = P \times A$, где P — $D_{\langle p \rangle}$-группа и A — вполне факторизуемая абелева группа;*

(3) *G — вполне факторизуемая неабелева группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — неабелева группа, $D(G) \subseteq Z(G)$ и $x \in G \backslash D(G)$. Тогда по лемме 2(4) $|x| < \infty$ и по лемме 1(1) $D(G) \subseteq Z(G) \subseteq N_G(\langle x \rangle)$ — локально конечная группа. Так как $G/D(G)$ — локально конечная группа и $D(G)$ — локально конечная группа, по теореме Шмидта [11, теорема 23.1.1] G является локальной конечной группой. Если $|G| < \infty$, то по лемме 4 утверждение верно.

Пусть $|G| = \infty$. Поскольку G — неабелева группа, то в $G \backslash Z(G)$ существуют неперестановочные элементы a и b. Пусть $|a| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, p_2, \dots, p_k$ — попарно различные простые числа, $\alpha_i \geq 1$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Тогда $a = a_1 a_2 \dots a_k$, где $|a_i| = p_i^{\alpha_i}$ и $a_i a_j = a_j a_i$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$; a_i назовем *примарной компонентой элемента* a. Так как a и b не перестановочны, то хотя бы одна примарная компонента a_i не перестановочна с b, причем $a_i \in G \backslash Z(G)$. Поэтому можем считать, что a и b являются примарными элементами. Пусть $B = \langle a, b \rangle$. Тогда $|B| < \infty$. По лемме 2(1) $D(B) \subseteq D(G)$ и, значит, $D(B) \subseteq B \cap Z(G) \subseteq Z(B)$. По лемме 4 либо B — вполне факторизуемая конечная неабелева группа, либо $B = P \times A$, где P — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а A — вполне факторизуемая конечная абелева группа.

Пусть B — вполне факторизуемая конечная неабелева группа. Тогда по лемме 9 G — вполне факторизуемая неабелева группа, т. е. G — группа типа (3).

Пусть $B = P \times A$, где P — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а A — вполне факторизуемая конечная абелева группа. Ввиду $O_{p'}(B) \subseteq Z(B)$ имеем $a \in O_p(B)$, $b \in O_p(B)$ и $B = O_p(B)$. Так как $r(B) = r(B/\Phi(B)) = 2$ и $\Phi(B) = \Phi(P)$, то $A = 1$ и $B = P$. Пусть $y \in G \backslash P$. Поскольку G — локально конечная группа, то $F = \langle P \cup \{y\} \rangle$ — конечная группа, причем $D(F) \subseteq Z(F)$. По лемме 4 $F = Q \times A_1$, где Q — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а A_1 — абелева вполне факторизуемая группа. По лемме 8 имеем $F = P \times A_1 \subseteq PC_G(P)$. Так как $P \subseteq PC_G(P)$ и $y \in PC_G(P)$, то $G = PC_G(P)$. Тогда $P \triangleleft G$ и $C_G(P) \triangleleft G$. В силу $P \nsubseteq D(G)$ группа P дополняема в G. Следовательно, $G = [P]H$ и $|G : H| = p^3$. По теореме Пуанкаре в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, содержащаяся в H. Тогда $G/N = (PN/N)(H/N)$ — конечная группа и $(PN/N) \cap (H/N) = 1$. По лемме 2(2) $D(G/N) \subseteq D(G)N/N \subseteq Z(G)N/N \subseteq Z(G/N)$, и по лемме 4 $G/N = R/N \times C/N$, где R/N — $D_{\langle p \rangle}$-группа, а C/N — конечная абелева группа с элементарными абелевыми силовскими подгруппами. Тогда по лемме 8 $G/N = PN/N \times C/N$ и, значит, $G = P \times C$. По лемме 6 из [8] $\Phi(P)C \subseteq D(G) \subseteq Z(G)$. Следовательно, C — абелева группа. По следствию 2 из [8] $D(C) = 1$, значит, C является вполне факторизуемой абелевой группой и G — группа типа (2).

Достаточность доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 2 из [8]. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть G — произвольная группа. Соотношение $G \neq D(G) \subseteq Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов:*

(1) *$A \times B$, где A — циклическая p-группа порядка $> p$ и B — вполне факторизуемая абелева группа;*

(2) *$P \times B$, где P — $D_{\langle p \rangle}$-группа и B — вполне факторизуемая абелева группа;*

(3) *вполне факторизуемая неединичная группа.*

Доказательство. Необходимость. Если $D(G) = 1$, то G — группа типа (3). Пусть $D(G) \neq 1$. Если G абелева группа, то по следствию 1 G — группа типа (1). Пусть G неабелева группа. Тогда по теореме 1 G — группа типа (2).

Достаточность доказывается так же, как и при доказательстве теоремы 2 из [8]. Следствие доказано.

Замечание 2. Теорема 1 усиливает теорему Холла — Черниковой о строении вполне факторизуемых групп. Отметим, что из $D(G) \subseteq Z(G)$ следует дополняемость в группе G всех ее неинвариантных подгрупп. Эта, более общая, задача решена в работах [16–18]. Поскольку доказательство теоремы 1 элементарно и представляет самостоятельный интерес, мы привели его независимым от работ [16–18].

Лемма 10. *Пусть G — локально почти разрешимая группа, $P \leq G$ и P является $D_{\langle p \rangle}$-группой. Если $G \neq D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$, то $G = P \times A$, где A — вполне факторизуемая абелева группа.*

Доказательство. Пусть $x \in G \backslash D(G)$, Y — конечное подмножество группы G и $F = \langle P \cup \{x\} \cup Y \rangle$. Тогда $F \not\subseteq D(G)$ и, значит, F дополняема в G. Следовательно, в G существует подгруппа H такая, что $G = FH$ и $F \cap H = 1$. Так как G — локально почти разрешимая группа и $D(G) \neq G$, то по лемме 7 G — локально конечная группа. Следовательно, $|F| = |G : H| < \infty$. По теореме Пуанкаре в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $N \leq H$. Поэтому $G/N = (FN/N)(H/N)$, $(FN/N) \cap (H/N) = 1$, $|G/N| < \infty$ и $FN/N \simeq F$. По лемме 2(9) $D(G/N) \subseteq \Phi(G/N)Z(G/N)$. Так как G/N — конечная неабелева группа, по лемме 4 $G/N = Q/N \times C/N$, где Q/N — $D_{\langle p \rangle}$-группа и C/N — вполне факторизуемая абелева группа. Из $F \cap N \subseteq F \cap H = 1$ следует, что $P \simeq PN/N$ и PN/N — $D_{\langle p \rangle}$-подгруппа группы G/N. Тогда по лемме 8 $G/N = PN/N \times C/N$. Отсюда следует, что $FN/N = PN/N \times (FN/N \cap C/N)$. Так как $F \simeq FN/N$, то F является прямым произведением $D_{\langle p \rangle}$-подгруппы и вполне факторизуемой абелевой группы B. По лемме 8 $F = P \times B$ и, значит, $F \subseteq PC_G(P)$. Поскольку $Y \subseteq F$, то $Y \subseteq PC_G(P)$ для любого конечного подмножества Y из G. Следовательно, $G = PC_G(P)$. Тогда $P \triangleleft G$, $P \cap C_G(P) = Z(P) = \Phi(P)$ имеет порядок p и $\Phi(P) \triangleleft G$. Так как $P \not\subseteq C_G(P)$, то $G \neq C_G(P)$, тем самым $P \not\subseteq \Phi(G)$. Допустим, что $\Phi(P) \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M, не содержащая $\Phi(P)$. Поэтому $G = \Phi(P)M$ и по тождеству Дедекинда $P = \Phi(P)(P \cap M)$. Отсюда следует, что $P = P \cap M$ и, значит, $P \subseteq M$. Получили противоречие. Следовательно, $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$. Так как $|\Phi(G/N)| = p$ и по лемме 2(3) $\Phi(G)N/N \subseteq \Phi(G/N)$, то $|\Phi(G)/(\Phi(G) \cap N)| \in \{1, p\}$. Пусть $Y \subseteq \Phi(G)$. Тогда $\langle Y \rangle \leq \Phi(G)$, $\langle Y \rangle \cap N \subseteq F \cap N = 1$ и $\langle Y \rangle(\Phi(G) \cap N)/(\Phi(G) \cap N) \simeq \langle Y \rangle / \langle Y \rangle \cap N \simeq \langle Y \rangle$. Отсюда следует, что $|\langle Y \rangle| \in \{1, p\}$ и $\Phi(G) = \Phi(P) \leq Z(G)$. Поэтому $D(G) \leq \Phi(G)Z(G) = Z(G)$. Так как $P \leq G$ и, значит, G неабелева и не является вполне факторизуемой, то по теореме 1 $G = P \times A$, где A — вполне факторизуемая абелева группа. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — локально почти разрешимая группа. Включение $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов:*

(1) $G = \Phi(G)Z(G)$;

(2) $G = P \times A$, *где* P — $D_{\langle p\rangle}$-*группа*, A — *вполне факторизуемая абелева группа;*

(3) G — *вполне факторизуемая неабелева группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G) \neq G$. Тогда G неабелева группа. Пусть G содержит $D_{\langle p\rangle}$-подгруппу P. По лемме 10 G — группа типа (2). Пусть группа G не содержит $D_{\langle p\rangle}$-подгруппы для любого $p \in \pi(G)$. Так как G — неабелева группа, то в G существуют неперестановочные примарные элементы a и b. Пусть $B = \langle a, b\rangle$. По лемме 7 G — локально конечная группа, поэтому B — конечная неабелева группа. Пусть $x \in G\setminus D(G)$ и $C = \langle a, b, x\rangle$. Тогда $|C| < \infty$ и C дополняема в G. Пусть $G = CH$, где $H \leq G$ и $C \cap H = 1$. Поскольку $|G : H| < \infty$, по теореме Пуанкаре в G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, содержащаяся в H. Тогда $G/N = (CN/N)(H/N)$ — конечная неабелева группа и $CN/N \simeq C$. Так как по лемме 2(9) $D(G/N) \leq \Phi(G/N)Z(G/N)$ и $G/N \neq \Phi(G/N)Z(G/N)$, то по лемме 4 G/N — вполне факторизуемая неабелева группа и, значит, C — вполне факторизуемая неабелева группа. Тогда по лемме 9 G — вполне факторизуемая неабелева группа.

Достаточность доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2 из [8]. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть G — локально конечная группа. Включение $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов* (1)–(3), *указанных в теореме* 2.

Следствие 4. *Пусть G — локально почти разрешимая группа. Соотношение $G \neq D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов* (1)–(3), *указанных в следствии* 2.

Доказательство. Необходимость. Если $D(G) = 1$, то G — группа типа (3). Пусть $D(G) \neq 1$. Если G — абелева группа, то по следствию 1 G — группа типа (1). Пусть G — неабелева группа. Тогда в G найдутся неперестановочные элементы a и b. Так как $D(G) \neq G$, по лемме 7 группа G локально конечна. Пусть $x \in G\setminus D(G)$ и $H = \langle a, b, x\rangle$. Тогда H конечна и дополняема в группе G. Отсюда следует, что группа $G/J(G)$ неабелева и по лемме 2(11) $G \neq \Phi(G)Z(G)$. Тогда по теореме 2 G — группа типа (2). Следствие доказано.

Замечание 3. Теорема 2 и ее следствия обобщают основные результаты работы [5].

Лемма 11. *Пусть G — произвольная группа. Если $G \neq D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$, то $G/J(G)$ — группа одного из типов* (1)–(3), *указанных в следствии* 2.

Доказательство. Пусть $G/J(G)$ не является вполне факторизуемой группой и $N = J(G)$. Тогда $D(G/N) \neq 1$. По лемме 2(5) $N \leq D(G)$, а по лемме 2(2) $D(G/N) \leq D(G)/N \neq G/N$. Если G/N — абелева группа, то по следствию 1 G/N — группа типа (1).

Пусть G/N — неабелева группа. По лемме 2(5) N — пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса в группе G, и, значит, по теореме Ремака G/N является поддекартовым произведением конечных групп G/H_i, $i \in I$, $N = \bigcap\limits_{i\in I} H_i$. Так как G/N — неабелева группа, то для некоторого $k \in I$ существует нормальная подгруппа $H = H_k$ группы G такая, что G/H является конечной неабелевой группой.

Пусть $L_i = H \cap H_i \cap D(G)$, $i \in I$. Так как $G/(H \cap H_i)$ — конечная группа, то $D(G)/L_i \simeq D(G)(H \cap H_i)/(H \cap H_i)$ — конечная группа. Поскольку $G/D(G)$ является вполне факторизуемой и, значит, по теореме 7.2 из [3] локально конечной группой, то по теореме Шмидта G/L_i является локально конечной группой для любого $i \in I$. По лемме 2(2) $D(G/L_i) \leq D(G)L_i/L_i = D(G)/L_i \neq G/L_i$, а по лемме 2(9) $D(G/L_i) \leq \Phi(G/L_i)Z(G/L_i), i \in I$. Так как $G/H \simeq (G/L_i)/(H/L_i)$ — конечная неабелева группа, то $(G/L_i)/J(G/L_i)$ — неабелева группа и по лемме 2(11) имеем $\Phi(G/L_i)Z(G/L_i) \neq G/L_i$ для любого $i \in I$. Тогда по следствию 4 G/L_i является группой типа (2) или (3) и, значит, G/L_i имеет ступень разрешимости 2 для любого $i \in I$. Из равенств $\bigcap\limits_{i\in I} L_i = \bigcap\limits_{i\in I}(H \cap H_i \cap D(G)) = H \cap D(G) \cap J(G) = J(G)$ следует, что $G/J(G)$ является поддекартовым произведением групп G/L_i, $i \in I$.Так как класс всех разрешимых групп ступени разрешимости ≤ 2 является многообразием групп [11, с. 177], то, применяя теорему Биркгофа [11, теорема 15.2.1], получим, что $G/J(G)$ является разрешимой группой ступени разрешимости 2. Как и выше, заменяя L_i на N, получим $\Phi(G/N)Z(G/N) \neq G/N$. Применяя лемму 2(2), имеем $1 \neq D(G/N) \leq \Phi(G/N)Z(G/N) \neq G/N$. По теореме 2 $G/J(G)$ является группой типа (2). Лемма доказана.

Замечание 4. Следующая лемма доказывается, как теорема 1 работы [6], с заменой $\Phi(G)$ на $D(G)$ и применением соответствующих лемм для $D(G)$. Для удобства читателя мы сохраним обозначения и схему доказательства, принятые при доказательстве теоремы 1 в [6].

Лемма 12. *Пусть для группы G выполняется следующее условие $(*)$: если $G \neq D(G)$ и $J(G) \neq 1$, то найдутся конечные непустые множества $M \subseteq G \backslash D(G)$ и $K \subseteq J(G) \backslash 1$ такие, что либо подгруппа $\langle K, M\rangle$ конечна, либо индекс $|\langle K, M\rangle : J(\langle K, M\rangle)|$ бесконечен.*

Соотношение $G \neq D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов (1)–(3), указанных в следствии 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \neq D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$. Покажем, что G является группой одного из типов (1)–(3). В силу леммы 11 достаточно показать, что $J(G) = 1$.

Допустим, что $J(G) \neq 1$, M и K — конечные непустые подмножества, как в условии $(*)$.

(1) Так как $K \subseteq \langle M, K\rangle \cap J(G)$ и $\langle M, K\rangle \not\subseteq D(G)$, по лемме 1 $\langle M, K\rangle$ бесконечна и по условию $(*)$ $|\langle K, M\rangle : J(\langle K, M\rangle)| = \infty$. Пусть $h \in \langle K, M\rangle \backslash D(G)$. По лемме 2(4) $|h| < \infty$. Пусть h — элемент наименьшего порядка с таким свойством. Тогда h — p-элемент.

Пусть $F_1 = \langle K, M\rangle \cap J(G)$ и $F = F_0 = F_1\langle h\rangle$. Так как $F_1 \lhd \langle K, M\rangle$ и $F \leq \langle K, M\rangle$, то $F_1 \lhd F$. По лемме 2(5) $F_1 \leq D(G)$. Из леммы 11 следует, что $G/J(G)$ — локально конечная группа. Тогда $\langle K, M\rangle J(G)/J(G) \simeq \langle K, M\rangle/F_1$ является конечной группой. По лемме 2(8) $J(\langle K, M\rangle) = J(F_1)$ и из $|\langle K, M\rangle : J(\langle K, M\rangle)|{=}\infty$ следует, что $|F_1 : J(F_1)| = \infty$. Как в [6], нетрудно построить в группе F убывающий инвариантный ряд

$$F = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_i \supset F_{i+1} \supset \cdots \supset F_\omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

конечно порожденных подгрупп F_i конечного индекса в F, каждый фактор F_i/F_{i+1} которого для любого $i \geq 1$ главный и тем самым является конечным прямым произведением изоморфных конечных простых групп.

(2) Так как $h \in F \setminus D(G)$, по лемме 2(1) $D(F) \subseteq D(G) \cap F < F$. По лемме 1(2) $\langle h \rangle \cap J(G) = 1$ и $\langle h \rangle \cap F_i = 1$ для любого $i \geq 1$. Заметим, что $D(F)F_i \subseteq D(F)F_1 \subseteq (D(G) \cap F)F_1 = D(G) \cap F < F$. Тогда по лемме 2(2) $D(F/F_i) \subseteq D(F)F_i/F_i < F/F_i = F_1\langle h \rangle/F_i$. Отсюда следует, что F/F_i содержит нормальную D-сепарирующую подгруппу индекса p. По лемме 5(2) каждая силовская q-подгруппа конечной группы F/F_i является элементарной абелевой q-группой для любого $q \in \pi(F/F_i) \setminus \{p\}$ и $D(P_i) < P_i$ для силовской p-подгруппы P_i группы F/F_i.

(3) Как и в п. 3° доказательства теоремы 1 работы [6], можно показать, что для некоторого натурального числа m при каждом $i > m$ силовская p-подгруппа группы F_m/F_i является элементарной абелевой p-группой.

(4) Как и в п. 4° доказательства теоремы 1 работы [6], можно показать, что при каждом $i > m$ группа F_m/F_i разрешима.

По теореме Цассенхауза [19, теорема 3.7] при произвольном $n \in \mathbb{N}$ ступени разрешимости групп матриц степеней $\leq n$ над полями ограничены в совокупности. Максимум этих ступеней обозначим через $\zeta(n)$. Следуя работе [6], для разрешимой группы X через $d(X)$ обозначим ступень ее разрешимости.

(5) Как и в п. 5° доказательства теоремы 1 работы [6], можно показать, что $d(X/Y) \leq \zeta(|h|)+1$ для произвольных нормальных подгрупп X и $Y < X$ группы F, содержащихся в F_1, для которых X/Y — конечная разрешимая p'-группа.

(6) Как и в п. 6° доказательства теоремы 1 работы [6], можно показать, что группа F_m/F_ω разрешима и $d(F_m/F_\omega) \leq 2\zeta(|h|) + 3$.

(7) Пусть B — наименьший член производного ряда группы F_m/F_ω, имеющий в ней конечный индекс, C — следующий за ним член этого ряда. Тогда абелева группа B/C конечно порождена и $|B/C| = \infty$. В группе $D = (\langle h \rangle C/C)[B/C]$ дополняема каждая подгруппа, содержащая $< h > C/C$. Тогда по лемме 6 D — конечная группа. Получили противоречие.

Следовательно, $J(G) = 1$. Тогда по лемме 11 G является группой одного из типов (1)–(3) заключения леммы.

Достаточность доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2 из [8]. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — примарно ступенчатая группа. Соотношение $G \neq D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов* (1)–(3), *указанных в следствии* 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — примарно ступенчатая группа, $G \neq D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ и $h \in G \setminus D(G)$. Тогда по лемме 2(4) $|h| < \infty$. Пусть h — элемент наименьшего порядка с таким свойством. Тогда h является p-элементом. Если $J(G) = 1$, то по лемме 11 теорема верна. Пусть $J(G) \neq 1$ и $a \in J(G) \setminus 1$. Рассмотрим группу $H = \langle h, h^a \rangle$. По лемме 1(2) $a \notin N_G(\langle h \rangle)$ и, значит, $1 \neq [h, a] \in H \cap J(G)$. Следовательно, по лемме 1(2) H не является локально конечной группой. Так как группа G является примарно ступенчатой, по определению в группе H можно построить бесконечную строго убывающую цепь подгрупп, имеющих конечный индекс в H. Отсюда следует, что $|H : J(H)| = \infty$ и в группе G выполняется условие $(*)$ из леммы 12 при $M = \{h\}$, $K = \{[h, a]\}$, $\langle M, K \rangle = H$. Тогда по лемме 12 G является группой одного из типов (1)–(3) заключения теоремы.

Достаточность доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2 из [8]. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть G — примарно ступенчатая группа. Включение $D(G) \subseteq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из типов* (1)–(3)*, указанных в теореме* 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G \neq \Phi(G)Z(G)$. Тогда группа G неабелева, $G \neq D(G)$ и по теореме 3 G является группой типа (2) или (3) из заключения следствия.

Достаточность доказывается, как при доказательстве теоремы 2 из [8]. Следствие доказано.

Замечание 5. Так как бинарно конечные, бинарно ступенчатые, линейные, локально ступенчатые, финитно аппроксимируемые группы и RN-группы являются примарно ступенчатыми группами, из теоремы 3 получим многочисленные следствия о строении таких групп G с $G \neq D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$, которые усиливают основные результаты работы [6].

Открытыми остаются следующие вопросы.

1. Нельзя ли в теореме 3 опустить условие примарной ступенчатости группы G?

2. Как изменится формулировка теоремы 3 для произвольной группы G с $D(G) \neq G$?

3. Как изменится формулировка теоремы 3 для произвольной группы G с $D_c(G) \neq G$, где $D_c(G)$ — подгруппа группы G, порожденная всеми циклическими подгруппами из G, не имеющими дополнений в G?

Для 2-групп вопрос 1 решается положительно с помощью леммы 2 из [6].

Теорема 4. *Пусть G — 2-группа. Соотношение $G \neq D(G) \leq \Phi(G)Z(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда G — группа одного из следующих типов:*

(1) *$A \times B$, где A — циклическая 2-группа порядка > 2, а B либо элементарная абелева 2-группа, либо равна 1;*

(2) *$P \times B$, где P — диэдральная группа порядка 8, а B либо элементарная абелева 2-группа, либо равна 1;*

(3) *элементарная абелева 2-группа.*

Доказательство. Необходимость. Если $D(G) = 1$, то G — группа типа (3). Пусть $D(G) \neq 1$. Если G — абелева группа, то по следствию 1 G — группа типа (1). Пусть G — неабелева группа и $h \in G \setminus D(G)$. Тогда по лемме 2(4) $|h| < \infty$. По лемме 1(2) $N_G(\langle h \rangle) \cap J(G) = 1$. Допустим, что $N = J(G) \neq 1$. Тогда по лемме 2(12) $N_N(\langle h \rangle) \neq 1$ и тем самым $N_G(\langle h \rangle) \cap J(G) \neq 1$. Получили противоречие. Следовательно, $J(G) = 1$. Тогда по лемме 11 G — группа типа (2).

Достаточность доказывается так же, как при доказательстве теоремы 2 из [8]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall Ph.* Complemented groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 47. P. 201–204.

2. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. 1956. Т. 39, № 3. С. 273–292.

3. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980.

4. *Довженко С. А.* К теореме Н. В. Черниковой о вполне факторизуемых группах // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 6. С. 854–855.

5. *Довженко С. А.* Локально конечные и локально почти разрешимые группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами // Вопросы алгебры. Гомель: ГГУ, 1999. Вып. 15. С. 84–89.

6. *Довженко С. А., Черников Н. С.* Примарно ступенчатые группы с дополняемыми нефраттиниевыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 10. С. 324–333.
7. *Ведерников В. А., Савичева Г. В.* О конечных группах, близких к вполне факторизуемым // Международная алгебраическая конференция «Классы групп и алгебр», посвященная 100-летию со дня рождения С. А. Чунихина: Тез. докл. Гомель, Беларусь, 5–7 октября 2005 г. Гомель, 2005. С. 49.
8. *Ведерников В. А., Савичева Г. В.* О конечных группах, близких к вполне факторизуемым // Дискретная математика. 2007. Т. 19, № 2. С. 78–84.
9. *Черников С. Н.* Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. С. 6–14.
10. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
12. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
13. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. думка, 1987.
15. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; New York: Springer-Verl., 1967.
16. *Горчаков Ю. М., Шериев В. А.* Конечные группы, все неинвариантные подгруппы которых дополняемы // Сиб. мат. журн. 1965. Т. 6, № 6. С. 1234–1253.
17. *Шериев В. А.* Конечные 2-группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 1. С. 195–212.
18. *Шериев В. А.* Группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 893–912.
19. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. Berlin; New York: Springer-Verl., 1973.

Статья поступила 23 июня 2007 г.

Ведерников Виктор Александрович
Московский городской пед. университет, математический факультет,
кафедра алгебры, геометрии и методики их преподавания,
2-й Сельскохозяйственный проезд, 4, Москва 129226
vavedernikov@mail.ru

Савичева Галина Владимировна
Брянский гос. университет, Новозыбковский филиал,
ул. Советская, 9, Новозыбков Брянской обл. 243020
savgv@yandex.ru