Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2008. Том 49, № 3

УДК 514.752.7

КИЛЛИНГОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ ПОСТОЯННОЙ ДЛИНЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров

Аннотация. Исследованы нетривиальные киллинговы векторные поля постоянной длины и соответствующие потоки на полных гладких римановых многообразиях. Построены различные примеры римановых многообразий, близких в определенном смысле к симметрическим пространствам, с киллинговыми векторными полями постоянной длины, порожденными изометрическими эффективными почти свободными, но не свободными действиями S^1; в том числе «почти круглые» нечетномерные сферы и расслоения единичных векторов над римановыми многообразиями. Получены некоторые ограничения на кривизну римановых многообразий, допускающих нетривиальные киллинговы поля постоянной длины.

Ключевые слова: риманово многообразие, векторное поле Киллинга, геодезическая, метрика Сасаки.

Введение

Основным объектом исследования в работе являются *киллинговы векторные поля постоянной длины* на римановых многообразиях. Существование таких полей на римановом многообразии M влечет различные ограничения на геометрию и топологию M. Примеры таких ограничений хорошо известны (мы рассмотрим некоторые из них далее). В этом контексте естественно возникает проблема дать детальное описание римановых многообразий с большой (в некотором смысле) группой симметрий, допускающих нетривиальные киллинговы поля постоянной длины. Киллинговы поля постоянной длины могут быть *нерегулярными* (имеющими незамкнутые интегральные кривые), *регулярными* (все интегральные кривые таких полей замкнуты и имеют одну и ту же длину) и *квазирегулярными* (когда все интегральные кривые замкнуты, но не все имеют одну длину). Особое внимание уделено квазирегулярным киллинговым векторным полям постоянной длины.

В разд. 1 приводятся необходимые определения и некоторые хорошо известные примеры киллинговых полей постоянной длины на римановых многообразиях.

В разд. 2 мы приведем некоторые утверждения о зависимости кривизны риманова многообразия от наличия на нем киллинговых полей определенного вида.

Первый автор поддержан РФФИ (коды проектов 04–01–00315–а, 05–01–00057–а и 05–01–03016–б). Второй автор поддержан РФФИ (код проекта 05–01–00611–а) и Советом по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (гранты НШ–8526.2006.1 и МД–5179.2006.1).

В разд. 4 строятся примеры односвязных римановых многообразий, имеющих квазирегулярные поля Киллинга постоянной длины. В частности, в теореме 11 мы находим римановы метрики коодноролности 1 на всех нечетномерных сферах размерности ≥ 3 с секционной кривизной, сколь угодно близкой к 1, допускающие квазирегулярные киллинговы поля постоянной длины.

В разд. 5 мы указываем еще один источник римановых многообразий с квазирегулярными полями Киллинга постоянной длины — расслоения единичных касательных векторов на P-многообразиях с подходящей римановой метрикой. В частности, показано, что расслоение единичных касательных векторов на однородных несимметрических многообразиях постоянной секционной кривизны 1, снабженное римановой метрикой, индуцированной метрикой Сасаки касательного расслоения, обладает квазирегулярным полем Киллинга постоянной длины.

Авторы благодарят профессора Дж. А. Вольфа за полезные дискуссии, касающиеся этого проекта. Первый автор выражает признательность математическому факультету университета Теннесси (Ноксвилл), США, за гостеприимство и организацию визита, во время которого была написана настоящая работа.

1. Поля Киллинга постоянной длины

На протяжении всей статьи, если не оговорено противное, риманово многообразие (M, g) предполагается связным, полным и C^∞-гладким; через M_x обозначается касательное евклидово пространство к M в его точке x; гладкость какого-либо объекта означает C^∞-гладкость.

Напомним, что гладкое векторное поле X на римановом многообразии (M, g) называется *киллинговым*, если $L_X g = 0$. Это условие эквивалентно классическим координатным *уравнениям Киллинга* $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$ на ковариантные компоненты $\xi_i = g_{ij}\xi^j$ векторного поля X [1].

Риччи (см. [2]) получил следующую теорему. *Для того чтобы конгруэнция C кривых состояла из интегральных кривых некоторого киллингова поля, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* (1) *любые $n-1$ взаимно ортогональные конгруэнции, ортогональные к C, являются каноническими относительно C;* (2) *кривые любой конгруэнции, ортогональной к C, являются геодезическими или их главные нормали ортогональны к кривым из C в соответствующих точках;* (3) *главные нормали к кривым из C, не являющимся геодезическими, касаются некоторой нормальной конгруэнции.*

Поясним, что условие (1) эквивалентно уравнениям ((38.8) в [3])

$$\gamma_{nhk} + \gamma_{nkh} = 0 \quad (h, k = 1, \dots, n-1;\ h \neq k),$$

где согласно уравнению (30.1) в [3] $\gamma_{lhk} = \lambda_{l|i,j}\lambda^i_{h|}\lambda^j_{k|}$, а $\lambda^i_{l|}$, $l = 1, \dots, n$, — компоненты поля направлений, касающегося l-й конгруэнции; конгруэнция C имеет номер $n = \dim M$. По определению конгруэнция кривых *нормальна*, если они ортогональны некоторому (1-параметрическому) семейству гиперповерхностей в (M, g) (см. подробности в [3]).

Киллингово векторное поле постоянной длины на римановом многообразии регулярно (соответственно квазирегулярно) тогда и только тогда, когда оно порождается свободным (соответственно *почти свободным*, т. е. когда все точки имеют конечный стабилизатор, но есть точки с нетривиальным стабилизатором) изометрическим действием группы S^1. При этом орбита точки с тривиальным (соответственно нетривиальным) стабилизатором называется *регулярной* (соответственно *сингулярной*).

Отметим, что в книге [3] киллинговы поля постоянной длины называются *инфинитезимальными переносами*. На протяжении всей статьи мы подразумеваем под киллинговым полем постоянной длины *нетривиальное* киллингово поле, длина которого постоянна на рассматриваемом римановом многообразии.

На основе теоремы Риччи в [3] доказывается, что конгруэнция геодезических состоит из интегральных кривых некоторого инфинитезимального переноса тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2) теоремы Риччи.

В [3] также доказано следующее утверждение: единичное векторное поле X на (M,g) является (единичным) полем Киллинга тогда и только тогда, когда угол между полем X и касательным вектором любой (ориентированной) геодезической в (M,g) постоянен вдоль этой геодезической.

Предложение 1 [4, с. 499]. *Киллингово поле X на римановом многообразии (M,g) имеет постоянную длину тогда и только тогда, когда каждая интегральная кривая поля X является геодезической на (M,g).*

Доказательство. Для киллингова поля X и произвольного гладкого поля Y на (M,g) справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned}0 = (L_X g)(X,Y) &= X \cdot g(X,Y) - g([X,X],Y) - g(X,[X,Y]) \\ &= g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_X Y) - g(X,[X,Y]) \\ &= g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X X, Y) + \frac{1}{2} Y \cdot g(X,X),\end{aligned}$$

откуда и следует нужное нам утверждение. $\square$

Отметим, что киллинговы поля постоянной длины естественно возникают при рассмотрении различных геометрических конструкций, например, при определении K-контактных многообразий и многообразий Сасаки (см., например, [5–7]).

Есть множество ограничений на существование киллинговых полей постоянной длины на заданном римановом многообразии. Так, согласно известной теореме Хопфа необходимым условием существования такого поля на компактном многообразии (M,g) является равенство $\chi(M) = 0$ для эйлеровой характеристики. Кроме того, в этом случае теорема 2 из работы Ботта [8] позволяет утверждать, что нулевыми являются все числа Понтрягина ориентируемой накрывающей M. Некоторые условия такого рода, связанные с ограничением на кривизну риманова многообразия, приводятся в следующем разделе.

2. Киллинговы векторные поля и кривизна

В этом разделе мы приведем утверждения (многие из которых хорошо известны) о зависимости характеристик кривизны риманова многообразия (M,g) от наличия на нем киллинговых полей определенного вида.

Предложение 2. *Пусть X — поле Киллинга на римановом многообразии (M,g). Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *X является полем Якоби вдоль каждой геодезической $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на (M,g), т. е. имеет место равенство $\nabla^2_{\tau(t)} X + R(X,\tau(t))\tau(t) = 0$, где $\tau(t) = x'(t)$.*

2. *Если $h(t) = \frac{1}{2} g(X(x(t)), X(x(t)))$, где $x(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ — геодезическая на (M,g), то*

$$h''(t) = g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) - g(R(X,\tau(t))\tau(t), X).$$

3. *Если x — критическая точка длины $g(X,X)^{1/2}$ поля X и при этом $g_x(X,X)\neq 0$, то интегральная траектория поля X, проходящая через точку $x\in M$, является геодезической на (M,g).*

Доказательство. Первое утверждение доказано в предложении 1.3 в [9, гл. VIII]. Из этого утверждения и выкладок

$$h'(t)=\frac{1}{2}\nabla_{\tau(t)}g(X,X)=g(\nabla_{\tau(t)}X,X),$$

$$\begin{aligned}h''(t)&=g\big(\nabla^2_{\tau(t)}X,X\big)+g(\nabla_{\tau(t)}X,\nabla_{\tau(t)}X)\\&=g(\nabla_{\tau(t)}X,\nabla_{\tau(t)}X)-g(R(X,\tau(t))\tau(t),X)\end{aligned}$$

следует второе утверждение предложения. Утверждение 3 доказано в предложении 5.7 в [9, гл. VI]. $\square$

Теорема 1. *Пусть X — поле Киллинга на римановом многообразии (M,g), порожденное однопараметрической группой $\gamma(s)$, $s\in\mathbb{R}$, изометрий пространства M, $x\in M$ — точка ненулевого локального минимума (максимума) длины $g(X,X)^{1/2}$ поля X, $Y(s)$ $(s\in\mathbb{R})$ — векторное поле вдоль геодезической $c(s)=\gamma(s)(x)$, определяемое формулой $Y(s)=d(\gamma(s))(w)$, где $w\in M_x$. Тогда*

$$g(Y,Y)\equiv g(w,w),\quad g(Y,X)\equiv g(w,X(x)),\tag{1}$$

выражения $g(\nabla_XY,\nabla_XY)$ и $g(R(X,Y)Y,X)$ не зависят от $s\in\mathbb{R}$, причем

$$g(\nabla_YX,\nabla_YX)=g(\nabla_XY,\nabla_XY)\geq(\leq)\,g(R(X,Y)Y,X)\tag{2}$$

на геодезической $c(s)=\gamma(s)(x)$, $s\in\mathbb{R}$.

Доказательство. Равенства (1) и независимость указанных выражений от s очевидны. Определим гладкое отображение

$$C:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to M,\quad C(s,t)=\operatorname{Exp}(tY(s)).$$

Для однопараметрической подгруппы $\gamma(s)$, $s\in\mathbb{R}$, изометрий (M,g), порожденной X, имеется очевидное равенство

$$\begin{aligned}\gamma(s_1)(C(s,t))&=\gamma(s_1)(\operatorname{Exp}(tY(s)))=\gamma(s_1)(\operatorname{Exp}(td\gamma(s)(w)))\\&=\operatorname{Exp}(d\gamma(s_1)(d\gamma(s)(tw)))=\operatorname{Exp}(td\gamma(s_1+s)(w))=C(s+s_1,t).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\gamma(s_1)(C(s,t))=C(s+s_1,t).\tag{3}$$

Таким образом,

$$dC\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)=X(C(s,t)),\quad dC\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=Y(s,t),$$

где $Y(s,t)$ — продолжение векторного поля $Y(s)=Y(s,0)$. Это означает, что векторные поля X и Y являются касательными векторными полями вдоль отображения C, а также

$$\nabla_XY-\nabla_YX=dC\left(\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}\right]\right)=0.\tag{4}$$

Ясно, что для любого фиксированного s кривая $c_s(t) = C(s,t)$, $t \in \mathbb{R}$, является геодезической в (M,g) с касательным векторным полем $Y_s(t) = Y(s,t)$. Согласно утверждению 2 предложения 2 имеет место равенство

$$\frac{1}{2}\nabla_Y^2 g(X,X) = g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) - g(R(X,Y)Y,X)$$

для всех точек кривой $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$. С другой стороны, точка $x \in M$ является точкой ненулевого локального минимума (максимума) квадрата длины $g(X,X)$ поля X; этим же свойством обладает и каждая точка $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$\frac{1}{2}\nabla_Y^2 g(X,X) = g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) - g(R(X,Y)Y,X) \geq (\leq)\, 0$$

для всех точек $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать. $\square$

В случае единичного киллингова поля теорема 1 немедленно влечет следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — единичное поле Киллинга на римановом многообразии (M,g), порожденное однопараметрической группой $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, изометрий пространства M, $Y(s)$ $(s \in \mathbb{R})$ — векторное поле вдоль кривой $c(s) = \gamma(s)(x)$, $x \in M$, определяемое формулой $Y(s) = d(\gamma(s))(w)$, где $w \in M_x$. Тогда*

$$g(Y,Y) \equiv g(w,w), \quad g(Y,X) \equiv g(w, X(x)), \tag{5}$$

$$g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = g(R(X,Y)Y,X) = \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

В частности, если $g(w,w) = 1$ и $w \perp X(x)$, то

$$g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) = g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = K(X,Y) = \mathrm{const}\,. \tag{7}$$

Из теоремы 2 легко получается

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 для каждой точки $x \in M$ выполнено неравенство*

$$K(X(x),w) \geq 0, \quad \text{где } w \in M_x,\ |w| = 1,\ w \perp X(x)$$

(т. е. в каждой точке $x \in M$ секционная кривизна произвольной двумерной площадки, содержащей вектор $X(x)$, неотрицательна). При этом оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда $d\gamma(t)(w)$ является параллельным векторным полем вдоль геодезической $\gamma(t)(x)$.

Следствие 2. *На римановом многообразии M отрицательной кривизны Риччи не существует нетривиальных киллинговых полей постоянной длины.*

Теорема 3. *Всякое нетривиальное параллельное поле X на римановом многообразии M^n является полем Киллинга постоянной длины* [3], *и* $\mathrm{Ric}(X,X) = 0$. *При этом M^n локально является прямым метрическим произведением одномерного многообразия, касающегося поля X, и некоторого его ортогонального дополнения. Следовательно, универсальное накрытие $\widetilde{M}^n$ риманова многообразия M^n является прямым метрическим произведением $\widetilde{M}^n = P^{n-1} \times \mathbb{R}$, где поле $\widetilde{X}$, проектирующееся на поле X при естественной проекции $\widetilde{M}^n \to M^n$, касательно к $\mathbb{R}$-направлению.*

Доказательство. Понятно, что из условия параллельности $\xi_{i,j} = 0$ поля X (ξ_i — ковариантные компоненты поля X в некоторой локальной системе координат) следует равенство $\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0$, т. е. поле X киллингово. Постоянство длины параллельного поля X и равенство для кривизны Риччи $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$ очевидны. В силу параллельности поля X параллельным и инволютивным на M^n является также и распределение, ортогональное полю X. Теперь последнее утверждение теоремы следует из теоремы разложения де Рама [9, гл. IV, § 6]. $\square$

Теорема 4. *Пусть X — единичное поле Киллинга на n-мерном римановом многообразии M^n. Тогда кривизна Риччи* Ric *многообразия M^n удовлетворяет условию* $\mathrm{Ric}(X, X) \geq 0$. *При этом равенство* $\mathrm{Ric}(X, X) \equiv 0$ *эквивалентно параллельности векторного поля X. Следовательно, в этом случае верны все утверждения теоремы* 3.

Доказательство. Первое утверждение теоремы является очевидным следствием равенства (7). Допустим теперь, что $\mathrm{Ric}(X, X) \equiv 0$. В силу равенства (7) для каждой точки $x \in M^n$ и каждого вектора $w \in M_x$, $w \perp X(x)$, выполнены соотношения $K(X(x), w) = 0$ и $\nabla_w X(x) = 0$. Кроме того, $\nabla_X X \equiv 0$. Таким образом, поле X параллельно на многообразии M^n. $\square$

Замечание 1. Утверждение теоремы 4 можно также получить с помощью формулы

$$(\Delta f)_x = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{V^i} X, \nabla_{V^i} X) - \mathrm{Ric}(X, X),$$

где X — инфинитезимальное аффинное преобразование риманова многообразия (M, g), $f = \frac{1}{2} g(X, X)$, а $V_1, \dots, V_n$ — ортонормированный базис в M_x (см. [10, гл. II, § 4, лемма 2]).

Теорема 4 непосредственно влечет

Следствие 3. *Для киллингова поля X на римановом многообразии M неположительной кривизны Риччи следующие два условия эквивалентны:*

1) *X имеет постоянную длину;*
2) *поле X параллельно на M.*

Для многообразий неположительной секционной кривизны утверждение предыдущего следствия может быть усилено.

Предложение 3. *Для киллингова поля X на римановом многообразии (M, g) неположительной секционной кривизны следующие три условия эквивалентны:*

1) *длина X ограничена на (M, g);*
2) *X имеет постоянную длину;*
3) *поле X параллельно на (M, g).*

Доказательство. С учетом следствия 3 достаточно показать, что каждое поле Киллинга ограниченной длины имеет постоянную длину. Пусть длина киллингова поля X ограничена на (M, g). Согласно утверждению 2 предложения 2 для каждой геодезической $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на (M, g) справедливо равенство

$$h''(t) = g(\nabla_{\tau(t)} X, \nabla_{\tau(t)} X) - g(R(X, \tau(t))\tau(t), X),$$

где $h(t) = \frac{1}{2} g(X(x(t)), X(x(t)))$. Поскольку секционная кривизна многообразия (M, g) неположительна, то $h''(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}$, таким образом, функция h является выпуклой. Кроме того, в силу ограниченности длины поля X функция h ограничена на $\mathbb{R}$. Следовательно, $h(t) = \mathrm{const}$ при $t \in \mathbb{R}$. Через любые две точки на (полном) римановом многообразии (M, g) проходит некоторая геодезическая, поэтому поле Киллинга X имеет постоянную длину. $\square$

Замечание 2. Отметим, что утверждение предложения 3 легко вывести из теоремы 1 работы [11], которая, в частности, утверждает, что каждая ограниченная изометрия на односвязном римановом многообразии M неположительной секционной кривизны является переносом Клиффорда — Вольфа.

Из теоремы 1 получаем следующий хорошо известный результат.

Теорема 5 (теорема Берже [12]). *Любое киллингово поле на компактном четномерном римановом многообразии (M, g) положительной секционной кривизны обращается в нуль в некоторой точке из M.*

Доказательство. Допустим, что поле X не имеет нулей на (M, g), и пусть $\gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$, — однопараметрическая группа движений, порождаемая полем X. В силу компактности M длина киллингова поля X достигает своего абсолютного минимума в некоторой точке $x \in M$, причем $g(X(x), X(x)) \neq 0$. Согласно теореме 1 для любого вектора $w \in M_x$ на геодезической $c(s) = \gamma(s)(x)$, $s \in \mathbb{R}$, выполнено неравенство

$$g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \geq g(R(X, Y)Y, X),$$

где $Y = Y(s) = d\gamma(s)(Y)$ $(s \in \mathbb{R})$ — векторное поле вдоль геодезической $c = c(s) = \gamma(s)(x)$.

Определим линейный оператор $A_X : (M_x, g_x) \to (M_x, g_x)$ по формуле

$$A_X(w) = (\nabla_X w)(x) = \lim_{s \to 0} \frac{\tau_{-s}(d\gamma(s)(w)) - w}{s},$$

где $\tau_{-s} : (M_{c(s)}, g_{c(s)}) \to (M_x, g_x)$ — параллельный перенос из конца в начало отрезка $c(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq s$, геодезической c. Поскольку $d\gamma(s)$ и τ_{-s} являются линейными изометриями векторных евклидовых пространств, сохраняющими ограничение векторного поля X на c, то A_X — кососимметрический эндоморфизм, причем $A_X(X(x)) = 0$. Следовательно, ограничение оператора A_X на единичную евклидову сферу $S^{n-2} \subset (M_x, g_x)$, ортогональную к $X(x)$, задает киллингово поле на S^{n-2} $(n = \dim M)$. Но поскольку n — четное число, существует точка $w \in S^{n-2}$ такая, что $A_X(w) = 0$. Это следует, например, из того, что $\chi(S^{n-2}) = 2 \neq 0$, или из того, что любой оператор на нечетномерном линейном вещественном пространстве имеет собственный вектор. Для такой точки w выполнено неравенство

$$0 = g(A_X(w), A_X(w)) \geq g(R(X(x), w)w, X(x)),$$

чего не может быть в силу положительности секционной кривизны многообразия (M, g). $\square$

Следствие 4. *В условиях теоремы 2 и обозначениях теоремы 5 формула*

$$Z(w) = A_X(w) = \nabla_X Y_w(x), \quad \text{где } Y_w(s) = d\gamma(s)(w),\ w \in M_x,\ |w| = 1,\ w \perp X(x),$$

определяет киллингово поле вращений на единичной евклидовой сфере $S^{n-2} \subset (M_x, g_x)$, ортогональной к $X(x)$, где $n = \dim M$. Также имеет место следующее ограничение на длину киллингова векторного поля Z на S^{n-2}:

$$|Z(w)|^2 = K(X(x), w).$$

Это следствие, в свою очередь, влечет

Следствие 5. *Пусть M — n-мерное риманово многообразие с единичным киллинговым полем X. Если n четно, то в каждой точке $x \in M$ существует единичный вектор $w \perp X(x)$ такой, что $K(X(x), w) = 0$. Следовательно, если существует точка $x \in M$ такая, что секционная кривизна любой двумерной площадки, содержащей вектор $X(x)$, положительна, то n нечетно.*

Следствие 6. *Каждое двумерное риманово многообразие M с единичным полем Киллинга X локально евклидово. Следовательно, M изометрично евклидовой плоскости или одной из плоских полных поверхностей: цилиндру, тору, листу Мёбиуса или бутылке Клейна. При этом поле X параллельно. В последних двух случаях X квазирегулярно и имеет единственную сингулярную траекторию-окружность, а X определяется с точностью до умножения на -1. Во всех остальных случаях поле X может иметь любое направление.*

Отметим, что в книге [10] теорема Берже выводится из следующего утверждения.

Теорема 6 [10, гл. II, теорема 5.6]. *Пусть M — компактное ориентируемое риманово многообразие положительной секционной кривизны, и пусть f — изометрия M.*

(1) *Если $n = \dim M$ — четное число и f сохраняет ориентацию, то f имеет неподвижную точку.*

(2) *Если $n = \dim M$ — нечетное число и f изменяет ориентацию, то f имеет неподвижную точку.*

Замечание 3. В работе [13] теорема 6 обобщена на случай произвольного конформного преобразования f.

В книге [10] приведено и другое, близкое к оригинальному из [12], доказательство теоремы Берже. Еще одно ее доказательство дано в лемме (Берже) 2.2 и следствии 2.1 из [14].

В качестве следствия теоремы 6 легко получается

Теорема 7 (теорема Синга [15; 10, гл. II, следствие 5.8]). *Пусть M — компактное риманово многообразие положительной секционной кривизны.*

(1) *Если $\dim M$ — четное число и M ориентируемо, то M односвязно.*

(2) *Если $\dim M$ — нечетное число, то M ориентируемо.*

Хорошо известна также

Теорема 8 [16, теорема 2.10]. *Если киллингово поле X на компактном римановом многообразии M удовлетворяет условию $\mathrm{Ric}(X, X) \leq 0$, то X параллельно на M и автоматически $\mathrm{Ric}(X, X) \equiv 0$.*

Из этой теоремы получается несколько интересных следствий.

Следствие 7 (теорема Бохнера [17]). *Если кривизна Риччи компактного риманова многообразия M отрицательна, то на M не существует ненулевых киллинговых полей.*

Отметим, что приведенное утверждение также легко вывести из теоремы 1 (достаточно в качестве $x \in M$ рассмотреть точку абсолютного максимума длины киллингова поля X).

Следствие 8 [10, гл. II, следствие 4.2]. *Если X — киллингово поле на компактном римановом многообразии M неположительной кривизны Риччи, то X параллельно, а значит, имеет постоянную длину.*

Из этого следствия и теоремы 4 получаем

Следствие 9. *Всякое компактное риманово многообразие M неположительной кривизны Риччи с нетривиальным киллинговым полем имеет бесконечную фундаментальную группу.*

3. Теорема А. Уодсли

Следующая теорема, по сути, доказана в [18] и понадобится нам в дальнейшем вместе с конструкцией римановой метрики, изложенной в доказательстве.

Теорема 9. *Пусть $\eta : S^1 \times M \to M$ — гладкое эффективное и почти свободное действие окружности S^1 на гладком многообразии M, а X — порожденное этим действием векторное поле на M. Тогда M можно снабдить римановой метрикой g такой, что поле X является киллинговым полем единичной длины на римановом многообразии (M, g). При этом поле X является регулярным (квазирегулярным), если действие η на M свободно (соответственно не является свободным).*

Доказательство. Понятно, что поле X нигде не обращается в нуль на M. Зафиксируем на M некоторую риманову метрику g_1. Далее, рассмотрим новую риманову метрику g_2, получающуюся усреднением метрики g_1 с помощью интегрирования по мере Хаара на S^1. Относительно метрики g_2 действие η является изометричным. Поэтому поле X является киллинговым на (M, g_2). Понятно, что X не обязано иметь постоянную длину в метрике g_2. Поэтому рассмотрим новую риманову метрику g на M, которая конформно эквивалентна метрике g_2. А именно, положим $g = fg_2$, где $f : M \to \mathbb{R}$ определяется формулой $f = (g_2(X, X))^{-1}$. В силу киллинговости X на (M, g_2) имеем $L_X g_2 = 0$. Поэтому

$$Xf = -(g_2(X, X))^{-2} \cdot X(g_2(X, X)) = -(g_2(X, X))^{-2} \cdot (L_X g_2)(X, X) = 0$$

и

$$L_X g = L_X(fg_2) = (Xf)g_2 + f(L_X g_2) = 0.$$

Таким образом, поле X киллингово на (M, g), и, кроме того, $g(X, X) \equiv 1$.

Если действие η на M свободно, то все его орбиты регулярны, т. е. группа изотропии каждой точки $x \in M$ относительно этого действия тривиальна. Это означает, что интегральные кривые поля X относительно римановой метрики g имеют постоянную длину.

Если же действие η не свободно, то существует точка $x \in M$, группа изотропии которой изоморфна $\mathbb{Z}_n$ для некоторого $n \geq 2$. Соответственно длина интегральной кривой поля X, проходящей через точку x, будет в n раз короче длины интегральной кривой поля X, проходящей через любую регулярную точку $y \in M$, т. е. точку, стабилизатор которой относительно действия η тривиален. Значит, в этом случае поле X является квазирегулярным. $\square$

Замечание 4. Отметим, что в работе [19] приведен пример аналитического почти свободного действия группы S^1 на аналитическом некомпактном трехмерном многообразии M с бесконечным числом попарно неизоморфных групп изотропии точек $x \in M$. С помощью теоремы 9 можно снабдить M такой римановой метрикой g, что действие S^1 на (M, g) изометрично, а соответствующее этому действию поле Киллинга X имеет единичную длину. Понятно, что в таком случае число минимальных положительных периодов для точек многообразия M бесконечно и в совокупности эти периоды не ограничены снизу никаким положительным числом. Это же наблюдение показывает, что никакой элемент $g \in S^1$, отличный от единицы группы, не является переносом Клиффорда — Вольфа на (M, g), т. е. изометрией, перемещающей все точки на одно и то же расстояние. Согласно предложению 3 в [20] радиус инъективности построенного таким образом риманова многообразия (M, g) не ограничен снизу никакой положительной константой.

Из теоремы 9 сразу получается следующий вариант теоремы А. Уодсли.

Теорема 10. *Пусть M — гладкое многообразие, а X — нигде не обращающееся в нуль векторное поле на M, все интегральные траектории которого замкнуты. Поле X порождается некоторым гладким действием $\eta : S^1 \times M \to M$ тогда и только тогда, когда на M существует такая риманова метрика g, что X является единичным киллинговым полем на римановом многообразии (M, g).*

В следующих двух разделах мы покажем существование квазирегулярных киллинговых полей постоянной длины на римановых многообразиях, близких в определенном смысле к компактным симметрическим пространствам.

4. Односвязные многообразия

С помощью теоремы 9 можно построить множество примеров римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми полями постоянной длины. В этом разделе мы рассмотрим односвязные примеры таких многообразий.

Рассмотрим гладкое действие $\mu : S^1 \times M \to M$ окружности на гладком многообразии M. Напомним, что почти свободное действие μ называется *псевдосвободным*, если множество сингулярных орбит конечно, но не пусто [21].

Согласно теореме 9 на каждом многообразии M с псевдосвободным действием окружности S^1 можно задать риманову метрику g такую, что поле X, порожденное действием S^1, является квазирегулярным киллинговым полем единичной длины. Учитывая наличие множества примеров псевдосвободного действия окружности на многообразиях, мы получаем много примеров римановых многообразий с квазирегулярными киллинговыми полями постоянной длины. Например, в работе [21] доказано, что каждая из 28 гомотопических 7-сфер допускает гладкие псевдосвободные действия S^1. Таким образом, применяя теорему 9, получаем

Следствие 10. *На каждой из 28 гомотопических семимерных сфер Σ можно ввести риманову метрику g такую, что на (Σ, g) существует квазирегулярное киллингово поле единичной длины.*

Хорошо известны псевдосвободные действия окружности S^1 на нечетномерных сферах S^{2n-1}, которые мы сейчас опишем.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, со стандартной эрмитовой нормой сферу

$$S^{2n-1} = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}.$$

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — натуральные числа, не имеющие общего делителя > 1. Рассмотрим следующее действие окружности $S^1 \subset \mathbb{C}$ на S^{2n-1}:

$$s(z) = (s^{q_1} z_1, s^{q_2} z_2, \ldots, s^{q_n} z_n), \quad s \in S^1. \tag{8}$$

Понятно, что это действие изометрично относительно канонической метрики на S^{2n-1}, индуцированной стандартной евклидовой метрикой из $\mathbb{C}^n$. Если среди чисел q_i есть неравные, то существуют особые орбиты относительно этого действия, т. е. действие S^1 является псевдосвободным.

Следствие 11. *На каждой сфере S^{2n-1} при $n \geq 2$ существует риманова метрика, обладающая квазирегулярным единичным полем Киллинга таким, что лишь одна интегральная траектория этого поля является особой.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай конструкции (8), когда $q_1 = q > 1$ и $q_i = 1$ при $2 \leq i \leq n$. Для такого действия существует лишь одна особая орбита, а именно орбита, проходящая через точку $(1, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$. Согласно теореме 9 сфера S^{2n-1} $(n \geq 2)$ допускает риманову метрику такую, что векторное поле X, порожденное рассматриваемым действием S^1 на S^{2n-1}, является киллинговым полем единичной длины относительно этой метрики. $\square$

Отметим, что метрики из следствия 11, построенные с помощью конструкции, изложенной в доказательстве теоремы 9, имеют кооднородность 1. Напомним, что гладкое (компактное риманово) многообразие M имеет *кооднородность* 1, если пространство орбит M/G полной группы изометрий G пространства M одномерно. Обширная информация и библиография по римановым многообразиям кооднородности 1 приведена в работах [22, 23].

Более интересным представляется следующий результат.

Теорема 11. *На каждой сфере S^{2n-1}, $n \geq 2$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют (вещественно аналитическая) риманова метрика g кооднородности 1 и (вещественно аналитическое) поле Киллинга X единичной длины на (S^{2n-1}, g) с замкнутыми интегральными траекториями такие, что*

1) *все секционные кривизны (S^{2n-1}, g) отличаются от 1 не более чем на ε;*

2) *выполнено соотношение $L/l > 1/\varepsilon$, где L и l — максимальная и минимальная из длин интегральных траекторий поля X соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим частный случай (8), когда $q_1 = q > 1$, а $q_i = q+1$ при $2 \leq i \leq n$. Отметим, что наименьший положительный период относительно потока, соответствующего действию S^1, для точек $x \in S^{2n-1}$ равен либо $2\pi/q$, либо $2\pi/(q+1)$, либо 2π. Квадрат длины киллингова поля V, порожденного действием (8), на сфере S^{2n-1} с канонической метрикой вычисляется по формуле

$$\mathrm{can}_x(V, V) = q^2\bigl(x_1^2 + x_2^2\bigr) + (q+1)^2\bigl(x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2\bigr),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$, $x_{2k-1} + \sqrt{-1}x_{2k} = z_k \in \mathbb{C}$. Рассмотрим теперь поле $\widetilde{V} = \frac{1}{q}V$. Оно киллингово на (S^{2n-1}, can), при этом $1 \leq \sqrt{\mathrm{can}(\widetilde{V}, \widetilde{V})} \leq 1 + 1/q$. При $q \to \infty$ такие поля сходятся к единичному киллингову полю на сфере (S^{2n-1}, can). Пусть $f^q : S^{2n-1} \to \mathbb{R}$ определяется формулой $f^q(x) = \mathrm{can}_x(\widetilde{V}, \widetilde{V}) = 1 + \frac{2q+1}{q^2}\varphi(x)$, где $\varphi(x) = \sum\limits_{i=3}^{2n} x_i^2$ для $x \in S^{2n-1}$.

Рассмотрим теперь новую риманову метрику g^q на S^{2n-1}, определяемую следующим образом:

$$g^q = (\mathrm{can}(\widetilde{V}, \widetilde{V}))^{-1}\,\mathrm{can} = \frac{1}{f^q}\,\mathrm{can}\,.$$

Таким образом, g^q получается конформной деформацией канонической метрики на S^{2n-1}, а поле $\widetilde{V}$ является единичным киллинговым относительно этой метрики.

Покажем теперь, что метрики g^q на сферах S^{2n-1} имеют кооднородность 1. Отметим, что функция φ, а вместе с ней и функции f^q инвариантны относительно действия группы $SO(2) \times SO(2n-2) \subset SO(2n)$, которая изометрично действует на (S^{2n-1}, can) с коодноролностью 1. Пространством орбит при этом действии является отрезок вещественной оси. Орбитами действия этой группы являются множества

$$M_t = \left\{x \in \mathbb{R}^{2n} \,|\, x_1^2 + x_2^2 = t^2, x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n}^2 = 1 - t^2\right\}$$

при $t \in [0, 1]$. Очевидно, что орбита M_0 диффеоморфна сфере S^{2n-3}, орбита M_1 диффеоморфна S^1, а орбиты M_t при $t \in (0, 1)$ диффеоморфны $S^1 \times S^{2n-3}$. В силу инвариантности функций f^q относительно действия группы $SO(2) \times SO(2n-2)$ метрики g^q также инвариантны относительно действия этой группы, а значит, имеют коодноролность 1.

Отметим, что любая орбита M_t, $t \in (0, 1)$, относительно метрики, индуцированной метрикой g^q, изометрична прямому метрическому произведению одномерной и $(2n-3)$-мерной евклидовых сфер подходящего радиуса. Сингулярные орбиты M_1 и M_0 являются вполне геодезическими в (S^{2n-1}, g^q) при любом натуральном q. Более того, M_1 изометрична $S^1(1)$, а M_0 изометрична $S^{2n-3}\left(\frac{q}{q+1}\right)$, где через $S^m(r)$ обозначена сфера радиуса r в $(m+1)$-мерном евклидовом пространстве с индуцированной римановой метрикой.

Докажем теперь, что при $q \to \infty$ секционные кривизны метрик g^q сходятся к секционным кривизнам канонической метрики can равномерно по всем точкам сферы и всем двумерным направлениям.

Напомним, как изменяется секционная кривизна римановой метрики при конформной деформации. Пусть g и $\bar{g} = \theta \cdot g$ — конформно эквивалентные римановы метрики на многообразии M, $\theta : M \to \mathbb{R}$ — положительная гладкая функция. Пусть σ — двумерная касательная площадка в некоторой точке $x \in M$, а векторы V и W образуют ортонормированный базис относительно g в σ. Секционные кривизны K_σ и $\overline{K}_\sigma$ площадки σ относительно метрик g и $\bar{g}$ связаны формулой (см. [24, § 3.6])

$$\theta \overline{K}_\sigma = K_\sigma - \frac{1}{2}\left(h_\psi(V, V) + h_\psi(W, W) + \frac{\|\nabla\psi\|^2 - (V\psi)^2 - (W\psi)^2}{2}\right), \qquad (9)$$

где $\psi = \ln\theta$, h_ψ — гессиан функции ψ, определяемый равенством $h_\psi(X, Y) = g(\nabla_X \nabla\psi, Y)$.

В интересующем нас случае $M = S^{2n-1}$, $g = \mathrm{can}$ и, кроме того,

$$\theta(x) = 1/f^q(x), \quad \psi(x) = -\ln f^q(x) = -\ln\left(1 + \frac{2q+1}{q^2}\varphi(x)\right). \qquad (10)$$

Для любого $x \in S^{2n-1}$ имеет место неравенство $0 \le \varphi(x) \le 1$, поэтому функции f^q равномерно сходятся к функции, тождественно равной 1 на S^{2n-1}.

В силу компактности сферы S^{2n-1} нормы ковариантных дифференциалов $\nabla\varphi$ и $\nabla^2\varphi$ (относительно метрики can) ограничены сверху на S^{2n-1} некоторыми константами. Отсюда и из формул (9) и (10) мы легко получаем, что $\overline{K}_\sigma \to K_\sigma$ при $q \to \infty$ равномерно по всем точкам сферы и всем двумерным касательным площадкам.

Таким образом, в качестве метрики g в формулировке теоремы можно рассмотреть метрику g^q при достаточно большом q, а в качестве поля X при этом можно взять $\widetilde{V}$. Действительно, при достаточно большом q все секционные кривизны (S^{2n-1}, g^q) отличаются от 1 не более чем на ε. Далее, нетрудно понять, что длина каждой регулярной интегральной траектории поля $\widetilde{V}$ на (S^{2n-1}, g^q) равна $2\pi q$. Длины же сингулярных интегральных траекторий равны либо 2π, либо $2\pi\frac{q}{q+1}$. Таким образом, $L = 2\pi q$ и $l = 2\pi\frac{q}{q+1}$, где L и l — максимальная и минимальная из длин интегральных траекторий поля $\widetilde{V}$ на (S^{2n-1}, g^q) соответственно. Поэтому при достаточно больших q имеет место неравенство $L/l = q + 1 > 1/\varepsilon$. Теорема доказана. $\square$

Результаты теоремы 11 полезно сравнить с результатами работы [25]. В этой работе доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, m) > 0$ со следующим свойством: любая простая замкнутая геодезическая на сфере S^m, снабженной римановой метрикой g с условием $1-\delta < K < 1+\delta$ на секционную кривизну K, имеет длину l такую, что либо $l \in (2\pi-\varepsilon, 2\pi+\varepsilon)$, либо $l > 1/\varepsilon$, т. е. замкнутые геодезические бывают двух типов: «короткие» и «длинные». В примерах метрик на сфере S^{2n-1} из теоремы 11 среди замкнутых геодезических, являющихся интегральными кривыми поля X, есть геодезические как первого, так и второго типов.

Используя идеи доказательства теоремы 11, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 12. *На каждой сфере S^{2n-1}, $n \geq 2$, для любого $\varepsilon > 0$ существуют (вещественно аналитическая) риманова метрика g коодноpодности 1 и (вещественно аналитическое) поле Киллинга X единичной длины на (S^{2n-1}, g) такие, что*

1) *все секционные кривизны (S^{2n-1}, g) отличаются от 1 не более чем на ε;*

2) *поле X имеет как замкнутые, так и незамкнутые интегральные траектории.*

Доказательство. Можно представить сферу S^{2n-1} с канонической метрикой can постоянной секционной кривизны 1 как подмногообразие $S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\}$ с римановой метрикой, индуцированной стандартной евклидовой метрикой в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим поток $\mu : \mathbb{R} \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, заданный следующим образом:

$$\mu(s, z) = (e^{s\sqrt{-1}}z_1, e^{sq\sqrt{-1}}z_2, \dots, e^{sq\sqrt{-1}}z_n),$$

где $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$, $s \in \mathbb{R}$, а q — некоторое иррациональное число. Понятно, что поток μ изометричен относительно канонической метрики can на S^{2n-1}. Квадрат длины киллингова поля X на (S^{2n-1}, can), соответствующего потоку μ, вычисляется по формуле

$$\mathrm{can}_x(X, X) = \left(x_1^2 + x_2^2\right) + q^2\left(x_3^2 + x_4^2 + \dots + x_{2n-1}^2 + x_{2n}^2\right),$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})$, $x_{2k-1} + \sqrt{-1}x_{2k} = z_k \in \mathbb{C}$. При $q \to 1$ такие поля X сходятся к единичному киллингову полю на сфере (S^{2n-1}, can). Рассмотрим теперь новую риманову метрику g^q на S^{2n-1}, определяемую формулой

$$g^q = (\mathrm{can}(X, X))^{-1}\,\mathrm{can}$$

и являющуюся конформной деформацией канонической метрики на S^{2n-1}. Относительно метрики g^q поле X является единичным полем Киллинга (см. доказательство теоремы 9). Понятно, что метрика g^q вещественно аналитична и имеет коодноpодность 1 на S^{2n-1} относительно изометричного действия группы $SO(2) \times SO(2n-2) \subset SO(2n)$ (см. доказательство теоремы 11). Рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве теоремы 11, показывают, что при q, достаточно близких к 1, метрика g^q удовлетворяет условию 1 в формулировке теоремы 12.

Условие 2 в формулировке теоремы выполняется для каждой метрики g^q в силу иррациональности числа q. Таким образом, в качестве метрики g в формулировке теоремы 12 можно выбрать метрику g^q при некотором иррациональном q, достаточно близком к 1.

Отметим также, что множество точек конечного периода на (S^{2n-1}, g^q) относительно потока, порожденного киллинговым полем X, состоит из двух компонент связности (размерностей 1 и $2n-3$), изометричных некоторым евклидовым сферам. Все точки каждой из этих компонент имеют общий период, причем периоды разных компонент несоизмеримы. $\square$

В свете вышесказанного определенный интерес представляет следующая

Теорема 13 (Тушманн [26]). *Пусть $S(n, D)$ — класс односвязных n-мерных римановых многообразий (M, g) с секционной кривизной $|K_g| \leq 1$ и диаметром* $\mathrm{diam}(g) \leq D$ $(n \geq 2,\ D > 0)$. *Тогда существует положительное число $v = v(n, D)$ со следующим свойством: если $(M, g) \in S(n, D)$ удовлетворяет условию* $\mathrm{vol}(g) < v(n, D)$, *то*

1) *существует гладкое локально свободное действие окружности S^1 на M;*

2) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует S^1-инвариантная метрика g_ε на M такая, что*

$$e^{-\varepsilon} g < g_\varepsilon < e^{\varepsilon} g, \quad |\nabla_g - \nabla_{g_\varepsilon}| < \varepsilon, \quad |\nabla^i_{g_\varepsilon} R_{g_\varepsilon}| < C(n, i, \varepsilon);$$

3) *фактор-пространство индуцированного расслоения Зейферта на M является односвязным римановым орбифолдом.*

В. Тушманн замечает, что вследствие теоремы Бонне класс $PS(n, \delta)$ всех n-мерных римановых многообразий (M, g) с секционной кривизной $0 < \delta \leq K_g \leq 1$ является подклассом класса $S(n, D = \pi/\sqrt{\delta})$. Поэтому теорема 13 справедлива и для класса $PS(n, \delta)$. Если упомянутое S^1-действие для многообразия (M, g) из теоремы 13 свободно (соответственно локально свободно), то по теореме 9 на многообразии M можно задать риманову метрику g_1 такую, что указанное S^1-действие индуцировано регулярным (квазирегулярным) единичным полем Киллинга на M. Если при этом $(M, g) \in PS(n, \delta)$, то по теореме Берже (теорема 5) n должно быть нечетным. Кроме того, вследствие замечания 0.6 в [26] M допускает $\delta/2$-защемленную метрику $\tilde{g}$, инвариантную относительно рассматриваемого S^1-действия. С другой стороны, в настоящее время не известно условий, гарантирующих существование свободных или, напротив, почти свободных гладких S^1-действий для многообразий из класса $PS(n, \delta)$.

5. Геодезические потоки и метрики Сасаки на касательных расслоениях римановых многообразий

Дополнительным источником киллинговых полей постоянной длины являются векторные поля геодезических потоков для римановых многообразий, все геодезические которых замкнуты. Такие многообразия являются предметом исследования в [27].

В работе [28] Сасаки определил и исследовал в локальных координатах естественную и замечательную риманову метрику g^S на касательном расслоении TM риманова многообразия (M, g), обычно называемую *метрикой Сасаки*. Позднее эта метрика была описана в терминах оператора связности как метрика g_1 в разд. 1К книги [27] без ссылок на [28]. Далее для каждого $u > 0$ будем обозначать через $T_u M$ сферическое расслоение векторов длины u на римановом многообразии (M, g). Можно дать неявную, но полную характеризацию g^S с помощью трех следующих свойств.

1. Метрика на каждом касательном пространстве $M_x \subset TM$, $x \in M$, индуцированная метрикой g^S, совпадает с естественной римановой метрикой евклидова пространства $(M_x, g(x))$.

2. Естественная проекция $p : (TM, g^S) \to (M, g)$ является римановой субмерсией.

3. Горизонтальные геодезические римановой субмерсии p в точности являются параллельными векторными полями вдоль геодезических в (M, g).

В качестве простого следствия из этих свойств получается следующее свойство.

4. Векторное поле F геодезического потока риманова многообразия (M, g), определенного на (TM, g^S), является горизонтальным векторным полем римановой субмерсии p и касательно к расслоению $T_u M$ касательных векторов длины $u \neq 0$; интегральные кривые поля F являются специальными горизонтальными геодезическими в (TM, g^S), являющимися касательными векторными полями к геодезическим в (M, g).

Доказательство следующего свойства дано в предложении 1.102 из [27].

5. Вертикальные слои $p^{-1}(x), x \in M$, субмерсии p являются вполне геодезическими относительно g^S.

Особый интерес для нас представляет теорема E в [29].

Теорема 14 [29]. *Риманово многообразие (M, g) имеет постоянную секционную кривизну $k > 0$ тогда и только тогда, когда ограничение векторного поля геодезического потока F на $T_u M$, $u = \frac{1}{\sqrt{k}}$, является киллинговым векторным полем постоянной длины относительно индуцированной метрики (TM, g^S).*

Следуя [27], под римановым многообразием, все геодезические которого замкнуты, или P-многообразием, мы понимаем риманово многообразие (M, g) со свойством, что каждая геодезическая в (M, g) является периодической (другими словами, замкнутой). Специальный класс P-многообразий составляют SC-многообразия, т. е. римановы многообразия (M, g) такие, что все геодезические в (M, g) имеют общий минимальный период $l, 0 < l < \infty$, и каждая геодезическая длины l в (M, g) является простой замкнутой кривой. Если отбросить последнее требование в этом определении, мы получаем промежуточное понятие C-многообразия.

Классическими примерами SC-многообразий являются КРОСПы, т. е. компактные симметрические пространства ранга один. Известны гладкие римановы SC-поверхности вращения (S^2, g) с неканонической метрикой, среди которых можно выделить вещественно аналитический пример Цолля (1903 г.). Много позже, используя этот пример, А. Вейнстейн построил неканонические гладкие римановы SC-метрики на каждой сфере S^n, $n \geq 3$ (см. [27]).

Важным для нас является следующее наблюдение. Если (M, g) — P-многообразие, а Γ — конечная свободная группа изометрий на (M, g), то фактор-пространство M/Γ, снабженное естественной римановой фактор-метрикой, также является P-многообразием [27]; эта конструкция является дополнительным источником P-многообразий.

Предложение 4. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Ограничение X векторного поля геодезического потока F произвольного гладкого риманова P-многообразия M на (T_1M, g^S) является единичным касательным векторным полем, и его интегральные траектории суть простые периодические геодезические на (T_1M, g^S), параметризованные длиной дуги.*

2. *Поле X порождается эффективным гладким действием группы S^1 на T_1M и является единичным киллинговым полем некоторой гладкой римановой метрики g_0 на T_1M.*

3. *Если (M, g) имеет постоянную секционную кривизну $k = 1$, то можно взять $g_0 = g^S$.*

4. *Каждое риманово P-многообразие компактно, и все его геодезические имеют общий (не обязательно минимальный) период.*

5. *Упомянутое действие S^1 свободно тогда и только тогда, когда (M, g) является C-многообразием.*

Доказательство. Первое утверждение следует из указанных выше свойств 2 и 4 метрики Сасаки g^S на TM.

Для доказательства второго утверждения нам понадобится теорема A.26 из [27], утверждающая, что каждое поле Y единичных касательных векторов на произвольном римановом многообразии $\widetilde{M}$ такое, что все интегральные траектории поля Y являются геодезическими окружностями, порождается некоторым гладким действием S^1 (окружность S^1 при этом отождествляется с $\mathbb{R}/c\mathbb{Z}$, где $c > 0$ является константой, не обязательно совпадающей с единицей). Этот результат, а также утверждение 1 предложения и теорема 9 влекут второе утверждение предложения.

Третье утверждение является следствием теоремы 14.

Докажем теперь последние два утверждения предложения. Многообразие M компактно, поскольку оно является образом соответствующего (гладкого) отображения $p\circ\varphi : S^1\times T_1M \to M$, ограниченного на компактное подмножество $S^1 \times (T_1M \cap M_x)$, где x — произвольная точка в M, и $\varphi : S^1 \times T_1M \to T_1M$ — поток векторного поля X.

Согласно утверждениям 1 и 2 предложения все геодезические на произвольном P-многообразии (M, g) имеют общий (не обязательно минимальный) период c. Понятно, что период c является минимальным для всех геодезических тогда и только тогда, когда (M, g) является C-многообразием. $\square$

Следствие 12. *Если риманово P-многообразие (M, g) не является C-многообразием, то в обозначениях предложения 4 поле X — квазирегулярное единичное поле Киллинга на (T_1M, g_0). Если (M, g) — произвольное однородное риманово многообразие постоянной секционной кривизны* 1, *отличное от евклидовой сферы и вещественного проективного пространства, то векторное поле X является квазирегулярным единичным полем Киллинга на (T_1M, g^S).*

Доказательство. Первое утверждение следует из утверждения 4 предложения 4.

Пусть (M, g) — однородное риманово многообразие постоянной секционной кривизны 1, отличное от евклидовой сферы и вещественного проективного пространства. По теореме 26 из [20] на (M, g) существует квазирегулярное киллингово поле X постоянной длины. Очевидно, что замкнутые геодезические, являющиеся интегральными кривыми поля X, не имеют общего минимального периода. Следовательно, (M, g) не является C-многообразием. Теперь второе утверждение следствия 12 вытекает из утверждений 1 и 3 предложения 4 и фразы перед формулировкой предложения 4. □

В связи с вышесказанным будет уместным привести теорему 3.1 из [30].

Теорема 15 [30]. *Геодезический поток на римановом P-многообразии является вполне интегрируемым.*

Из этой теоремы и следствия 12 видно, что в общем случае наличие квазирегулярного поля Киллинга постоянной длины на римановом многообразии (M, g) не является препятствием для полной интегрируемости геодезического потока на (M, g). Дополнительную информацию о вполне интегрируемых геодезических потоках, а также о необходимых определениях и конструкциях можно найти в работах [30] и [31]. Читатель также может найти рассуждения о недостатках результатов, подобных теореме 15, в работе [31, с. 4196].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Killing W.* Über die Grundlagen der Geometrie // J. Reine Angew. Math. 1892. Bd 109. S. 121–186.

2. *Ricci G., Levi-Civita T.* Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications // Math. Ann. 1901. Bd 54. S. 125–201, 608.

3. *Eisenhart L. P.* Riemannian geometry. Princeton: Princeton Univ. Press; London: Humphrey Milford, Oxford Univ. Press, 1926.

4. *Bianchi L.* Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasfomazioni. Pisa: Spoerri, 1918.

5. *Belgun F., Moroianu A., Semmelmann U.* Symmetries of contact metric manifolds // Geom. Dedicata. 2003. V. 101, N 1. P. 203–216.

6. *Blair D.* Contact manifolds in Riemannian geometry. Berlin; New York: Springer Verl., 1976. (Lectures Notes in Math.; V. 509).

7. *Boyer C., Galicki K.* On Sasakian — Einstein geometry // Internat. J. Math. 2000. V. 11, N 7. P. 873–909.

8. *Bott R.* Vector fields and characteristic numbers // Michigan Math. J. 1967. V. 14, N 2. P. 231–244.

9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1, 2.

10. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.

11. *Wolf J. A.* Homogeneity and bounded isometries in manifolds of negative curvature // Illinois J. Math. 1964. V. 8. P. 14–18.

12. *Berger M.* Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B. 1966. V. 263. P. 76–78.

13. *Weinstein A.* A fixed point theorem for positively curved manifolds // J. Math. Mech. 1968/1969. V. 18, N 2. P. 149–153.

14. *Wallach N. R.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. (2). 1972. V. 96, N 2. P. 277–295.

15. *Synge J. L.* On the connectivity of spaces of positive curvature // Quart. J. Math. Oxford, Ser (1). 1936. V. 7, N 1. P. 316–320.

16. *Yano K., Bochner S.* Curvature and Betti numbers. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1953.

17. *Bochner S.* Vector fields and Ricci curvature // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. V. 52, N 9. P. 776–797.

18. *Wadsley A. W.* Geodesic foliations by circles // J. Differential Geom. 1975. V. 10, N 4. P. 541–549.

19. *Yang C. T.* On a problem of Montgomery // Proc. Amer. Math. Soc. 1957. V. 8, N 2. P. 255–257.

20. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* Killing vector fields of constant length on Riemannian manifolds. (Preprint arXiv:math.DG/0605371v1 15 May 2006).

21. *Montgomery D., Yang C. T.* On homotopy seven-spheres that admit differentiable pseudo-free circle actions // Michigan Math. J. 1973. V. 20, N 3. P. 193–216.

22. *Alekseevsky A. V., Alekseevsky D. V.* Riemannian G-manifolds with one dimensional orbit space // Ann. Global Anal. Geom. 1993. V. 11, N 3. P. 197–211.

23. *Grove K., Ziller W.* Cohomogeneity one manifolds with positive Ricci curvature // Invent. Math. 2002. V. 149, N 3. P. 619–646.
24. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
25. *Bangert V.* On the lengths of closed geodesics on almost round spheres // Math. Z. 1986. Bd 191, N 4. S. 549–558.
26. *Tuschmann W.* On the structure of compact simply connected manifolds of positive sectional curvature // Geom. Dedicata. 1997. V. 67, N 1. P. 107–116.
27. *Бессе А. Л.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
28. *Sasaki S.* On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds // Tohôku Math. J. 1958. V. 10. P. 338–354; II: 1962. V. 14. P. 146–155.
29. *Tanno S.* Killing vectors and geodesic flow vectors on tangent bundles // J. Reine Angew. Math. 1976. Bd 282. S. 162–171.
30. *Bolsinov A.V., Jovanović B.* Noncommutative integrability, moment map and geodesic flows // Ann. Glob. Anal. Geom. 2003. V. 23, N 4. P. 305–322.
31. *Bolsinov A. V.* Integrable geodesic flows on Riemannian manifolds // J. Math. Sci. 2004. V. 123, N 4. P. 4185–4197.

Статья поступила 8 декабря 2006 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
`berestov@ofim.oscsbras.ru`

Никоноров Юрий Геннадьевич
Рубцовский индустриальный институт
Алтайского гос. технического университета им. И. И. Ползунова,
ул. Тракторная, 2/6, Рубцовск 658207
`nik@inst.rubtsovsk.ru`