Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.956+517.958:531.72

ЭНТРОПИЙНЫЕ РЕШЕНИЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ВЕРИГИНА

С. А. Саженков

Аннотация. Изучается задача Коши для двумерной ультрапараболической модели фильтрации вязкой несжимаемой жидкости, содержащей примесь, с учетом эффекта диффузии примеси в пористую среду. Пористая среда состоит из волокон, направленных вдоль некоторого векторного поля $\boldsymbol{n}^{\perp}$. Доказывается, что если заданные нелинейности в уравнениях модели и геометрическая структура волокон удовлетворяют дополнительному условию «истинной нелинейности», то задача Коши с ограниченными начальными данными имеет по меньшей мере одно энтропийное решение и быстро осциллирующие режимы, которые могут иметь место в начальных данных, моментально подавляются в энтропийных решениях. Доказательства основаны на введении в рассмотрение и систематическом изучении кинетического уравнения, ассоциированного с задачей, и на применении модификации H-мер Тартара, предложенной Е. Ю. Пановым.

Ключевые слова: ультрапараболическое уравнение, энтропийное решение, истинная нелинейность, анизотропная пористая среда, нелинейная конвекция-диффузия, кинетическое уравнение.

§ 1. Введение

В статье исследуются вопросы корректности задачи Коши для математической модели, описывающей процесс фильтрации вязкой жидкости, содержащей растворенное в ней вещество (примесь), через пористую среду с учетом эффекта диффузии примеси в пористую среду. При этом считается, что поры имеют геометрически анизотропную вырожденную структуру.

Система уравнений общего вида для описания фильтрации смешивающихся жидкостей в условиях их физико-химического взаимодействия с пористой средой предложена Н. Н. Веригиным (см. [1, 2] и обзор [3, гл. 7, § 1]) и состоит из уравнений фильтрации

$$\boldsymbol{v} = -\frac{k_*}{\mu_*}\nabla_x p_* + \boldsymbol{g}, \quad \frac{\partial(m\rho)}{\partial t} + \operatorname{div}_x(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha_\rho(p_* - p_{*0})], \quad m = m_0 + \alpha_n(p_* - p_{*0}) \tag{1.2}$$

и уравнений диффузии и массообмена

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{v}u - \mathbb{A}\nabla_x b(u), \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial(mu)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \boldsymbol{W} = 0, \tag{1.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00309) и Национальной исследовательской программы для университетов Комиссии по высшему образованию Пакистана (название проекта: «Современный анализ анизотропной диффузии и распространения акустических волн в пористой среде»).

$$N = f_0(u, \gamma_0). \tag{1.4}$$

В этих уравнениях $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты; $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ — скорость фильтрации; $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, W_3)$ — массовая скорость ассоциированного с жидкостью вещества (т. е. примеси); u и N — массовые концентрации вещества в жидкой (на единицу объема раствора) и твердой (на единицу объема пористой среды) фазах; μ_* и ρ — вязкость и плотность жидкости при давлении p_*; m — пористость; k_* — проницаемость; $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$ — вектор распределенных массовых сил (сил плавучести); m_0 и ρ_0 — пористость среды и плотность жидкости при начальном давлении p_{*0}; α_ρ и α_n — параметры сжимаемости жидкости и пористой среды; $\mathbb{A}$ — тензор диффузии, учитывающий в общем случае молекулярную диффузию и гидродинамическую дисперсию; b — диффузионная функция; γ_0 — константа изотермы.

Уравнения (1.1) представляют собой соответственно закон Дарси и уравнение неразрывности; (1.2) — уравнения состояния жидкости и пористой среды; (1.3) — уравнения движения (закон Фика) и баланса массы вещества, содержащегося в жидкости и в твердой фазе; равенство (1.4) является уравнением изотермы обмена веществом между жидкостью и пористой средой. Согласно В. В. Рачинскому и Т. Б. Гапону [4] уравнение (1.4) может быть как линейным, типа линейной изотермы Генри, так и нелинейным, типа нелинейных изотерм Ленгмюра, Фрейндлиха и др.

Постановка изучаемой в настоящей статье модели непосредственно вытекает из фундаментальных уравнений (1.1)–(1.4) в силу дополнительных упрощающих и конкретизирующих предположений о свойствах участвующих в процессе фильтрации компонент и формулируется ниже как *задача А*.

Дополнительные предположения состоят в следующем. Считается, что жидкость и пористая среда несжимаемы, т. е. $\alpha_\rho = \alpha_n = 0$; вязкость жидкости μ_* и проницаемость k_* постоянны и отношение k_*/μ_* равно единице (для простоты); вектор сил плавучести может зависеть от концентрации примеси и имеет вид $\boldsymbol{g} = g(u)\boldsymbol{e}_1$, где $\boldsymbol{e}_1$ — базисный орт декартовой системы координат; диффузионная функция $b(u)$ гладкая и монотонно возрастающая; правая часть равенства (1.4) является гладкой по u; функция $a(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_0(u, \gamma_0) + mu$ монотонно возрастает. Относительно тензора диффузии предполагается, что он имеет структуру $\mathbb{A} = \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n}$ или, в эквивалентной покомпонентной записи, $A_{ij} = n_i n_j$, $i, j = 1, 2, 3$, где $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ — это гладкое нигде не вырожденное (т. е. $|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})| \neq 0$) 1-периодическое по $\boldsymbol{x}$ векторное поле. Вследствие первого из уравнений (1.3) такой вид тензора $\mathbb{A}$ означает, что эффект диффузии в направлениях, перпендикулярных $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$, отсутствует. Геометрически это соответствует ситуации, когда пористая среда состоит из периодически расположенных волокон, для которых в каждой точке $\boldsymbol{x}$ любое из направлений $\boldsymbol{n}^\perp(\boldsymbol{x})$ является касательным.

Далее в статье рассматривается только плоский случай, т. е. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2)$, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$, а волокна, составляющие твердую фазу, можно интерпретировать как нити, направленные вдоль векторного поля $\boldsymbol{n}^\perp = (-n_2, n_1)$.

Производя элементарные преобразования уравнений (1.1)–(1.4) в силу сделанных выше предположений, снабжая получаемую таким образом систему уравнений ограниченными 1-периодическими по x_1 и x_2 начальными данными для концентраций u и уточняя условия гладкости на заданные функции, приходим к следующей постановке.

Задача А (ультрапараболическая задача Веригина). *В пространственно-*

временном слое $\Pi := \mathbb{R}^2_x \times (0,T)$, $T = const > 0$, *требуется отыскать распределение концентраций* $u = u(\boldsymbol{x},t)$, *поле скоростей фильтрации* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = (v_1(\boldsymbol{x},t), v_2(\boldsymbol{x},t))$ *и распределение давлений* $p_* = p_*(\boldsymbol{x},t)$, *удовлетворяющие ультрапараболическому уравнению баланса массы*

$$a(u)_t + \mathrm{div}_x(\boldsymbol{v}u) = \partial_n^* \partial_n b(u), \tag{1.5a}$$

закону Дарси

$$\boldsymbol{v} = -\nabla_x p_* + g(u)\boldsymbol{e}_1, \tag{1.5b}$$

условию несжимаемости

$$\mathrm{div}_x\, \boldsymbol{v} = 0, \tag{1.5c}$$

1-*периодическим по* $\boldsymbol{x}$ *начальным условиям из класса* $L^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad 0 \le u_0(\boldsymbol{x}) \le 1, \quad u_0(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i) = u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \ (i=1,2), \tag{1.5d}$$

и условиям периодичности:

$$u(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i,t) = u(\boldsymbol{x},t), \quad \nabla_x p_*(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i,t) = \nabla_x p_*(\boldsymbol{x},t), \quad (\boldsymbol{x},t) \in \Pi \ (i=1,2). \tag{1.5e}$$

Функции $a(u)$, $b(u)$ и $g(u)$ заданы и удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} a,b,g \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad a'(u), b'(u) > 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}, \\ g'(u) = 0 \quad \forall\, u \ge u_g, \quad \text{где} \quad u_g = \mathrm{const} \quad \text{достаточно велико.} \end{gathered} \tag{1.6}$$

Дифференциальные операторы ∂_n и ∂_n^* определены по формулам

$$\partial_n = n_1(\boldsymbol{x})\partial_{x_1} + n_2(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}, \quad \partial_n^* = \partial_{x_1}(n_1(\boldsymbol{x})\cdot) + \partial_{x_2}(n_2(\boldsymbol{x})\cdot),$$

в которых $\boldsymbol{n} \in C^2(\mathbb{R}^2)$ — заданное 1-периодическое по $\boldsymbol{x}$ невырожденное векторное поле: $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ $(i=1,2)$, $|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})| \ne 0$ в $\mathbb{R}^2_x$.

Заметим, что из уравнений (1.5b) и (1.5c) вытекает эллиптическое уравнение второго порядка

$$\Delta_x p_* = g(u)_{x_1}, \quad (\boldsymbol{x},t) \in \Pi. \tag{1.7}$$

Следовательно, ультрапараболическая модель Веригина может быть представлена в виде системы ультрапараболического (вырождающегося параболико-гиперболического) уравнения (1.5a) для концентраций и эллиптического уравнения (1.7) для давлений. В этом случае закон Дарси подставляется в (1.5a) и поле скоростей $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ более не участвует в системе уравнений и краевых условий и восстанавливается апостериори в силу закона Дарси.

§ 2. Понятие энтропийного решения задачи A. Формулировка основных результатов

В настоящей работе при выполнении дополнительного условия *истинной нелинейности* (см. ниже *условие* G), накладываемого на функции a, b, n_1 и n_2, с помощью концепции кинетического уравнения и аппарата теории H-мер Тартара устанавливаются существование энтропийного решения задачи A при любых 1-периодических начальных данных $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ и свойство подавления быстро осциллирующих режимов в решениях в случаях, когда быстрые осцилляции имеют место в начальном распределении концентраций примеси.

Для того чтобы сформулировать понятие энтропийного решения задачи A, введем некоторые обозначения для линейных пространств периодических функций. Далее через Q обозначается $\Omega \times (0,T)$, где $\Omega := [0,1) \times [0,1)$ — пространственный период. Через $L^p \subset L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и $H^{s,p} \subset H^{s,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ обозначаются банаховы пространства, состоящие из 1-периодических функций и снабженные нормами $\|u\|_{L^p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$, $\|u\|_{H^{s,p}} = \|u\|_{H^{s,p}(\Omega)}$. Для $l \geq 0$ полагаем, что C^l — это замкнутое подпространство 1-периодических по x_1 и x_2 функций из $C^l(\mathbb{R}^2)$.

Дифференциальный оператор $\boldsymbol{A} = \partial_n^* \partial_n : C^\infty \mapsto L^2$ является симметричным и неотрицательным в гильбертовом пространстве L^2. По теореме Фридрихса он имеет самосопряженное продолжение $\boldsymbol{A} : D(\boldsymbol{A}) \mapsto L^2$, где $D(\boldsymbol{A})$ состоит из всех функций $u \in L^2$ таких, что $\partial_n u \in L^2$. Снабжая множество $D(\boldsymbol{A})$ нормой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{H}} := \|u\|^2_{L^2} + \|\partial_n u\|^2_{L^2},$$

получаем гильбертово пространство, которое в дальнейшем обозначается через $\mathfrak{H}$.

Введем определение энтропийного решения задачи A.

Определение 1. Пара функций $\{u(\boldsymbol{x},t), p_*(\boldsymbol{x},t)\}$ называется *энтропийным решением задачи* A, если эти функции удовлетворяют условиям ограниченности и регулярности

$$\begin{gathered} u \in L^\infty(0,T;L^\infty) \cap L^2(0,T;\mathfrak{H}), \quad 0 \leq u \leq 1, \text{ п. в. в } \Pi, \\ p_* \in L^r(0,T;H^{1,r}) \quad \forall r \in [1,+\infty), \end{gathered} \tag{2.1}$$

интегральному равенству

$$\int\limits_Q (\nabla_x p_* \cdot \nabla_x \zeta - g(u)\zeta_{x_1})\, d\boldsymbol{x}dt = 0 \tag{2.2}$$

для любой 1-периодической по $\boldsymbol{x}$ функции $\zeta \in C^1(\Pi)$ и интегральному энтропийному неравенству

$$\int\limits_Q \{\psi(u)\eta_t + \varphi(u)\boldsymbol{v} \cdot \nabla_x \eta + w(u)\partial_n^*\partial_n \eta - \varphi''(u)b'(u)|\partial_n u|^2 \eta\}\, d\boldsymbol{x}dt \\ + \int\limits_\Omega \varphi(u_0)\eta(\boldsymbol{x},0)\, d\boldsymbol{x} \geq 0, \tag{2.3}$$

в котором вектор-функция $\boldsymbol{v}$ задается законом Дарси (1.5b), $\varphi(u)$ — произвольная гладкая выпуклая функция ($\varphi \in C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $\varphi''(u) \geq 0$), функции ψ и w связаны с φ соотношениями

$$\psi'(u) = a'(u)\varphi'(u), \quad w'(u) = b'(u)\varphi'(u), \tag{2.4}$$

а $\eta(\boldsymbol{x},t)$ — произвольная 1-периодическая по $\boldsymbol{x}$ функция из пространства $C^2(\Pi)$ такая, что $\eta|_{t=T} = 0$.

Условие *истинной нелинейности* задачи A состоит в следующем.

Условие G. *Для почти всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ при любой фиксированной постоянной $c \in \mathbb{R}$ функции $a'(\lambda)$ и $\lambda \mapsto c - b'(\lambda)(n_2(\boldsymbol{x})\partial_n n_1(\boldsymbol{x}) - n_1(\boldsymbol{x})\partial_n n_2(\boldsymbol{x}))$ линейно независимы на любом интервале положительной меры Лебега, лежащем на отрезке* $[0,1]$.

Замечание 1. Условие G допускает эквивалентную альтернативную формулировку в следующем виде: для почти всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ функция

$$\lambda \mapsto b(\lambda)(n_2(\boldsymbol{x})\partial_n n_1(\boldsymbol{x}) - n_1(\boldsymbol{x})\partial_n n_2(\boldsymbol{x}))$$

нелинейна на любом невырожденном интервале из множества $\{\lambda \in [0,1] : a''(\lambda) = 0\}$ и функция

$$\lambda \mapsto b'(\lambda)(n_2(\boldsymbol{x})\partial_n n_1(\boldsymbol{x}) - n_1(\boldsymbol{x})\partial_n n_2(\boldsymbol{x})) - \frac{a'(\lambda)b''(\lambda)}{a''(\lambda)}(n_2(\boldsymbol{x})\partial_n n_1(\boldsymbol{x}) - n_1(\boldsymbol{x})\partial_n n_2(\boldsymbol{x}))$$

непостоянна на любом невырожденном интервале из множества $\{\lambda \in [0,1] : a''(\lambda) \neq 0\}$.

Следующие теоремы являются основными результатами статьи.

Теорема 1 (существование энтропийных решений). *Пусть задача* A *истинно нелинейна в смысле условия* G. *Тогда она имеет по меньшей мере одно энтропийное решение при любых начальных данных $u_0 \in L^\infty$ таких, что $0 \le u_0(\boldsymbol{x}) \le 1$ п. в. в $\mathbb{R}^2$.*

Теорема 2 (о подавлении быстро осциллирующих начальных режимов). *Пусть задача* A *истинно нелинейна в смысле условия* G *и снабжена быстро осциллирующими начальными данными, которые моделируются как слабый предел последовательности $\{u_0^k\}_{k=1,2,\dots} \subset L^\infty$, так что*

$$u_0^k \to u_0 \quad \text{слабо* в } L^\infty \text{ при } k \nearrow \infty. \tag{2.5}$$

Тогда существует подпоследовательность энтропийных решений (u^k, p_*^k), соответствующих начальным данным u_0^k, которая сходится сильно в $L^2(0,T;L^2) \times L^2(0,T;H^{1,2})$ при $k \nearrow \infty$ к энтропийному решению (u, p_*), соответствующему начальным данным u_0.

Своеобразие задачи A заключается в вырожденности диффузионного процесса по пространственным направлениям, чего не наблюдается в хорошо изученных классических моделях двухфазной фильтрации Маскета — Леверетта и Веригина. В этой связи теоремы 1 и 2 являются продолжением обширной теории уравнений двухфазной фильтрации, подробно изложенной в большом количестве работ (см., например, [3, 5–7] и приведенные в этих монографиях ссылки).

Как будет видно из дальнейших рассуждений, условие G возникает в процессе доказательства теоремы 1 как техническое. В контексте решаемой задачи A оно является дополнительным условием на кривую изотермы (т. е. на нелинейность a), диффузионную функцию b и геометрическую структуру пористой среды, более точно, пространственную ориентацию составляющих пористую среду волокон. Вообще, условия истинной нелинейности (в английском оригинале — *genuine nonlinearity conditions*) играют важную роль в теории энтропийных решений квазилинейных уравнений и имеют большую историю. Впервые подобное условие сформулировано Лаксом в 1957 г. [8]. Обзоры результатов, полученных при условиях истинной нелинейности, можно найти, например, в [9, 10].

Дальнейшее изложение в статье организовано следующим образом. В § 3 вводится в рассмотрение параболическая аппроксимация задачи A и устанавливается свойство частичной компактности семейства приближенных полей скоростей $\boldsymbol{v}_\varepsilon$. В § 4 конструируются кинетические уравнения, ассоциированные с исходной задачей A и с ее аппроксимацией. В § 5 рассматривается H-мера Тартара, соответствующая последовательности приближенных распределений концентраций u_ε, и с помощью кинетических уравнений устанавливается принцип локализации для этой меры, который является центральным местом в доказательстве теорем 1 и 2. Наконец, в § 6 обоснование теорем 1 и 2 завершается.

§ 3. Параболическая аппроксимация задачи А. Частичная компактность семейства приближенных полей скоростей

Для произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим приближенную систему

$$\Delta_x p_{*\varepsilon} = g(u_\varepsilon)_{x_1}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Pi, \tag{3.1}$$

$$\partial_t a(u_\varepsilon) + \operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}_\varepsilon u_\varepsilon) = \partial_n^* \partial_n b(u_\varepsilon) + \varepsilon \Delta_x u_\varepsilon, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Pi, \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{v}_\varepsilon = -\nabla_x p_{*\varepsilon} + g(u_\varepsilon)\boldsymbol{e}_1, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Pi, \tag{3.3}$$

снабженную данными Коши (1.5d) и условиями периодичности (1.5e). Из известных фактов теории уравнений Маскета — Леверетта двухфазной фильтрации [5, гл. V, § 6, 8] следует, что задача (3.1)–(3.3), (1.5d), (1.5e) имеет единственное гладкое решение при любых начальных данных $u_0 \in L^\infty$ (давление $p_{*\varepsilon}$ определяется с точностью до постоянного слагаемого, которое может быть зафиксировано требованием, чтобы, например, $\int\limits_\Omega p_{*\varepsilon}(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = 0$). Из принципа максимума и энергетических оценок вытекают неравенства

$$0 \leq u_\varepsilon \leq 1, \quad \|u_\varepsilon\|^2_{L^2(0,T;\mathfrak{H})} + \varepsilon \|\nabla_x u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q)} + \|\nabla_x p_{*\varepsilon}\|^2_{L^r(Q)} \leq C_*(Q), \tag{3.4}$$

где показатель $r \in [1, \infty)$ произволен и постоянная C_* не зависит от ε. Из этих неравенств выводим, что существуют последовательность решений u_ε, $p_{*\varepsilon}$, $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ задачи (3.1)–(3.3), (1.5d), (1.5e) и тройка функций u, p_* и $\boldsymbol{v}$ такие, что

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{слабо}* \text{ в } L^\infty(Q), \quad \text{слабо в } L^2(0, T; \mathfrak{H}), \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{v}_\varepsilon \to \boldsymbol{v}, \ \nabla_x p_{*\varepsilon} \to \nabla_x p_* \quad \text{слабо в } L^r(Q) \quad \forall\, r \in [1, \infty) \tag{3.6}$$

при $\varepsilon \searrow 0$.

Поскольку задача А нелинейна, для предельного перехода в приближенных уравнениях необходимо доказать сильную сходимость какой-либо подпоследовательности приближенных решений. Для начала установим свойство частичной компактности семейства $\{\boldsymbol{v}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Положим

$$\boldsymbol{m}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = -\boldsymbol{v}_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) + \frac{g(u_\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)) n_1(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})}{|\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})|^2}. \tag{3.7}$$

Предложение 1. *Для любого ограниченного множества $\mathscr{K} \subset \mathbb{R}^2_x$ с достаточно гладкой границей существует постоянная $C_1(\mathscr{K})$ такая, что*

$$\|\boldsymbol{m}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{1,2}(\mathscr{K}))} + \|\partial_t \boldsymbol{m}_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1,2}(\mathscr{K}))} \leq C_1(\mathscr{K}). \tag{3.8}$$

Семейства $\{\boldsymbol{m}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ и $\{\boldsymbol{v}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{n}^\perp\}_{\varepsilon>0}$ относительно компактны в $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$.

Предложение 1 впервые сформулировано и доказано П. И. Плотниковым [11] в рамках изучения начально-краевой задачи с периодическими граничными условиями для системы уравнений, несколько отличающейся от системы (1.5a)–(1.5c). Доказательство предложения 1 является модификацией доказательства из [11] и поэтому опускается.

§ 4. Кинетические уравнения

4.1. Конструкция кинетического уравнения. Метод кинетического уравнения разработан относительно недавно с целью изучения широкого спектра проблем, например, краевых задач для системы уравнений изэнтропической газовой динамики и p-систем [10, 12] и квазилинейных законов сохранения первого и второго порядков [9, 10, 12, 13]. Сущность метода заключается в том, что он позволяет сводить квазилинейные уравнения к линейным скалярным уравнениям, решениями которых являются функции «распределений», содержащие дополнительные «кинетические» переменные. Кинетическое уравнение, ассоциированное с приближенной задачей (3.1)–(3.3), (1.5d) конструируется в форме, аналогичной [9, 13].

Введем в рассмотрение *функцию распределения*

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)=\begin{cases}1 & \text{при } \lambda\ge u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\\ 0 & \text{при } \lambda< u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t),\end{cases} \tag{4.1}$$

кинетическую меру параболической диссипации

$$d\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)=|\partial_n u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)|^2 d\gamma_{u_\varepsilon(x,t)}(\lambda)\,d\boldsymbol{x}dt \tag{4.2}$$

и *кинетическую энтропийную меру дефекта*

$$dM_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)=\varepsilon|\nabla_x u_\varepsilon|^2 d\gamma_{u_\varepsilon(x,t)}(\lambda)\,d\boldsymbol{x}dt. \tag{4.3}$$

В (4.1)–(4.3) u_ε — это приближенное распределение концентраций примеси, а через $\gamma_{u_\varepsilon(x,t)}$ обозначена параметризованная мера Дирака на $\mathbb{R}_\lambda$, сосредоточенная в точке $\lambda=u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)$.

Далее через $\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)$ и $\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)$ обозначаются банаховы пространства мер Радона на множествах $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{R}_\lambda$, снабженные нормами [14, п. 1.2.8]

$$\|\sigma\|_{\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)}:=\sup\biggl\{\biggl|\int\limits_{\mathbb{S}^2}\zeta(\boldsymbol{y})\,d\sigma(\boldsymbol{y})\biggr| : \zeta\in C(\mathbb{S}^2),\ \|\zeta\|_{C(\mathbb{S}^2)}\le 1\biggr\},$$

$$\|\sigma\|_{\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)}:=\sup\biggl\{\biggl|\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\zeta(\lambda)d\sigma(\lambda)\biggr| : \zeta\in C_0(\mathbb{R}_\lambda),\ \|\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_\lambda)}\le 1\biggr\}$$

соответственно, а через $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{S}^2)$ и $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ — локально выпуклые пространства локально-конечных 1-периодических по $\boldsymbol{x}$ мер Радона на множествах $\Pi\times\mathbb{S}^2$ и $\Pi\times\mathbb{R}_\lambda$, являющиеся банаховыми пространствами с нормами, определенными для сужений мер на $Q\times\mathbb{S}^2$ и $Q\times\mathbb{R}_\lambda$ соответственно:

$$\|\sigma\|_{\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{S}^2)}:=\sup\biggl\{\biggl|\int\limits_{Q\times\mathbb{S}^2}\zeta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\,d\sigma(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\biggr| : \zeta\in C(Q\times\mathbb{S}^2), \|\zeta\|_{C(Q\times\mathbb{S}^2)}\le 1\biggr\},$$

$$\|\sigma\|_{\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)}:=\sup\biggl\{\biggl|\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda}\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\sigma(\boldsymbol{x},t,\lambda)\biggr| : \zeta\in C(Q\times\mathbb{R}_\lambda), \|\zeta\|_{C(Q\times\mathbb{R}_\lambda)}\le 1\biggr\}.$$

1-Периодичность по $\boldsymbol{x}$ мер из $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ понимается в смысле интегральных равенств

$$\int\limits_{\Omega\times(0,T)\times[0,1]}\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\sigma(\boldsymbol{x},t,\lambda)=\int\limits_{(\Omega+\boldsymbol{e}_i)\times(0,T)\times[0,1]}\zeta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{e}_i,t,\boldsymbol{x})\,d\sigma(\boldsymbol{x},t,\lambda)\quad(i=1,2),$$

справедливых для любой функции $\zeta\in C(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$. Определение 1-периодичности по $\boldsymbol{x}$ для мер из $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{S}^2)$ аналогично.

Ясно, что $f_\varepsilon\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}_\lambda;L^\infty)$ и что меры χ_ε, M_ε принадлежат $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ и неотрицательны.

Предложение 2. *Функция f_ε и меры M_ε и χ_ε удовлетворяют интегральному равенству*

$$\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \{a'(\lambda)\partial_t\zeta - \boldsymbol{m}_\varepsilon\cdot\nabla_x\zeta + (n_1/|\boldsymbol{n}|^2)g(\lambda)\partial_n\zeta + b'(\lambda)\partial_n^*\partial_n\zeta + \varepsilon\Delta_x\zeta\} f_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}dtd\lambda$$
$$+ \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} (n_1/|\boldsymbol{n}|^2)\left(\int\limits_\lambda^\infty g'(s)f_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,s)\,ds\right)\partial_n\zeta\,d\boldsymbol{x}dtd\lambda + \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} b'(\lambda)\partial_\lambda\zeta\,d\chi_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)$$
$$+ \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \partial_\lambda\zeta\,dM_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda) + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_\lambda} a'(\lambda)f_0(\boldsymbol{x},\lambda)\zeta(\boldsymbol{x},0,\lambda)\,d\boldsymbol{x}d\lambda = 0 \quad (4.4)$$

для любых гладких 1-периодических по $\boldsymbol{x}$ пробных функций $\zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda)$, обращающихся в нуль при $t = T$ и при достаточно больших λ. В (4.4) и далее

$$f_0(\boldsymbol{x},\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \geq u_0(\boldsymbol{x}), \\ 0 & \text{при } \lambda < u_0(\boldsymbol{x}). \end{cases} \quad (4.5)$$

Замечание 2. В смысле теории распределений интегральное равенство (4.4) эквивалентно *кинетическому уравнению*

$$a'(\lambda)\partial_t f_\varepsilon - \operatorname{div}_x(\boldsymbol{m}_\varepsilon f_\varepsilon) + g(\lambda)\partial_n^*(n_1 f_\varepsilon/|\boldsymbol{n}|^2) - b'(\lambda)\partial_n^*\partial_n f_\varepsilon - \varepsilon\Delta_x f_\varepsilon$$
$$+ \partial_n^*\left((n_1/|\boldsymbol{n}|^2)\int\limits_\lambda^\infty g'(s)f_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,s)\,ds\right) + \partial_\lambda(b'(\lambda)\chi_\varepsilon + M_\varepsilon) = 0, \quad (\boldsymbol{x},t,\lambda)\in\Pi\times\mathbb{R}_\lambda, \quad (4.6)$$

и начальным данным

$$f_\varepsilon(\boldsymbol{x},0,\lambda) = f_0(\boldsymbol{x},\lambda), \quad (\boldsymbol{x},\lambda)\in\mathbb{R}_x^2\times\mathbb{R}_\lambda. \quad (4.7)$$

Доказательство предложения 2 элементарно: интегральное равенство (4.4) непосредственно следует из приближенной системы (3.1)–(3.3), (1.5d) в силу (4.1)–(4.3) и очевидного представления

$$\varphi(u_\varepsilon(\boldsymbol{x},t)) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(\lambda)f_\varepsilon(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\lambda \quad \forall\,\varphi\in C_0^1(\mathbb{R}). \quad (4.8)$$

4.2. Предельный переход в кинетическом уравнении при $\varepsilon \searrow 0$. Ввиду предельного соотношения (3.5), представления (4.1) и предложения 1 существуют подпоследовательность $(f^k,\boldsymbol{m}^k) := (f_{\varepsilon_k},\boldsymbol{m}_{\varepsilon_k})$ и предельные функции $f\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}_\lambda;L^\infty)$ и $\boldsymbol{m}\in L^2(0,T;H^{1,2})$ такие, что при $k\nearrow\infty$

$$f^k \to f \quad \text{слабо}* \text{ в } L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}_\lambda;L^\infty), \quad (4.9)$$

$$\boldsymbol{m}^k \to \boldsymbol{m} \quad \text{сильно в } L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi). \quad (4.10)$$

Кроме того, справедлива следующая

Лемма 1. *Существует мера $H\in\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ с носителем, принадлежащим множеству $\mathbb{I}_* = \{(\boldsymbol{x},t,\lambda)\in\Pi\times\mathbb{R}_\lambda : 0\leq\lambda\leq 1\}$, такая, что при подходящем выборе подпоследовательности $\{k\}\subset\mathbb{N}$ имеет место предельное соотношение*

$$M^k + b'(\lambda)\chi^k \to H \quad \text{слабо}* \text{ в } \mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda) \text{ при } k\nearrow\infty \quad (4.11)$$

(здесь $M^k := M_{\varepsilon_k}$ и $\chi^k := \chi_{\varepsilon_k}$).

Доказательство. В силу формул (4.6), (4.9) и (4.10) справедлива равномерная оценка

$$\|M^k + b'\chi^k\|_{(C^2(Q\times\mathbb{R}_\lambda))^*} \le c_*, \tag{4.12}$$

в которой постоянная c_* не зависит от $k \in \mathbb{N}$. Поскольку мера $M^k + b'\chi^k$ неотрицательна при любых $k \in \mathbb{N}$, заключаем, что существует единственное естественное продолжение этой меры на $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ и что множество $\{M^k + b'\chi^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничено по норме $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{R}_\lambda)$ постоянной c_* [15, гл. III, § 1, предложение 2]. Из этой оценки вытекает, что предельное соотношение (4.11) справедливо для некоторой подпоследовательности $k \in \mathbb{N}$. Носитель меры H целиком лежит в $\mathbb{I}_*$, поскольку носители мер M^k и χ^k лежат в $\mathbb{I}_*$ при всех $k \in \mathbb{N}$. □

Переходя к пределу при $k \nearrow \infty$ ($\varepsilon_k \searrow 0$ соответственно) в интегральном равенстве (4.4), в силу соотношений (4.9)–(4.11) выводим интегральное равенство

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \{a'(\lambda)\partial_t\zeta - \boldsymbol{m}\cdot\nabla_x\zeta + (n_1/|\boldsymbol{n}|^2)g(\lambda)\partial_n\zeta + b'(\lambda)\partial_n^*\partial_n\zeta\} f(\boldsymbol{x},t,\lambda)\,d\boldsymbol{x}dtd\lambda \\
&\quad + \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} (n_1/|\boldsymbol{n}|^2)\left(\int\limits_{\lambda}^{\infty} g'(s)f(\boldsymbol{x},t,s)\,ds\right)\partial_n\zeta\,d\boldsymbol{x}dtd\lambda + \int\limits_{Q\times\mathbb{R}_\lambda} \partial_\lambda\zeta\,dH(\boldsymbol{x},t,\lambda) \\
&\qquad + \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}_\lambda} a'(\lambda)f_0(\boldsymbol{x},\lambda)\zeta(\boldsymbol{x},0,\lambda)\,d\boldsymbol{x}d\lambda = 0,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

которое в смысле теории распределений эквивалентно предельному кинетическому уравнению

$$\begin{aligned}
&a'(\lambda)\partial_t f - \operatorname{div}_x(\boldsymbol{m}f) + g(\lambda)\partial_n^*(n_1 f/|\boldsymbol{n}|^2) - b'(\lambda)\partial_n^*\partial_n f \\
&\quad + \partial_n^*\left((n_1/|\boldsymbol{n}|^2)\int\limits_{\lambda}^{\infty} g'(s)f(\boldsymbol{x},t,s)\,ds\right) + \partial_\lambda H = 0, \quad (\boldsymbol{x},t,\lambda) \in \Pi\times\mathbb{R}_\lambda,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

и начальным данным

$$f(\boldsymbol{x},0,\lambda) = f_0(\boldsymbol{x},\lambda), \quad (\boldsymbol{x},\lambda) \in \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}_\lambda. \tag{4.15}$$

Замечание 3. Для доказательства того, что из интегрального тождества (4.13) следует начальное соотношение (4.15), необходимо показать, что предельная мера дефекта H удовлетворяет равенству $\lim\limits_{\tau\searrow 0} \int\limits_{\Omega\times[0,\tau]\times\mathbb{R}_\lambda} dH(\boldsymbol{x},t,\lambda) = 0$, т. е. H не концентрируется в окрестности $t = 0$. Обоснование этого свойства полностью аналогично [12, лемма 11].

Дальнейшей целью и ключевым местом настоящей статьи являются, во-первых, доказательство того, что кинетические уравнения (4.6) и (4.14) в силу условия истинной нелинейности (условия G) содержат полную информацию о структуре предельной кинетической функции $f(\boldsymbol{x},t,\lambda)$, и, во-вторых, отыскание этой структуры. Как станет ясно из дальнейшего изложения, функция f имеет вид функции Хевисайда от λ, зависящей от $\boldsymbol{x}$ и t как от параметров, а это, в свою очередь, позволит достаточно просто сделать заключение о сильной сходимости подпоследовательностей u^k и $\boldsymbol{v}^k$, что в конечном итоге приведет к доказательству теоремы 1. Изучение кинетических уравнений (4.6) и (4.14) проводятся с помощью теории H-мер Тартара.

§ 5. $\boldsymbol{H}$-меры Тартара. Принцип локализации для $\boldsymbol{H}$-мер

5.1. Определение H-мер. Конструкция H-мер впервые была предложена Тартаром [16] и Жераром [17] и затем получила свое развитие в работах Е. Ю. Панова [18, 19]. По своей природе H-меры являются микролокальными мерами дефекта, позволяющими проследить эволюцию быстро осциллирующих режимов в решениях уравнений математической физики в пространстве времени t, позиций $\boldsymbol{x}$ и частот $\boldsymbol{\xi}$. Более точно, они показывают, где в физическом пространстве времени и положений и при каких частотах в пространстве Фурье слабо сходящиеся в L^2_{loc} последовательности решений не имеют сильно сходящихся подпоследовательностей.

Из нижеследующей леммы вытекает, что f является монотонной неубывающей и непрерывной справа функцией по λ. Такая структура функции f позволяет воспользоваться теоремой Панова о модификации понятия H-мер Тартара [18, теорема 3] и в силу этой теоремы ввести в рассмотрение семейство H-мер, ассоциированное с подпоследовательностью $f^k - f$.

Лемма 2. *Функция f в предельном соотношении* (4.9) *является функцией распределения меры Янга $\mu_{x,t} \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$, ассоциированной с подпоследовательностью $\{u^k\}$, т. е.*

$$f(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}_s} 1_{\lambda \geq s} d\mu_{x,t}(s). \tag{5.1}$$

Здесь $\mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$ — это подмножество $\mathbb{M}(\mathbb{R}_\lambda)$, состоящее из всех неотрицательных мер с единичной нормой. Мера Янга, ассоциированная с подпоследовательностью $\{u_k\} \subset L^\infty(\Pi)$, — это ограниченное слабо измеримое отображение $(\boldsymbol{x}, t) \mapsto \mu_{x,t}$ из Π в $\mathrm{Prob}(\mathbb{R}_\lambda)$ такое, что $\operatorname{spt} \mu_{x,t} \subset \{\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1\}$, удовлетворяющее равенству

$$\lim_{k \nearrow \infty} \int\limits_{\Pi} \zeta(\boldsymbol{x}, t, u^k(\boldsymbol{x}, t))\, d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{\Pi} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda} \zeta(\boldsymbol{x}, t, \lambda)\, d\mu_{x,t}(\lambda) \Bigg)\, d\boldsymbol{x}dt \tag{5.2}$$

для любых $\zeta \in C_0(\Pi \times \mathbb{R}_\lambda)$. Существование меры Янга утверждается теоремой Тартара [14, гл. 3, теорема 2.3].

Лемма 2 доказана в [9, лемма 1]. $\square$

Введем в рассмотрение множество

$$\mathscr{E} := \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : f(\cdot,\cdot,\lambda) \to f(\cdot,\cdot,\lambda_0) \text{ сильно в } L^1_{\mathrm{loc}}(\Pi) \text{ при } \lambda \to \lambda_0\}.$$

Из леммы 4 в [18] и теоремы Панова о модификации H-мер Тартара [18, теорема 3] непосредственно вытекают два следующих утверждения.

Лемма 3. *Дополнение к $\mathscr{E}$ в $\mathbb{R}$ не более чем счетно, и для любого $\lambda \in \mathscr{E}$ справедливо предельное соотношение: $f^k(\cdot,\cdot,\lambda) \underset{k \nearrow \infty}{\longrightarrow} f(\cdot,\cdot,\lambda)$ слабо$*$ в $L^\infty(\Pi)$.*

Теорема H (существование H-мер). *Существуют семейство локально-конечных мер Радона $\{\nu^{pq}\}_{p,q \in \mathscr{E}}$ на $\Pi \times \mathbb{S}^2$ и подпоследовательность из $\{f^k(\lambda) - f(\lambda)\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathscr{E}$, такие, что для любых $\Phi_1, \Phi_2 \in C_0(\Pi)$ и $\Psi \in C(\mathbb{S}^2)$ выполняется* *равенство*

$$\int\limits_{\Pi\times\mathbb{S}^2} \Phi_1(\boldsymbol{x},t)\overline{\Phi_2(\boldsymbol{x},t)}\Psi(\boldsymbol{y})d\nu^{pq}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$$

$$= \lim_{k\nearrow\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathscr{F}[\Phi_1(f^k(p)-f(p))](\boldsymbol{\xi})\overline{\mathscr{F}[\Phi_2(f^k(q)-f(q))](\boldsymbol{\xi})}\Psi\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{|\boldsymbol{\xi}|}\right)d\boldsymbol{\xi} \quad \forall\, p,q\in\mathscr{E}. \tag{5.3}$$

В формулировке теоремы H и далее через $\mathbb{S}^2$ обозначается единичная сфера в $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{S}^2 := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3 : y_0^2+y_1^2+y_2^2=1\}$, через $\overline{\varphi}$ — комплексное сопряжение к φ и через $\mathscr{F}$ — преобразование Фурье по $\boldsymbol{x}$ и t:

$$\mathscr{F}[\varphi](\boldsymbol{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(\boldsymbol{x},t)e^{2\pi i(\xi_0 t+\xi_1 x_1+\xi_2 x_2)}\,d\boldsymbol{x}dt$$

для любой интегрируемой функции φ. Считается, что если изначально функция определена только при $t\in[0,T]$, то за пределами $[0,T]$ она также определена и тождественно равна нулю.

Определение 2. Семейство мер $\{\nu^{pq}\}_{p,q\in\mathscr{E}}$ называется *H-мерой, ассоциированной с выбранной подпоследовательностью* $\{f^k-f\}$.

Из общей теории H-мер вытекают следующие ее свойства.

Лемма 4. (1) *Для любого конечного множества* $E:=\{p_1,\dots,p_n\}\subset\mathscr{E}$ *множество мер* $(\nu^{p_ip_j})_{i,j=1,\dots,n}$ *является эрмитовым неотрицательным, т. е.*

$$\nu^{p_ip_j} = \bar{\nu}^{p_jp_i}, \qquad \sum_{i,j=1}^{n}\langle\nu^{p_ip_j},\Phi_i\overline{\Phi}_j\Psi\rangle \geq 0 \tag{5.4}$$

для любых $\Phi_1,\dots,\Phi_n\in C_0(\Pi)$ *и* $\Psi\in C(\mathbb{S}^2)$, $\Psi\geq 0$ [16, *следствие* 1.2].

(2) *Отображение* $(p,q)\mapsto\nu^{pq}$ *непрерывно из* $\mathscr{E}\times\mathscr{E}$ *в* $\mathbb{M}(\Pi\times\mathbb{S}^2)$ [18, *теорема* 3].

(3) *Выберем счетное всюду плотное множество индексов* $\mathscr{E}'\subset\mathscr{E}$. *Для любых* $p,q\in\mathscr{E}'$ *мера* ν^{pq} *абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на* Π. *Как функционал, определенный на* $C(Q\times\mathbb{S}^2)$, *она допускает естественное продолжение на* $L^2(Q,C(\mathbb{S}^2))$, *поэтому имеет место разложение* $d\nu^{pq}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = d\Lambda^{pq}_{x,t}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}dt$. *Отображение* $(\boldsymbol{x},t)\mapsto\Lambda^{pq}_{x,t}$, *где* $(\boldsymbol{x},t)\in\Pi$, *1-периодично по* $\boldsymbol{x}$, *принадлежит* $L^2_{w,\mathrm{loc}}(\Pi,\mathbb{M}(\mathbb{S}^2))$ *и однозначно определяется по* ν^{pq}. *При п. в.* $(\boldsymbol{x},t)\in\Pi$ *отображение* $\lambda\mapsto\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t}$ *непрерывно справа как отображение* $\mathscr{E}'$ *в пространство* $\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)$ [19, *предложение* 3 *и следствие* 1].

(4) *Зафиксируем* $(\boldsymbol{x},t)$ *из множества полной меры в* Q, *на котором определены меры* $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t}\in\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)$. *Для* $\lambda\in\mathscr{E}'$ *обозначим через* $L(\lambda)\subset\mathbb{R}^3$ *минимальное линейное подпространство, содержащее носитель меры* $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t}$. *Выберем среди подпространств* $L(\lambda)$ *подпространство* $L:=L(\lambda_0)$ *максимальной размерности. Справедлив следующий результат о стабилизации линейной оболочки носителей мер* $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t}$: *существует число* $\delta>0$ *такое, что для любых* λ *из множества* $[\lambda_0,\lambda_0+\delta]\cap\mathscr{E}'$ *подпространство* $L(\lambda)$ *совпадает с* L [19, *лемма* 3].

(5) $f^k(\cdot,\cdot,\lambda)\underset{k\nearrow\infty}{\to} f(\cdot,\cdot,\lambda)$ *сильно в* $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$ *при* $\lambda\in\mathscr{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\nu^{\lambda\lambda}\equiv 0$ [16].

В п. 3 через $L^2_{w,\mathrm{loc}}(\Pi,\mathbb{M}(\mathbb{S}^2))$ обозначено пространство слабо измеримых относительно меры Лебега на Π отображений $(\boldsymbol{x},t)\mapsto\Lambda_{x,t}$ из Π в $\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)$ таких, что сужение на произвольное ограниченное измеримое множество $\mathscr{K} \subset \Pi$ имеет конечную норму:

$$\|\Lambda\|_{L^2_w(\mathscr{K},\mathbb{M}(\mathbb{S}^2))} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int\limits_{\mathscr{K}} \|\Lambda_{x,t}\|^2_{\mathbb{M}(\mathbb{S}^2)}\, d\boldsymbol{x}dt\right)^{1/2} < \infty \quad \forall \Lambda \in L^2_{w,\mathrm{loc}}(\Pi, \mathbb{M}(\mathbb{S}^2)).$$

В свете дальнейших рассмотрений обратим внимание на п. 5 леммы. Наша цель в изучении H-меры $\{\nu^{pq}\}$ заключается в доказательстве того, что в силу кинетических уравнений и условия истинной нелинейности «диагональное» семейство мер $\{\nu^{\lambda\lambda}\}_{\lambda\in\mathscr{E}}$ состоит всего лишь из нулевой меры и, значит, подпоследовательность f^k сходится к f сильно.

5.2. Формулировка принципа локализации для H-мер.

Теорема 3. *H-мера $\nu^{\lambda\lambda}$, ассоциированная с выбранной подпоследовательностью $\{f^k - f\}$, удовлетворяет интегральному равенству*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\left(\int\limits_{Q\times\mathbb{S}^2} \zeta(\boldsymbol{x},t,\lambda,\boldsymbol{y})(n_1(\boldsymbol{x})y_1 + n_2(\boldsymbol{x})y_2)\, d\nu^{\lambda\lambda}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\right) d\lambda = 0 \tag{5.5}$$

для любой функции $\zeta \in C_0\big(Q\times\mathbb{R}_\lambda; C\big(\mathbb{S}^2_y\big)\big)$ и интегральному равенству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\lambda}\int\limits_{Q\times\mathbb{S}^2}\left(a'(\lambda)y_0 - \sum_{j=1}^{2}\left(m_j(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{2}b'(\lambda)\partial_n n_j(\boldsymbol{x})\right)y_j\right)\beta(\boldsymbol{x},t,\lambda,\boldsymbol{y})\, d\nu^{\lambda\lambda}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\, d\lambda = 0 \tag{5.6}$$

для любой функции $\beta \in C_0\big(Q\times\mathbb{R}_\lambda; C\big(\mathbb{S}^2_y\big)\big)$, являющейся нечетной по $\boldsymbol{y}$, т. е. $\beta(\boldsymbol{x},t,\lambda,-\boldsymbol{y}) = -\beta(\boldsymbol{x},t,\lambda,\boldsymbol{y})$.

Следствие 1 (принцип локализации). *Носитель H-меры $\nu^{\lambda\lambda}$ при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$ принадлежит пересечению множеств*

$$\{(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \in \Pi\times\mathbb{S}^2 : n_1(\boldsymbol{x})y_1 + n_2(\boldsymbol{x})y_2 = 0\}$$

и

$$\left\{(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) \in \Pi\times\mathbb{S}^2 : a'(\lambda)y_0 - \sum_{r=1}^{2}\left(m_r(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{2}b'(\lambda)\partial_n n_r(\boldsymbol{x})\right)y_r = 0\right\}.$$

Обоснование следствия 1 полностью аналогично доказательству следствия 1 в [9].

Обоснование теоремы 3 принципиально проводится точно так же, как доказательство теоремы 3 в [9], и поэтому опускается.

§ 6. Доказательство теорем 1 и 2

В первую очередь докажем утверждение о тривиальности H-меры.

Лемма 5. *Если для данных задачи* A *выполняется условие* G, *то H-мера $\nu^{\lambda\lambda}$ при п. в. $\lambda\in\mathbb{R}$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Зафиксируем точку $(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ из множества полной меры в Q, для которого согласно п. 3 леммы 4 при всех $\lambda \in \mathscr{E}'$ определена мера $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$. Предположим, что при некоторых $\lambda\in\mathscr{E}'$ носитель меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ непуст. Следуя условиям п. 4 леммы 4, для каждого $\lambda\in\mathscr{E}'$ (при котором носитель меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ непуст) введем в рассмотрение минимальное линейное подпространство

$L(\lambda) \subset \mathbb{R}^3$, содержащее носитель меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$, и выберем среди подпространств $L(\lambda)$ подпространство $L := L(\lambda_0)$ максимальной размерности. Используя утверждение п. 4 леммы 4, найдем число $\delta > 0$ такое, что $L(\lambda)$ совпадает с L при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \cap \mathscr{E}'$. Заметим, что $[\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \subset [0, 1]$, поскольку для всех значений $\lambda \notin [0, 1]$ H-мера $\nu^{\lambda\lambda}$ (а значит, и мера $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$) тождественно равна нулю по построению.

В силу принципа локализации (т. е. следствия 1) при каждом $\lambda \in \mathscr{E}'$ носитель меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ принадлежит множеству

$$\begin{aligned} E_0^\lambda(\boldsymbol{x}_*, t_*) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^2 : n_1(\boldsymbol{x}_*)y_1 + n_2(\boldsymbol{x}_*)y_2 = 0\} \\ &\cap \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{S}^2 : a'(\lambda)y_0 - \sum_{r=1}^{2}\left(m_r(\boldsymbol{x}_*, t_*) - \frac{1}{2}b'(\lambda)\partial_n n_r(\boldsymbol{x}_*)\right)y_r = 0\right\}, \end{aligned}$$

которое, очевидно, содержится в множестве

$$\begin{aligned} LE_0^\lambda(\boldsymbol{x}_*, t_*) &\stackrel{\text{def}}{=} \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 : n_1(\boldsymbol{x}_*)y_1 + n_2(\boldsymbol{x}_*)y_2 = 0\} \\ &\cap \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 : a'(\lambda)y_0 - \sum_{r=1}^{2}\left(m_r(\boldsymbol{x}_*, t_*) - \frac{1}{2}b'(\lambda)\partial_n n_r(\boldsymbol{x}_*)\right)y_r = 0\right\}. \end{aligned}$$

В свою очередь, при каждом $\lambda \in \mathscr{E}'$ множество $LE_0^\lambda(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ вместе с носителем меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ содержит также и его линейную оболочку $L(\lambda)$, поскольку уравнения, участвующие в определениях множеств $LE_0^\lambda(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ и $E_0^\lambda(\boldsymbol{x}_*, t_*)$, линейны по $\boldsymbol{y}$. Вследствие этого и проведенных выше построений, основанных на результате п. 4 леммы 4, выводим, что для любого $\boldsymbol{y} \in L$ справедливы равенства

$$n_1(\boldsymbol{x}_*)y_1 + n_2(\boldsymbol{x}_*)y_2 = 0 \tag{6.1}$$

и

$$a'(\lambda)y_0 - \sum_{r=1}^{2}\left(m_r(\boldsymbol{x}_*, t_*) - \frac{1}{2}b'(\lambda)\partial_n n_r(\boldsymbol{x}_*)\right)y_r = 0 \tag{6.2}$$

при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0+\delta] \cap \mathscr{E}'$. Более того, так как функции $a'(\lambda)$ и $b'(\lambda)$ непрерывны, $\mathscr{E}'$ плотно в $\mathscr{E}$, а $[\lambda_0, \lambda_0+\delta] \cap \mathscr{E}$ — это множество полной меры в $[\lambda_0, \lambda_0+\delta]$, то (6.2) справедливо для всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0+\delta]$. Отсюда вытекает, что если $n_1(\boldsymbol{x}_*) \neq 0$, то для любого $\boldsymbol{y} \in L$ при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} n_1(\boldsymbol{x}_*)a'(\lambda)y_0 &- [m_1(\boldsymbol{x}_*, t_*)n_2(\boldsymbol{x}_*) - m_2(\boldsymbol{x}_*, t_*)n_1(\boldsymbol{x}_*) \\ &- (1/2)b'(\lambda)(n_2(\boldsymbol{x}_*)\partial_n n_1(\boldsymbol{x}_*) - n_1(\boldsymbol{x}_*)\partial_n n_2(\boldsymbol{x}_*))]y_2 = 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

получаемое домножением равенства (6.2) на $n_1(\boldsymbol{x}_*)$ и последующим комбинированием с (6.1), а если $n_1(\boldsymbol{x}_*) = 0$, то $n_2(\boldsymbol{x}_*) \neq 0$, поскольку поле $\boldsymbol{n}$ невырожденно по условию, $y_2 = 0$ в силу (6.1) и для любого $\boldsymbol{y} \in L$ при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta]$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} n_2(\boldsymbol{x}_*)a'(\lambda)y_0 &- [m_1(\boldsymbol{x}_*, t_*)n_2(\boldsymbol{x}_*) - m_2(\boldsymbol{x}_*, t_*)n_1(\boldsymbol{x}_*) \\ &- (1/2)b'(\lambda)(n_2(\boldsymbol{x}_*)\partial_n n_1(\boldsymbol{x}_*) - n_1(\boldsymbol{x}_*)\partial_n n_2(\boldsymbol{x}_*))]y_1 = 0, \end{aligned} \tag{6.4}$$

в котором слагаемые с нулевым множителем $n_1(\boldsymbol{x}_*)$ добавлены (или сохранены) для наглядности в ближайших рассмотрениях.

Однако в силу условия G множители при величинах y_0 и y_2 в равенстве (6.3) являются функциями переменной λ, линейно независимыми на отрезке $[\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \subset [0, 1]$, следовательно, равенство (6.3) выполняется, только если $y_0 = y_2 = 0$, откуда в силу равенства (6.1) и соотношения $n_1(\boldsymbol{x}_*) \neq 0$ также следует, что $y_1 = 0$. Иными словами, в случае $n_1(\boldsymbol{x}_*) \neq 0$ ни один ненулевой вектор $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, y_2)$ не может принадлежать линейному подпространству L.

Точно такое же утверждение справедливо и в случае $n_1(\boldsymbol{x}_*) = 0$ на основании равенства (6.4) и условия G.

Замечая, что $\boldsymbol{y} = 0$ не принадлежит сфере $\mathbb{S}^2$, приходим к выводу, что при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \cap \mathscr{E}'$ носитель меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ пуст, т. е. $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*} = 0$ при всех $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \delta] \cap \mathscr{E}'$. Далее, по построению L — это линейное подпространство максимальной размерности, следовательно, $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*} = 0$ при всех $\lambda \in \mathscr{E}'$. Можно заметить, что первоначальное предположение о нетривиальности меры $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x_*,t_*}$ при каких-либо $\lambda \in \mathscr{E}'$ оказалось некорректным.

В силу произвольности выбора точки $(\boldsymbol{x}_*, t_*)$ из множества полной меры в Q и 1-периодичности отображения $\boldsymbol{x} \mapsto \Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t}$ приходим к выводу, что $\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t} = 0$ при всех $\lambda \in \mathscr{E}'$ и при п. в. $(\boldsymbol{x}, t) \in \Pi$. Вследствие этого и представления $d\nu^{\lambda\lambda} = d\Lambda^{\lambda\lambda}_{x,t} d\boldsymbol{x} dt$ из п. 3 леммы 4 устанавливаем, что при всех $\lambda \in \mathscr{E}'$ H-мера $\nu^{\lambda\lambda}$ — это нулевая мера. Наконец, с учетом свойства непрерывности отображения $\lambda \mapsto \nu^{\lambda\lambda}$ на $\mathscr{E}$ (см. п. 2 леммы 4) и плотности $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$ заключаем, что $\nu^{\lambda\lambda} = 0$ для всех $\lambda \in \mathscr{E}$, а значит (по лемме 3), и при п. в. $\lambda \in \mathbb{R}$. Тем самым завершаем доказательство леммы 5. $\square$

В силу леммы 5 и п. 5 леммы 4 при $k \nearrow \infty$ справедливо предельное соотношение: $f^k(\cdot, \cdot, \lambda) \to f(\cdot, \cdot, \lambda)$ сильно в $L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi)$ при п. в. $\lambda \in \mathbb{R}$ и п. в. в $\Pi \times \mathbb{R}_\lambda$. Поскольку f^k принимает только два значения: 0 и 1, и f является монотонно неубывающей и непрерывной справа по λ функцией при п. в. $(\boldsymbol{x}, t)$, из этого предельного соотношения вытекает, что f имеет вид

$$f(\boldsymbol{x}, t, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \lambda \geq \tilde{u}(\boldsymbol{x}, t), \\ 0 & \text{при } \lambda < \tilde{u}(\boldsymbol{x}, t) \end{cases}$$

с некоторой функцией $\tilde{u} \in L^\infty(\Pi)$, $0 \leq \tilde{u} \leq 1$. Из представления (4.8), справедливого для f^k и f, и предельного соотношения (4.9) следует, что $\tilde{u}$ совпадает со слабым пределом $u = w\text{-}\lim\limits_{k \nearrow +\infty} u_{\varepsilon_k}$ и что $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L^2(\mathscr{K})} \underset{k \nearrow +\infty}{\longrightarrow} \|u\|_{L^2(\mathscr{K})}$, где $\mathscr{K}$ — произвольное ограниченное множество в Π с достаточно регулярной границей. Таким образом,

$$u_{\varepsilon_k} \underset{k \nearrow +\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в } L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi). \tag{6.5}$$

Отсюда и из предельного соотношения (4.10) в силу представления (3.7) и закона Дарси (3.3) также вытекает, что

$$\boldsymbol{v}_{\varepsilon_k} \to \boldsymbol{v}, \quad \nabla_x p_{*\varepsilon_k} \to \nabla_x p_* \quad \text{сильно в } L^2_{\mathrm{loc}}(\Pi) \text{ при } k \nearrow \infty. \tag{6.6}$$

Теперь на основании сильных предельных соотношений (6.5), (6.6), слабых предельных соотношений (3.5) и (3.6) и оценок (3.4) переходим к пределу в приближенной системе (3.1)–(3.3) при $\varepsilon_k \searrow 0$, предварительно умножив равенство (3.2) на $\varphi'(u_{\varepsilon_k})$, где φ — произвольная гладкая выпуклая функция, и перегруппировав надлежащим образом в нем слагаемые. В результате этого предельного перехода на основании стандартных рассуждений (см., например, [9, § 9] или [13]) заключаем, что предельные функции u и p_* являются энтропийным решением задачи A. Тем самым завершаем доказательство теоремы 1.

Для обоснования теоремы 2 в предыдущих рассмотрениях кинетическое уравнение (4.6), ассоциированное с приближенной задачей (3.1)–(3.3), (1.5d), (1.5e), следует заменить кинетическим уравнением вида (4.14), ассоциированным с задачей A, снабженной начальными данными $u^k_0 \in L^\infty$, удовлетворяющими соотношению (2.5). В остальном доказательство теоремы 2 является несущественной модификацией доказательства теоремы 1. $\square$

Автор выражает глубокую благодарность чл.-кор. РАН профессору П. И. Плотникову за ряд полезных обсуждений и критических замечаний. Значительная часть статьи написана во время визита в Центр современной математики и физики Национального университета науки и технологии, г. Равалпинди, Пакистан. Автор выражает признательность своим коллегам — участникам еженедельного математического семинара Центра — и академику АН Пакистана профессору Асгару Кадиру (Prof. Asghar Qadir) за гостеприимство и внимание, проявленное к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники // Изв. АН СССР. ОТН. 1953. Вып. 10. С. 1369–1382.
2. *Веригин Н. Н.* О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде // 2-й Всесоюзный съезд по теорет. и прикл. мех.: аннот. докл. М.: Наука, 1964. С. 50.
3. *Развитие исследований* по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной, С. Н. Нумерова, И. А. Чарного, В. М Ентова. М.: Наука, 1969.
4. *Рачинский В. В., Гапон Т. Б.* Хроматография в биологии. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
5. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983.
6. *Antontsev S. N., Diaz J. I., Shmarev S. I.* Energy methods for free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics. Boston: Birkhäuser, 2002.
7. *Bear J.* Dynamics of fluids in porous media. New York: Dover Publ., 1988.
8. *Lax P. D.* Hyperbolic system of conservation laws. II // Comm. Pure Appl. Math. 1957. V. 10. P. 537–566.
9. *Саженков С. А.* Истинно нелинейное ультрапараболическое уравнение Гратца — Нуссельта // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 431–454.
10. *Perthame B.* Kinetic formulations of conservation laws. Oxford: Oxford Univ. Press, 2002.
11. *Plotnikov P. I.* Ultraparabolic Muskat equations. Covilhã, Portugal. 2000. (Preprint/ Center of Mathematics, University of Beira Interior; N 6).
12. *Plotnikov P. I., Sazhenkov S. A.* Kinetic formulation for the Graetz–Nusselt ultra-parabolic equation // J. Math. Anal. Appl. 2005. V. 304. P. 703–724.
13. *Chen G.-Q., Perthame B.* Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 2003. V. 20. P. 645–668.
14. *Malek J., Nečas J., Rokyta M., Ružička M.* Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs. London: Chapman and Hall, 1996.
15. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1965.
16. *Tartar L.* H-measures, a new approach for studying homogenisation oscillations and concentration effects in partial differential equations // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. Math. 1990. V. 115. P. 193–230.
17. *Gerárd P.* Microlocal defect measures // Comm. Partial Differential Equations. 1991. V. 16, N 11. P. 1761–1794.
18. *Панов Е. Ю.* О последовательностях мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 1. С. 87–106.
19. *Панов Е. Ю.* Об условии сильной предкомпактности ограниченных множеств мерозначных решений квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 3. С. 109–128.

Статья поступила 2 октября 2006 г., окончательный вариант — 25 апреля 2007 г.

Саженков Сергей Александрович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
sazhenkovs@yahoo.com