Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.518.23+512.81

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И ОБОБЩЕННОЕ НЕРАВЕНСТВО ПУАНКАРЕ НА ГРУППАХ КАРНО

Е. А. Плотникова

Аннотация. На двухступенчатых группах Карно получены интегральные представления вида $f(x) = P(f) + K(\nabla f)$, где $P(f)$ — некоторый полином, а K — интегральный оператор с контролируемой особенностью. В качестве следствия получены слабое неравенство Пуанкаре и коэрцитивные оценки. На общих группах Карно доказано обобщенное неравенство Пуанкаре.

Ключевые слова: группа Карно, интегральное представление, неравенство Пуанкаре.

1. Введение

В работах 1936–1938 гг. С. Л. Соболев заложил основы теории функций с обобщенными производными. Разные аспекты этой теории отражены в монографии С. Л. Соболева [1] (см. также [2]). Дальнейшее развитие этого направления было мотивировано многочисленными применениями классов Соболева к теории уравнений с частными производными и другим областям (см., например, [3–6] и др.).

В работах последних лет интенсивно изучаются функции классов Соболева на неголономных многообразиях и более общих метрических структурах. В этой связи отметим работы [7–15], где можно найти обширную библиографию.

Актуальность теории пространств Соболева на группах Карно обусловлена многочисленными приложениями к исследованию свойств решений субэллиптических дифференциальных уравнений, квазиконформному анализу и многим смежным вопросам. В работе [16] получены интегральные представления функций на группах Гейзенберга, которые естественно обобщают подходы С. Л. Соболева и Ю. Г. Решетняка [17, 18], изначально реализованные в евклидовом пространстве.

Настоящая работа посвящена исследованию функциональных пространств Соболева, заданных на областях двухступенчатых групп Карно. Выводятся интегральные представления функций типа Соболева и с их помощью доказываются слабое неравенство Пуанкаре и коэрцитивные оценки. Кроме того, на общих группах Карно доказывается обобщенное неравенство Пуанкаре при условии, что выполняется слабое неравенство.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 8526.2006.1), NEST of 6th Framework Programme of the European Union “SubRiemannian geometric analysis in Lie groups” (N 028766).

Группы Карно $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ — это модель пространства Карно — Каратеодори глубины 2. Пространства Карно — Каратеодори суть гладкие многообразия с выделенным касательным подрасслоением, удовлетворяющим некоторым алгебраическим условиям. Векторные поля упомянутого подрасслоения называют *горизонтальными*.

Классы Соболева функций, заданных в областях пространств Карно — Каратеодори, определяются через производные вдоль векторных полей из выделенного подрасслоения. Развитие теории таких функциональных пространств стимулировалось изучением свойств регулярности субэллиптических дифференциальных уравнений (см., например, [7, 8, 19–22]).

В некоторых работах (см. [8, 10, 11, 23]) *интегральными представлениями* функций, определенных в пространствах Карно — Каратеодори, называют неравенства вида

$$|f(x) - C_1| \leq C_2 \int\limits_{B(z,C_3r)} \frac{|\nabla_L f|(y)}{\rho(x,y)^{\nu-1}}\,dy, \tag{1}$$

где $x \in B(z,r)$, а C_2 и C_3 не зависят от x, r и f, $\nabla_L f$ — вектор-функция, компоненты которой — всевозможные горизонтальные производные первого порядка компонент вектор-функции f, $\rho(x,y)$ — метрика Карно — Каратеодори, ν — размерность Хаусдорфа относительно этой метрики.

Интегральные представления вида (1) могут быть использованы при доказательстве неравенств Пуанкаре и Соболева, однако доказательства многих результатов теории пространств Соболева требуют более точных соотношений. Примером таких результатов могут служить коэрцитивные оценки для дифференциальных операторов, выражающихся в виде линейных комбинаций производных некоторого фиксированного порядка вдоль векторных полей из стандартного базиса горизонтального подрасслоения.

Для вывода этих оценок необходимы интегральные представления типа Соболева, которые принято записывать в виде

$$f(x) = P(f) + K(\nabla f),$$

где $P(f)$ — некоторый полином, а K — интегральный оператор с контролируемой особенностью.

В работе использованы как классические подходы к теории пространств функций с обобщенными производными, разработанные С. Л. Соболевым, О. В. Бесовым, В. И. Буренковым, В. Г. Мазьей, Ю. Г. Решетняком, так и некоторые их модификации в неголономной геометрии (см., например, [16, 24]).

2. Основные определения, используемые в работе

В первую очередь введем понятие группы.

Определение 1. *Двухступенчатой группой Карно* ($\mathbb{G}^{n_1+n_2}$) называется связная односвязная нильпотентная группа Ли, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. $V = V_1 \oplus V_2$, где $[V_1, V_1] = V_2$, $[V_1, V_2] = 0$, $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$.

Левоинвариантные векторные поля X_i, $i = 1, \dots, n_1$ (называемые *горизонтальными*), составляют стандартный базис горизонтального подрасслоения V_1. Вместе с векторными полями X_i, $i = n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2$, которые являются коммутаторами первого порядка горизонтальных векторных полей, они образуют стандартный базис алгебры Ли, соответствующей группе $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$.

Посредством экспоненциального отображения

$$\exp(x_1X_1+\dots+x_{n_1}X_{n_1}+x_{n_1+1}X_{n_1+1}+\dots+x_{n_1+n_2}X_{n_1+n_2})=q$$

элементы $q\in\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ отождествляются с точками

$$\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2),\quad \text{где } \mathbf{x}_i\in V_i.$$

В этих координатах, используя формулу Кемпбелла — Хаусдорфа (см., например, [25]), можно получить представление векторных полей

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\sum_{p=1}^{n_1}b_{ip}^{j}\;x_p\frac{\partial}{\partial x_j},\quad i=1,\dots,n_1;$$

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad i=n_1+1,\dots,n_1+n_2,$$

а также формулу для группового умножения

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2)=\Bigg(\mathbf{x}_1+\mathbf{y}_1,x_{n_1+1}+y_{n_1+1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,p=1}^{n_1}b_{ip}^{n_1+1}\;x_iy_p,\dots,x_{n_1+n_2}+y_{n_1+n_2}+\frac{1}{2}\sum_{i,p=1}^{n_1}b_{ip}^{n_1+n_2}\;x_iy_p\Bigg),$$

где $b_{ip}^j=-b_{pi}^j$, $i,p=1,\dots,n_1$, $j=n_1+1,\dots,n_1+n_2$.

Определим $|(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)|=(\|\mathbf{x}_1\|^4+\|\mathbf{x}_2\|^2)^{1/4}$, где $\|\mathbf{x}_i\|$ — евклидова норма в $V_i, i=1,2$. Тогда метрику можно задать так: $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|$. Для нее имеет место обобщенное неравенство треугольника $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\leq\gamma(\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z},\mathbf{y}))$, где γ — некоторая фиксированная константа на группе.

Обозначим через ν размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ относительно заданной метрики. В нашем случае $\nu=n_1+2n_2$.

В работе часто будут использоваться следующие отображения.

Определение 2. Семейство отображений $\delta_t:(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)\mapsto(t\mathbf{x}_1,t^2\mathbf{x}_2)$, где $t>0$, называют *однопараметрическим семейством растяжений.*

Кроме того, определим левый сдвиг $l_{\mathbf{a}}:\mathbf{y}\mapsto\mathbf{a}\cdot\mathbf{y}$, где $\mathbf{a}\in\mathbb{G}^{n_1+n_2}$. Нетрудно видеть, что он является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ на $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, причем $\det(Dl_{\mathbf{a}})\equiv 1$.

Произвольному (n_1+n_2)-мерному мультииндексу λ сопоставим число $|\lambda|_h=\lambda_1+\dots+\lambda_{n_1}+2\lambda_{n_1+1}+\dots+2\lambda_{n_1+n_2}$.

Обозначим через X^λ дифференциальный оператор $X_1^{\lambda_1}\dots X_{n_1+n_2}^{\lambda_{n_1+n_2}}$. В пространстве $C^\infty(U)$ рассмотрим норму $\|f\|_{W_p^k(U)}=\|f\|_{L_p(U)}+\sum\limits_{|\lambda|_h=k}\|X^\lambda f\|_{L_p(U)}$. Пространство $W_p^k(U)$ определяется как пополнение множества $\{f\in C^\infty(U)\mid \|f\|_{W_p^k(U)}<\infty\}$ по норме $\|f\|_{W_p^k(U)}$.

Далее через $B(\mathbf{x},r)=\{\mathbf{y}:\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})<r\}$ обозначаем шар во введенной выше метрике с центром в точке $\mathbf{x}$ радиуса r.

Введем два типа областей, для которых будут доказаны основные результаты.

Определение 3. Открытое множество $W\subset\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ *звездно в области* $U\subset\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ относительно некоторого шара $B\Subset U$, если для любых точек $\mathbf{x}\in W$, $\mathbf{y}\in B$ точка $\mathbf{x}\cdot\delta_t(\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y})$ принадлежит области U для всякого $t\in(0,1]$.

Определение 4. Область U называется *областью Джона* ($U \in J(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$), если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что для любой точки $p \in U$ существует спрямляемая кривая $\psi(s)$, $0 \leq s \leq l \leq \beta$, для которой $\psi(0) = p$, $\psi(l) = p_0$ и $\operatorname{dist}[\psi(s), \partial U] \geq \frac{\alpha s}{l}$ для любого $s \in [0, l]$.

Приведем простое свойство областей на группах Карно, которое будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. *Шар $B(a, R)$ является звездным в шаре $B(a, \gamma_1 R)$ относительно шара $B(a, R)$, где $\gamma_1 = (2\gamma + 1)\gamma$.*

Определение 5. *Горизонтальными полиномами* степени не выше l будем называть функции, у которых все горизонтальные производные (т. е. производные вдоль горизонтальных векторных полей X_i, $i = 1, \dots, n_1$) порядка $l + 1$ тождественно равны нулю.

Замечание 1. На группах $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$ любой горизонтальный полином является обычным полиномом, и если его степень не выше l, то он имеет следующий вид:

$$P(x) = \sum_{|\lambda|_h \leq l} a_\lambda x^\lambda.$$

Сформулированное свойство следует, например, из результатов работы [26].

3. Интегральные представления функций, заданных в ограниченных областях $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$, через первые горизонтальные производные

В работе автора [27] выведены интегральные представления через производные первого порядка на общих группах Карно и интегральные представления через первые горизонтальные производные на двухступенчатых группах Карно. Сформулируем необходимые нам результаты.

Рассмотрим ограниченную область $U \subset \mathbb{G}^{n_1+n_2}$, $U \subset B(0, R)$. Далее символом U' всегда будет обозначаться область в $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$, звездная в области U относительно шара $B(\mathbf{a}, r)$. Пусть функция $\varphi_0 \in C_0^\infty(B(0,1))$ удовлетворяет соотношению $\int\limits_{B(0,1)} \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 1$ и $\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^\nu} \varphi_0(\delta_{r^{-1}}(\mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{x}))$.

Теорема 1. *Если $f \in C^\infty(U)$, то в области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$f(\mathbf{x}) = \int\limits_U f(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_U \Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \varphi) \Bigg(\sum_{i=1}^{n_1} (x^{-1} \cdot y)_i X_i f(\mathbf{y}) + 2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (x^{-1} \cdot y)_j X_j f(\mathbf{y}) \Bigg) d\mathbf{y}, \quad (2)$$

где $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \varphi) = -\int\limits_1^\infty \varphi(\mathbf{x} \cdot \delta_t(\mathbf{x}^{-1} \cdot \mathbf{y})) t^{\nu+1}\, dt$.

В этой теореме получены интегральные представления через первые горизонтальные и вертикальные производные. Приведем свойства полученного в теореме 1 ядра, которые будут использоваться в данной работе.

Лемма 2. *Функция $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi)$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\{\mathbf{x}=\mathbf{y}\})$, для фиксированного $\mathbf{x}\in U'$ финитна по второму аргументу, причем ее носитель содержится в U, и удовлетворяет оценкам*

$$|\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi)|\le C_1|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-\nu},\quad \left|X^\lambda_{\mathbf{x}}X^\mu_{\mathbf{y}}\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi)\right|\le C_2|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu+|\lambda|_h+|\mu|_h)},\tag{3}$$

$$\begin{gathered}\left|X^\lambda_{\mathbf{x}}X^\mu_{\mathbf{y}}((x^{-1}\cdot y)_j\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi))\right|\le C_3|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu-2+|\lambda|_h+|\mu|_h)},\\ \left|X^\lambda_{\mathbf{x}}X^\mu_{\mathbf{y}}((x^{-1}\cdot y)_i(x^{-1}\cdot y)_p\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi))\right|\le C_4|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu-2+|\lambda|_h+|\mu|_h)},\end{gathered}\tag{4}$$

где $n_1+1\le j\le n_1+n_2$, $1\le i\le n_1$, $1\le p\le n_1, \mathbf{x}\in U'$, $\mathbf{y}\in B(\mathbf{a},r)$.

Замечание 2. В этой лемме и других теоремах из разд. 3, 4 нетрудно доказать, что константы зависят от величин λ, μ, φ_0, R, $\frac{\operatorname{diam}U}{r}$ и возрастают при увеличении R и $\frac{\operatorname{diam}U}{r}$ ($\operatorname{diam}U$ обозначает диаметр области U в смысле метрики ρ).

Основным результатом работы [27] является следующая

Теорема 2. *Если $f\in C^\infty(U)$, то в области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_U f(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+\int\limits_U\sum_{i=1}^{n_1}K_i(\mathbf{x},\mathbf{y})X_if(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\in U'.\tag{5}$$

Кроме того, ядро K_i принадлежит $C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\{\mathbf{x}=\mathbf{y}\})$, функции K_i финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству

$$\left|X^\lambda_{\mathbf{x}}X^\mu_{\mathbf{y}}K_i(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|\le C|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu-1+|\lambda|_h+|\mu|_h)}.$$

Следующая лемма устанавливает интересное свойство ядер K_i, которое существенно будет использоваться нами в дальнейшем.

Лемма 3. *Ядра $K_i(\mathbf{x},\mathbf{z})$ в интегральном представлении (5) можно представить в виде суммы двух ядер $K'_i(\mathbf{x},\mathbf{z})+K''_i(\mathbf{x},\mathbf{z})$, где $K'_i(\mathbf{x},\mathbf{z})\in C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times\mathbb{G}^{n_1+n_2})$, а $K''_i(\mathbf{x},\mathbf{z})\in C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\{0\}))$ однородно степени $-\nu+1$ относительно $\mathbf{z}$, т. е. $K''_i(\mathbf{x},\delta_t(\mathbf{z}))=t^{-\nu+1}K''_i(\mathbf{x},\mathbf{z})$ для любого $t>0$.*

4. Интегральные представления функций, заданных в ограниченных областях $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$, через горизонтальные производные произвольного порядка

Теорема 3. *Пусть функция f принадлежит классу $C^\infty(U)$, k — любое натуральное число. Тогда в области U' справедливо следующее интегральное представление:*

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_U P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+\int\limits_U\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)X_{i_1}\dots X_{i_k}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\tag{6}$$

где $\mathbf{x}\in U'$; $P_k(\cdot,\mathbf{y};\varphi_0)$ — горизонтальный полином порядка $k-1$, $\operatorname{supp}P_k(\mathbf{x},\cdot;\varphi_0)\subset B$, $|P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)|\le C_k(r,R,\varphi_0)$; $K_{i_1\dots i_k}\in C^\infty(\mathbb{R}^{n_1+n_2}\times\mathbb{R}^{n_1+n_2}\setminus\{\mathbf{x}=\mathbf{y}\})$, функции $K_{i_1\dots i_k}$ финитны по второму аргументу и удовлетворяют неравенству

$$\left|X^\lambda_{\mathbf{x}}X^\mu_{\mathbf{y}}K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|\le C|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu-k+|\lambda|_h+|\mu|_h)}.\tag{7}$$

Доказательство. Для i, $j \in \mathbb{N}$ рассмотрим дифференциальные операторы

$$\begin{aligned} A_j : h(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{n_1} (y^{-1}\cdot x)_{i_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{i_j} X_{i_1,\mathbf{y}}\dots X_{i_j,\mathbf{y}} h(\mathbf{x},\mathbf{y}), \\ B_i : h(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\mapsto \sum_{j_1,\dots,j_i=n_1+1}^{n_1+n_2} (y^{-1}\cdot x)_{j_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{j_i} X_{j_1,\mathbf{y}}\dots X_{j_i,\mathbf{y}} h(\mathbf{x},\mathbf{y}). \end{aligned} \tag{8}$$

Учитывая равенства

$$A_1((y^{-1}\cdot x)_{i_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{i_j}) = -j(y^{-1}\cdot x)_{i_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{i_j},$$

$$B_1((y^{-1}\cdot x)_{j_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{j_i}) = -i(y^{-1}\cdot x)_{j_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{j_i},$$

где $i_1,\dots,i_j \in \{1,\dots,n_1\}$, $j_1,\dots,j_i \in \{n_1+1,\dots,n_1+n_2\}$, нетрудно видеть, что выполняются рекуррентные соотношения $A_1A_j = A_{j+1} - jA_j$, $B_1B_i = B_{i+1} - iB_i$. Заметим также, что эти операторы перестановочны, т. е. $A_jB_i = B_iA_j$. Действительно,

$$(A_jB_i - B_iA_j)h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{n_1} (y^{-1}\cdot x)_{i_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{i_j}$$

$$\times \sum_{j_1,\dots,j_i=n_1+1}^{n_1+n_2} X_{i_1,\mathbf{y}}\dots X_{i_j,\mathbf{y}}((y^{-1}\cdot x)_{j_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{j_i}) X_{j_1,\mathbf{y}}\dots X_{j_i,\mathbf{y}} h(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Принимая во внимание коммутационные соотношения и выражения для полей в координатах, для $i \in \{1,\dots,n_1\}$ и $j \in \{n_1+1,\dots,n_1+n_2\}$ получаем

$$X_{i,\mathbf{y}}(x^{-1}\cdot y)_j = X_{i,\mathbf{y}}\left(y_j - x_j - \frac{1}{2}\sum_{k,p=1}^{n_1} b^j_{kp}\, x_k y_p\right) = \sum_{p=1}^{n_1} b^j_{ip}\,(y_p - x_p). \tag{9}$$

Далее, учитывая равенства (9), легко видеть, что слагаемые $(x_{i_1} - y_{i_1})(x_{i_2} - y_{i_2})\dots(x_{i_j} - y_{i_j})X_{i_1,\mathbf{y}}X_{i_2,\mathbf{y}}\dots X_{i_j,\mathbf{y}}((y^{-1}\cdot x)_{j_1}\dots(y^{-1}\cdot x)_{j_i})$ сократятся.

Перейдем теперь непосредственно к выводу интегрального представления. Пусть задана функция f класса $C^\infty(U)$. Определим по ней функцию двух переменных

$$g_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{2i+j\le k} \frac{1}{i!j!} B_iA_j f(\mathbf{y}).$$

Очевидно, что $g_k(\mathbf{x},\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. Воспользуемся для g_k как функции переменной y интегральным представлением (2) в точке $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Получаем

$$f(\mathbf{x}) = g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = \int\limits_U g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \int\limits_U \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi)(A_1 + 2B_1)g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Используя перестановочность и рекуррентные соотношения, имеем

$$\begin{aligned} A_1 g_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{2i+j\le k} \frac{1}{i!j!} B_iA_1A_j f(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i!} B_i \sum_{j=0}^{k-2i} \frac{1}{j!} A_1A_j f(\mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i!} B_i \sum_{j=0}^{k-2i} \frac{1}{j!}(A_{j+1} - jA_j) f(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{1}{i!} B_i \frac{A_{k-2i+1}}{(k-2i)!} f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Аналогично

$$B_1 g_k(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{2i+j\le k} \frac{1}{i!j!} A_j B_1 B_i f(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A_j \sum_{i=0}^{[(k-j)/2]} \frac{1}{i!} B_1 B_i f(\mathbf{y})$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} A_j \sum_{i=0}^{[(k-j)/2]} \frac{1}{i!} (B_{i+1} - iB_i) f(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_j}{j!} \frac{B_{[(k-j)/2]+1}}{([(k-j)/2])!} f(\mathbf{y}).$$

Окончательно получаем

$$f(\mathbf{x}) = \int_U g_k(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$$
$$- \int_U \left(\sum_{i=0}^{[k/2]} \frac{B_i}{i!} \frac{A_{k-2i+1}}{(k-2i)!} f(\mathbf{y}) + \sum_{i=0}^{k} \frac{A_j}{j!} \frac{B_{[(k-j)/2]+1}}{([(k-j)/2])!} f(\mathbf{y}) \right) \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})\,d\mathbf{y}. \quad (10)$$

С помощью формулы интегрирования по частям преобразуем первое слагаемое в представлении (10) к виду $\int_U P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0) f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}$. Нетрудно видеть, что функция $P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)$ удовлетворяет перечисленным в формулировке теоремы условиям.

Далее, имеет место следующее неравенство, обобщающее (4):

$$X^\lambda_{\mathbf{x}} X^\mu_{\mathbf{y}} ((\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y})^\gamma \Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})) \le C\big(\lambda,\mu,\gamma\big) |\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{-(\nu+|\lambda|_h+|\mu|_h-|\gamma|_h)}, \quad (11)$$

где $\lambda,\mu,\gamma \in \mathbb{N}^{n_1+n_2}$, для $\mathbf{z} \in \mathbb{G}^{n_1+n_2}$ символ $\mathbf{z}^\gamma$ обозначает $z_1^{\gamma_1} z_2^{\gamma_2} \dots z_{n_1+n_2}^{\gamma_{n_1+n_2}}$. Действительно, из определения однородной нормы вытекает, что

$$\begin{gathered} |(x^{-1}\cdot y)_i| \le |\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|, \quad i = 1,\dots,n_1, \\ |(x^{-1}\cdot y)_j| \le |\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^2, \quad j = n_1+1,\dots,n_1+n_2. \end{gathered} \quad (12)$$

Принимая во внимание формулу группового умножения и выражения для полей в координатах, для $i \in \{1,\dots,n_1\}$ и $j \in \{n_1+1,\dots,n_1+n_2\}$ получаем

$$X_{i,\mathbf{y}}(x^{-1}\cdot y)_j = X_{i,\mathbf{y}} \left(y_j - x_j - \frac{1}{2} \sum_{k,p=1}^{n_1} b^j_{kp}\; x_k y_p \right) = \sum_{p=1}^{n_1} b^j_{ip}\; (y_p - x_p).$$

Таким образом,

$$|X_{i,\mathbf{y}}(x^{-1}\cdot y)_j| \le \mathrm{const}\, |\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|. \quad (13)$$

Следовательно, с учетом неравенств (12), (13) из неравенства (3) индукцией по γ вытекает оценка (11).

Легко видеть, что выражения $B_i A_{k-2i+1} f(\mathbf{y})$ и $A_j B_{[(k-j)/2]}$ (для нечетного $k-j$) являются комбинациями горизонтальных производных функции $f(\mathbf{y})$ порядка $k+1$. Для четного $k-j$ выражение $A_j B_{[(k-j)/2]+1}$ есть комбинация горизонтальных производных порядка $k+2$ функции $f(\mathbf{y})$.

Окончательно, принимая во внимание финитность ядра $K(\mathbf{x},\mathbf{y})$ относительно переменной $\mathbf{y}$ и применяя формулу интегрирования по частям для части слагаемых (содержащих $A_j B_{[(k-j)/2]+1}$, $(k-j)$ четно) в интегральном представлении (10), получаем интегральное представление функции f через горизонтальные производные порядка $k+1$. Используя неравенства (11), нетрудно получить оценки (7) на ядро в выведенном интегральном представлении. $\square$

5. О проблеме Михлина

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{G}^{n_1+n_2}$. Определим интегральный оператор

$$T_\varepsilon f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus B(\mathbf{x},\varepsilon)} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y})\bar{f}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}\in\Omega, \tag{14}$$

где $\bar{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x}\in\Omega$ и $\bar{f}(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x}\in\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\Omega$.

Пусть ядро $K(\mathbf{x},\mathbf{z})$ принадлежит $C^\infty(\overline{\Omega}\times(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\{0\}))$ и положительно однородно степени $-\nu$ относительно $\mathbf{z}$, т. е. $K(\mathbf{x},\delta_t(\mathbf{z})) = t^{-\nu}K(\mathbf{x},\mathbf{z})$ для любого $t>0$. Предположим, кроме того, что $K(\mathbf{x},\mathbf{z})$ удовлетворяет условию сокращения:

$$\int\limits_{S(0,1)} K(\mathbf{x},\mathbf{z})\,d\sigma(\mathbf{z}) = 0. \tag{15}$$

В работе [28] доказана следующая теорема, обобщающая теорему Михлина, доказанную в евклидовом случае [29].

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит $L_p(\Omega)$, $1<p<\infty$. Тогда T_ε сходится в $L_p(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$ к T и выполняется неравенство $\|Tf\|_{L_p(\Omega)}\le A_p\|f\|_{L_p(\Omega)}$, где постоянная A_p не зависит от f.*

Приведенная теорема позволяет дифференцировать выведенные интегральные представления вдоль горизонтальных векторных полей. Покажем, что полученные нами ядра удовлетворяют условиям теоремы. Сформулируем вспомогательную лемму.

Лемма 4. *Пусть функция K класса $C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\{0\})$ положительно однородна степени $-\nu+l$ $(l\in\mathbb{N})$. Тогда для любого мультииндекса λ такого, что $|\lambda|_h = l$, функция $X^\lambda K$ положительно однородна степени $-\nu$ и удовлетворяет соотношению $\int\limits_{S(0,1)} X^\lambda K(\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = 0$, где $S(0,1)$ — сфера с центром в 0 радиуса 1 в метрике ρ.*

При доказательстве этой леммы устанавливается, что должна выполняться оценка

$$\sup_\varepsilon\Bigg|\int\limits_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} [X_iK](\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Bigg| < \infty.$$

Однако в силу однородности степени $-\nu$ функции X_iK получаем

$$\sup_\varepsilon\Bigg|\int\limits_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} [X_iK](\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Bigg| = \sup_\varepsilon\Bigg|\int\limits_\varepsilon^1 r^{\nu-1}\,dr\int\limits_{S(0,1)}[X_iK](\mathbf{z})\,d\mathbf{z}\Bigg| < \infty.$$

Следовательно, $\int\limits_{S(0,1)}[X_iK](\mathbf{z})\,d\mathbf{z} = 0$. Более подробно см. в [5, 16].

Лемма 5. *Ядра $K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ в интегральном представлении (6) можно представить в виде суммы $K'_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z}) + K''_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z})$, где ядро $K'_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times\mathbb{G}^{n_1+n_2})$, ядро $K''_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\{0\}))$ и однородно степени $-\nu+l$ относительно $\mathbf{z}$.*

Доказательство. Имеем

$$\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi)=\int\limits_0^1\varphi(\mathbf{x}\cdot\delta_t(\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}))t^{\nu-1}\,dt-\int\limits_0^\infty\varphi(\mathbf{x}\cdot\delta_t(\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}))t^{\nu-1}\,dt$$
$$=\Gamma'(\mathbf{x},\mathbf{y}^{-1}\cdot\mathbf{x})+\Gamma''(\mathbf{x},\mathbf{y}^{-1}\cdot\mathbf{x}).$$

Нетрудно видеть, что $\Gamma'(\mathbf{x},\mathbf{z})\in C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times\mathbb{G}^{n_1+n_2})$, ядро $\Gamma''(\mathbf{x},\mathbf{z})$ принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\times(\mathbb{G}^{n_1+n_2}\setminus\{0\}))$ и однородно степени $-\nu$ относительно $\mathbf{z}$. Остается воспользоваться выражением ядра $K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{z})$ через ядро $\Gamma(\mathbf{x},\mathbf{z})$ и тем, что произведение однородных функций есть однородная функция и при дифференцировании вдоль векторного поля X_i, $i=1,\dots,n_1$, степень однородности понижается на единицу. $\square$

Таким образом, продифференцировав интегральное представление (6) не более k раз, получаем новые ядра, которые в силу леммы 4 удовлетворяют условию (15). Следовательно, теорема 4 позволяет найти горизонтальную производную интегрального представления (6) до k-го порядка включительно.

6. Слабое неравенство Пуанкаре

По лемме 1 шар $B(\mathbf{a},r)=B$ звезден в шаре $B(\mathbf{a},\gamma_1r)=\gamma_1B$ относительно самого себя, поэтому, применяя к этим шарам теорему 3, получим, что для любой точки $x\in B(\mathbf{a},r)$ справедливо интегральное представление

$$f(\mathbf{x})=P^k_{\gamma_1B}f(\mathbf{x})+\int\limits_{\gamma_1B}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)X_{i_1}\dots X_{i_k}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\tag{16}$$

где $\int\limits_{\gamma_1B}P_k(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=P^k_{\gamma_1B}f(\mathbf{x})$ — горизонтальный полином порядка $k-1$.

Теорема 5. *Пусть $1<p\le\infty$. Тогда для всякого $k\in\mathbb{N}$ найдется проекционный оператор P^k, переводящий функции класса $W^k_p(U)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливо неравенство*

$$\|X^\lambda(f-P_kf)\|_{L_p(B)}\le Cr^{k-|\lambda|_h}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}X_{i_1,1}\dots X_{i_k,1}f\right\|_{L_p(\gamma_1B)},\tag{17}$$

где λ — мультииндекс, $|\lambda|_h\le k$, константа C зависит от r,ν,p и выполнено соотношение $k-|\lambda|_h>\nu/p$.

Неравенство (17) обычно называют *слабым неравенством Пуанкаре.*

Доказательство. Пусть $|\lambda|_h\le k$. Продифференцируем интегральное представление (16), тогда из результатов разд. 5 следует, что

$$X^\lambda\big[f(\mathbf{x})-P^k_{\gamma_1B}f(\mathbf{x})\big]=\int\limits_{\gamma_1B}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}X^\lambda_{\mathbf{x}}K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0)X_{i_1}\dots X_{i_k}f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Возводя в степень p, а затем интегрируя по шару $B(\mathbf{a},r)$ и применяя оценку

(7), получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{\lambda}\left[f(\mathbf{x})-P_{\gamma_1 B}^{k} f(\mathbf{x})\right]\right\|_{L_p(B)}^{p} \\
&\quad=\int\limits_{B}\left|\int\limits_{\gamma_1 B}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{\mathbf{x}}^{\lambda} K_{i_1\dots i_k}(\mathbf{x},\mathbf{y};\varphi_0) X_{i_1}\dots X_{i_k} f(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\right|^{p} dx \\
&\qquad\le\int\limits_{B}\left[\int\limits_{\gamma_1 B}\frac{1}{|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{\nu-k+|\lambda|_h}}\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}|X_{i_1}\dots X_{i_k} f(\mathbf{y})|\,d\mathbf{y}\right]^{p} dx.
\end{aligned}$$

Далее, в силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{\lambda}\left[f(\mathbf{x})-P_{\gamma_1 B}^{k} f(\mathbf{x})\right]\right\|_{L_p(B)}^{p} \\
&\le\int\limits_{\gamma_1 B}\left[\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}|X_{i_1}\dots X_{i_k} f(\mathbf{y})|\right]^{p} dy\int\limits_{B}\left[\int\limits_{\gamma_1 B}\frac{1}{|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|^{(\nu-k+|\lambda|_h)q}}\,d\mathbf{y}\right]^{p/q} dx \\
&\qquad= C|B|(r^{\nu-(\nu-k+|\lambda|_h)q})^{p/q}\int\limits_{\gamma_1 B}\left[\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}|X_{i_1}\dots X_{i_k} f(\mathbf{y})|\right]^{p} dy,
\end{aligned}$$

где $1/p+1/q=1$ и последнее равенство выполняется при $k-|\lambda|_h>\nu/p$.

Таким образом, при $k-|\lambda|_h>\nu/p$ получаем слабое неравенство Пуанкаре

$$\begin{aligned}
&\left\|X^{\lambda}\left[f(\mathbf{x})-P_{\gamma_1 B}^{k} f(\mathbf{x})\right]\right\|_{L_p(B)} \\
&\qquad= C(r,\nu,p)r^{k-|\lambda|_h}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}\dots X_{i_k} f(\mathbf{y})\right\|_{L_p(\gamma_1 B)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

7. Обобщенные неравенства Пуанкаре на общих группах Карно

Основная цель данного раздела — вывести обобщенное неравенство Пуанкаре в областях Джона на общих группах Карно при условии выполнения слабого неравенства Пуанкаре.

Определение 6. *Группой Карно* ($\mathbb{G}$) *порядка* m называется связная односвязная группа Ли, алгебра Ли V которой нильпотентна и градуирована, т. е. $V=V_1\oplus,\dots,\oplus V_m$, где $[V_1,V_j]=V_{j+1}$, $j<m$, $[V_1,V_m]=0$.

Обозначим $\dim V_i=n_i$, $n_1=n$, $N=n_1+\dots+n_m$. Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1,\dots,X_{n_1}$ образуют базис V_1, $X_{n_1+\dots+n_{i-1}+1},\dots,X_{n_1+\dots+n_i}$, $1<i\le m$, — базис V_i, состоящий из некоторых коммутаторов порядка $i-1$ полей пространства V_1.

Векторные поля $X_1,\dots,X_n$ будем называть *горизонтальными. Степенью векторного поля* X_j назовем число d_i, если $X_j\in V_{d_i}$.

Произвольному N-мерному мультииндексу λ сопоставим число $|\lambda|_h=d_1\lambda_1+\dots+d_N\lambda_N$, а через X^{λ} обозначим дифференциальный оператор $X_1^{\lambda_1}\dots X_N^{\lambda_N}$.

Определим однородную норму $|(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_m)|=(\|\mathbf{x}_1\|^{2m!}+\|\mathbf{x}_2\|^{2m!/2}+\dots+\|\mathbf{x}_m\|^{2m!/m})^{1/2m!}$, где $\|\mathbf{x}_i\|$ — евклидова норма в V_i, $i=1,\dots,m$. Однородная норма порождает на $\mathbb{G}$ однородную метрику $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=|\mathbf{x}^{-1}\cdot\mathbf{y}|$, для которой имеет место обобщенное неравенство треугольника $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})\le\gamma(\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})+\rho(\mathbf{z},\mathbf{y}))$.

Размерность Хаусдорфа группы $\mathbb{G}$ относительно заданной метрики равна $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} in_i$.

В случае общих групп Карно лемма 1 также справедлива, а горизонтальные полиномы имеют вид

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{|\lambda|_h \le l} a_\lambda x^\lambda.$$

Условие 1. *Предположим, что для фиксированного p, $1 < p < \infty$, и для любой функции $f \in W_p^k(\mathbb{G})$ выполняется слабое неравенство Пуанкаре*

$$\|X^\lambda(f - P_B f)\|_{L_p(B)} \le Cr^{k-|\lambda|_h} \left\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \right\|_{L_p(\gamma_1 B)}, \tag{18}$$

где B — некоторый шар, λ — мультииндекс, $|\lambda|_h \le k$, константа C зависит от r, ν, p и $P_B f$ — горизонтальный полином степени $k-1$.

Теорема 6. *Пусть выполняется условие 1 и $U \in J(\alpha, \beta)$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ найдется проекционный оператор P, переводящий функции класса $W_p^k(U)$ в горизонтальные полиномы степени не выше $k-1$, такой, что справедливо неравенство*

$$\|X^\lambda(f - Pf)\|_{L_p(U)} \le C(\operatorname{diam} U)^{k-|\lambda|_h} \left\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \right\|_{L_p(U)}, \tag{19}$$

где λ — мультииндекс, $|\lambda|_h \le k$, константа C зависит от $\nu, p, \alpha, \beta, \gamma$ и выполнено соотношение $k - |\lambda|_h > \nu/p$.

Сформулируем лемму Уитни, которая потребуется нам для доказательства.

Лемма 6 [25]. *Пусть U — область в $\mathbb{G}$ и $C \ge 1$. Существуют последовательности точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \in U$ и чисел $r_1, r_2, \dots > 0$ такие, что*

1) $U = \bigcup\limits_j B(\mathbf{x}_j, r_j)$;

2) *шары* $B\big(\mathbf{x}_j, \frac{r_j}{4\gamma}\big)$ *не пересекаются;*

3) $B(\mathbf{x}_j, Cr_j) \cap (\mathbb{G} \setminus U) = \varnothing$, *а* $B(\mathbf{x}_j, 3\gamma C r_j) \cap (\mathbb{G} \setminus U) \ne \varnothing$;

4) *шары* $B(\mathbf{x}_j, Cr_j)$ *образуют конечнократное покрытие.*

Доказательство. Применим лемму 6 для области U и константы $C = 2\gamma_1\gamma$. Получим разбиение Уитни области U шарами $B(\mathbf{x}_j, r_j)$, $j = 1, 2, \dots$, причем семейство шаров $B(\mathbf{x}_j, 2\gamma_1\gamma r_j)$, $j = 1, 2, \dots$, образует конечнократное покрытие. Заметим, что семейство шаров $B(\mathbf{x}_j, 2\gamma r_j)$, $j = 1, 2, \dots$, также образует конечнократное покрытие Уитни.

Рассмотрим произвольный шар $B(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{r})$ из взятого выше разбиения и выделенную точку p_0, заданную в определении 4. По определению области Джона центр рассмотренного шара можно соединить с выделенной точкой спрямляемой кривой $\psi(s)$, $0 \le s \le l \le \beta$, для которой $\psi(0) = \tilde{\mathbf{x}}$, $\psi(l) = p_0$, удовлетворяющей некоторым условиям.

Покроем полученную кривую шарами из разбиения. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие кривой, содержащее шар $B(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{r})$. Шары покрытия занумеруем следующим образом:

1) $p_0 \in B_0(x_0, r_0)$,

2) $\inf\limits_{s \in [0,l]} \{\psi(s) : \psi(s) \notin B_0(x_0, r_0)\} \in B_1(x_1, r_1)$,

3) $\inf\limits_{s\in[0,l]}\{\psi(s):\psi(s)\notin B_1(x_1,r_1)\}\in B_2(x_2,r_2)$,

и т. д., пока не получим, что все точки части кривой, соединяющей $\inf\limits_{s\in[0,l]}\{\psi(s):\psi(s)\notin B_{k-1}(x_{k-1},r_{k-1})\}$ и $\psi(0)=\tilde{\mathbf{x}}$, лежат в шаре $B(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{r})$, который обозначим через $B_k(x_k,r_k)$.

Полученное таким образом упорядоченное конечное покрытие будем называть *цепочкой шаров $p_0\in B_0(x_0,r_0),B_1(x_1,r_1),\dots,B_k(x_k,r_k)$, покрывающих кривую, принадлежащей разбиению Уитни.* Отметим некоторые свойства такой цепочки.

Лемма 7. 1. *Справедливы неравенства $C^{-1}\le\frac{r(2\gamma B_i)}{r(2\gamma B_{i-1})}\le C$.*

2. *Существует шар $G_i\subset(B(\mathbf{x}_i,2\gamma r_i)\cap B(\mathbf{x}_{i-1},2\gamma r_{i-1}))$ такой, что $r(G_i)=\min(r_i,r_{i-1})$.*

3. *$B(\mathbf{x}_k,2\gamma r_k)\subseteq\eta B(\mathbf{x}_i,2\gamma r_i)$ для любого $i=0,\dots,k$, где η — постоянная.*

Действительно, первое свойство сразу следует из леммы 6, второе — из неравенства треугольника, а третье — из неравенства треугольника и определения области Джона, причем η выражается через α,β,γ.

Далее будем обозначать для краткости $B_i=B(\mathbf{x}_i,2\gamma r_i)$, а совокупность всех шаров B_i, образующую конечнократное покрытие Уитни, — через F_w. Для шаров B_i можно записать неравенство Пуанкаре (18), причем шары $\gamma_1 B_i$ по вышеизложенным рассуждениям также будут лежать в области U и образовывать конечнократное покрытие Уитни.

Рассмотрим теперь интеграл, стоящий в левой части неравенства (19). Имеем

$$\int\limits_U |X^\lambda(f-P_{B_0}f)|^p\,dx\le\sum_{B\in F_w}\int\limits_B|X^\lambda(f-P_{B_0}f)|^p\,dx$$
$$\le 2^p\sum_{B\in F_w}\left(\int\limits_B|X^\lambda(f-P_Bf)|^p\,dx+\int\limits_B|X^\lambda(P_Bf-P_{B_0}f)|^p\,dx\right)=2^p(I+II). \tag{20}$$

Оценим первый интеграл, используя слабое неравенство Пуанкаре (18) и конечнократность покрытия шарами:

$$I=\sum_{B\in F_w}\int\limits_B|X^\lambda(f-P_Bf)|^p\,dx$$
$$\le\sum_{B\in F_w}C(r(B))^{(k-|\lambda|_h)p}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}X_{i_1}\dots X_{i_k}f\right\|^p_{L_p(\gamma_1 B)}$$
$$\le C(\operatorname{diam}U)^{(k-|\lambda|_h)p}\sum_{B\in F_w}\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}X_{i_1}\dots X_{i_k}f\right\|^p_{L_p(\gamma_1 B)}$$
$$\le C(\operatorname{diam}U)^{(k-|\lambda|_h)p}N_0\left\|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1}X_{i_1}\dots X_{i_k}f\right\|^p_{L_p(U)}. \tag{21}$$

Для того чтобы оценить интеграл II, рассмотрим для каждого шара $B\in F_w$ цепочку шаров $B_0,B_1,\dots,B_{s(B)}=B$, как описано выше. Тогда по свойствам шаров в цепочке получим

$$\|X^\lambda(P_B f - P_{B_0} f)\|_{L_p(B)} \le \sum_{i=0}^{s(B)-1} \|X^\lambda(P_{B_{i+1}} f - P_{B_i} f)\|_{L_p(B)}$$
$$\le \sum_{i=0}^{s(B)-1} C\frac{|B|^{1/p}}{|B_i \cap B_{i+1}|^{1/p}} \|X^\lambda(P_{B_{i+1}} f - P_{B_i} f)\|_{L_p(B_i \cap B_{i+1})}$$
$$\le \sum_{i=0}^{s(B)-1} C\biggl(\frac{|B|^{1/p}}{|B_i|^{1/p}} \|X^\lambda(f - P_{B_i} f)\|_{L_p(B_i)} + \frac{|B|^{1/p}}{|B_{i+1}|^{1/p}} \|X^\lambda(f - P_{B_{i+1}} f)\|_{L_p(B_{i+1})}\biggr)$$
$$= C(III + IV). \quad (22)$$

В данном случае использовалась конечномерность пространства полиномов и свойство 2 из леммы 7.

Интегралы III и IV оцениваются схожим образом, поэтому мы рассмотрим вывод оценки только первого интеграла. Используя слабое неравенство Пуанкаре (18), выводим

$$III = \sum_{i=0}^{s(B)-1} \frac{|B|^{1/p}}{|B_i|^{1/p}} \|X^\lambda(f - P_{B_i} f)\|_{L_p(B_i)}$$
$$\le \sum_{i=0}^{s(B)-1} \frac{|B|^{1/p}}{|B_i|^{1/p}} C(r(B_i))^{k-|\lambda|_h} \Bigl\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Bigr\|_{L_p(\gamma_1 B_i)}$$
$$\le C(\operatorname{diam}(U))^{k-|\lambda|_h} \sum_{i=0}^{s(B)-1} \frac{|B|^{1/p}}{|B_i|^{1/p}} \Bigl\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Bigr\|_{L_p(\gamma_1 B_i)}. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь для фиксированного $B \in F_w$ совокупность шаров $F_B = \{\widetilde{B} \in F_w : \nu\widetilde{B} \supseteq B\}$. Заметим, что любой шар B_i нашей цепочки принадлежит F_B. Положим для любого $B \in F_w$

$$a_B = \frac{1}{|B|^{1/p}} \Bigl\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Bigr\|_{L_p(\gamma_1 B)}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{s(B)-1} \frac{|B|^{1/p}}{|B_i|^{1/p}} \Bigl\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Bigr\|_{L_p(\gamma_1 B_i)}$$
$$\le \sum_{\widetilde{B} \in F_B} \frac{|B|^{1/p}}{|\widetilde{B}|^{1/p}} \Bigl\| \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1} \dots X_{i_k} f \Bigr\|_{L_p(\gamma_1 \widetilde{B})} = |B|^{1/p} \sum_{\widetilde{B} \in F_B} a_{\widetilde{B}}. \quad (24)$$

Далее нам понадобится следующий факт.

Лемма 8. *Для любого $x \in B$ выполняется равенство*

$$\sum_{\widetilde{B} \in F_B} a_{\widetilde{B}} = \sum_{\widetilde{B} \in F_w} a_{\widetilde{B}} \chi_{\nu\widetilde{B}}(x).$$

Кроме того, существует константа D, зависящая от p и ν, такая, что

$$\Bigl\| \sum_{\widetilde{B} \in F_w} a_{\widetilde{B}} \chi_{\nu\widetilde{B}}(x) \Bigr\|_{L_p(U)} \le D \Bigl\| \sum_{\widetilde{B} \in F_w} a_{\widetilde{B}} \chi_{\widetilde{B}}(x) \Bigr\|_{L_p(U)}. \quad (25)$$

Используя эту лемму, а также неравенства (22)–(24) и свойства шаров цепочки, выводим

$$
\begin{aligned}
II = \sum_{B\in F_w}\int_B |X^\lambda(P_Bf - P_{B_0}f)|^p\,dx \le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\sum_{B\in F_w}\int_B\Big(\sum_{\widetilde B\in F_B} a_{\widetilde B}\Big)^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\sum_{B\in F_w}\int_B\Big(\sum_{\widetilde B\in F_w} a_{\widetilde B}\chi_{\nu\widetilde B}(x)\Big)^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}N_0\int_U\Big(\sum_{\widetilde B\in F_w} a_{\widetilde B}\chi_{\nu\widetilde B}(x)\Big)^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}N_0D^p\int_U\Big(\sum_{\widetilde B\in F_w} a_{\widetilde B}\chi_{\widetilde B}(x)\Big)^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\int_U\sum_{\widetilde B\in F_w} a^p_{\widetilde B}\chi_{\widetilde B}(x)\,dx = C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\sum_{\widetilde B\in F_w} a^p_{\widetilde B}|\widetilde B| \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\sum_{\widetilde B\in F_w}\int_{3\widetilde B}\Big|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}\dots X_{i_k}f\Big|^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\int_U\sum_{\widetilde B\in F_w}\chi_{\gamma_1\widetilde B}(x)\Big|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}\dots X_{i_k}f\Big|^p\,dx \\
\le C(\operatorname{diam} U)^{(k-|\lambda|_h)p}\int_U\Big|\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n_1} X_{i_1}\dots X_{i_k}f\Big|^p\,dx. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Тем самым теорема доказана, если положить $Pf = P_{B_0}f$. □

8. Коэрцитивные оценки

В этом разделе мы выводим коэрцитивные оценки на шарах двухступенчатых групп Карно. Далее, предполагая, что такая оценка имеет место на общих группах Карно, мы доказываем коэрцитивные оценки на областях Джона.

Пусть $B = B(\mathbf{a}, r) \in \mathbb{G}^{n_1+n_2}$ и Q — линейный дифференциальный оператор, переводящий гладкую функцию $f : \gamma_1 B \to \mathbb{R}^m$ в функцию с компонентами

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\lambda:|\lambda|_h=k} C^j_{i,\lambda}X^\lambda f_i(x), \quad x\in\gamma_1B,\ j=1,\dots,l, \qquad (27)$$

где λ — мультииндекс, а $C^j_{i,\lambda}$ — постоянные.

Теорема 7. *Пусть Q имеет конечномерное ядро. Тогда найдется семейство проекционных операторов $P_{Q,\varphi}$, переводящих гладкие m-вектор-функции в функции из $\ker Q$ и удовлетворяющих неравенству*

$$\|f - P_{Q,\varphi}f\|_{W^1_p(B)} \le C(r,\varphi,\nu,p,Q)\|Qf\|_{L_p(\gamma_1 B)}. \qquad (28)$$

Замечание 3. В случае групп Гейзенберга для областей, удовлетворяющих условию конуса, теорема 7 доказана в [30]. Первая часть приведенного ниже доказательства основывается на схеме этой работы.

Доказательство. Обозначим через G_l линейное пространство всех однородных горизонтальных полиномов порядка l. Очевидно, что для $g \in G_l$ и $|\lambda|_h = l > k$ выполнено $X^\lambda g = \mathrm{const}$ и, кроме того, $X^\lambda g = 0$ тогда и только тогда, когда $g \equiv 0$.

Таким образом, из условия конечномерности ядра оператора Q следует существование такого натурального числа l, что $\ker Q \cap G_l = 0$.

Введем операторы $D^{l-k}Q$ и ∇^l, переводящие функцию f в функцию, компонентами которой являются всевозможные горизонтальные производные порядка $l-k$ от компонент функции Qf и горизонтальные производные порядка l от компонент функции f соответственно. Тогда из определения Q очевидно, что

$$D_L^{l-k}Qf = A\nabla_L^l f, \tag{29}$$

где A — матрица с постоянными элементами.

В силу того, что $\ker Q \cap G_l = 0$, имеем

$$\ker D_L^{l-k}Q \cap G_l = 0, \tag{30}$$

а это означает, что на ненулевых горизонтальных полиномах порядка l оператор $D_L^{l-k}Q$ не обращается в нуль.

Нетрудно видеть, что линейное отображение $\nabla_L^l : g \mapsto \nabla_L^l g$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством однородных горизонтальных полиномов порядка l и пространством векторов соответствующей размерности. Рассматривая ∇_L^l как отображение, задающее систему координат в G_l, а также принимая во внимание (29) и (30), получаем, что матрица A обратима.

Итак, имеем $\nabla_L^l f = A^{-1}D_L^{l-k}Qf$, т. е. все горизонтальные производные порядка l компонент вектор-функции f могут быть представлены в виде линейных комбинаций горизонтальных производных порядка $l-k$ компонент Qf.

Далее, в силу леммы 1 и теоремы 3 справедливо интегральное представление типа Соболева

$$f(x) = \int\limits_{\gamma_1 B} P_k(x,y;\varphi_0)f(y)\,dy + \int\limits_{\gamma_1 B} K_l^i(x,y)\nabla_L^l f(y)\,dy, \quad x \in B.$$

Отсюда

$$f(x) = \int\limits_{\gamma_1 B} P_k(x,y;\varphi_0)f(y)\,dy + \int\limits_{\gamma_1 B} K_l^i(x,y)A^{-1}D_L^{l-k}Qf(y)\,dy, \quad x \in B.$$

Применяя во втором слагаемом последнего представления формулу интегрирования по частям $l-k$ раз, получаем

$$f(x) = \int\limits_{\gamma_1 B} P_k(x,y;\varphi_0)f(y)\,dy + \int\limits_{\gamma_1 B} H_i(x,y)Qf(y)\,dy, \quad x \in B, \tag{31}$$

где $H_i(x,y)$ — матричная функция. Заметим, что в силу свойств ядра $K_l^i(x,y)$ (см. теорему 3 и лемму 5) компоненты ядра $H_i(x,y)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.

Введем оператор $P_{l,\varphi}^i$, функции f сопоставляющий $\int\limits_{\gamma_1 B} P_k(x,y;\varphi_0)f(y)\,dy$. Функции $P_k(x,y;\varphi_0)$ являются горизонтальными полиномами порядка $l-1$, поэтому оператор $P_{l,\varphi}^i$ переводит функции класса $L_1(B_i)$ в горизонтальные производные порядка не выше $l-1$. Рассуждая, как в теореме 5, можно получить, что

$$\|f - P_{Q,\varphi} f\|_{W_p^1(B)} \le C(r, \varphi, \nu, p, Q)\|Qf\|_{L_p(\gamma_1 B)}. \qquad \square$$

Рассмотрим случай общей группы Карно. Пусть $U \in J(\alpha, \beta)$ и Q — линейный дифференциальный оператор, переводящий гладкую функцию $f : U \to \mathbb{R}^m$ в функцию с компонентами

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda:|\lambda|_h = k} C_{i,\lambda}^{j} X^{\lambda} f_i(x), \quad x \in U,\ j = 1, \dots, l, \tag{32}$$

где λ — мультииндекс, а $C_{i,\lambda}^{j}$ — постоянные. Используя метод доказательства теоремы 6, можно доказать следующий результат.

Теорема 8. *Пусть Q имеет конечномерное ядро. Тогда найдется семейство проекционных операторов $P_{Q,\varphi}$, переводящих гладкие m-вектор-функции в функции из $\ker Q$ и удовлетворяющих неравенству*

$$\|f - P_{Q,\varphi} f\|_{W_p^1(U)} \le C(r, \varphi, \nu, p, Q)\|Qf\|_{L_p(U)}. \tag{33}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2006. Т. II.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
4. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Мир, 1973.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985.
7. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
8. *Jerison D.* The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition // Duke Math. J. 1986. V. 53, N 2. P. 503–523.
9. *Stein E.* Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
10. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
11. *Hajlasz P.* Geometric approach to Sobolev spaces and badly degenerated elliptic equation // Math. Sci. Appl. 1995. V. 7. P. 141–168.
12. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
13. *Vodopyanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. 2007. V. 424. P. 303–344.
14. *Heinonen J., Koskela P.* Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry // Acta Math. 1998. V. 181. P. 1–61.
15. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 128, N 2. P. 1–60.
16. *Романовский Н. Н.* Интегральные представления и теоремы вложения для функций, заданных на группах Гейзенберга // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 4. С. 456–459.
17. *Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения. М.: Наука, 1983.
18. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1996.

19. *Rotschild G. B., Stein I.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.

20. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* An embedding theorem and the Harnack inequality for nonlinear subelliptic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1993. V. 18, N 9–10. P. 1765–1794.

21. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* Capacitary estimates and the local behavior of solutions to nonlinear subelliptic equations // Amer. J. Math. 1996. V. 118, N 6. P. 1153–1196.

22. *Franchi B., Lanconelli E.* Hölder regularity theorem for a class of non uniformly elliptic operators with measurable coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. 1983. V. 10, N 4. P. 523–541.

23. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.

24. *Garofalo N., Nhieu D. M.* Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot–Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1996. V. 49, N 10. P. 1081–1144.

25. *Folland G. B., Stein I.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Amer. Math. Soc., 1982.

26. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теорема типа Уитни о продолжении функций на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 731–752.

27. *Плотникова Е. А.* Интегральные представления типа Соболева для функций, определенных на группах Карно // Мат. тр. 2008. Т. 11, № 1.

28. *Романовский Н. Н.* О проблеме Михлина на группах Карно // Сиб. мат. журн, 2008. Т. 49, № 1. С. 193–206.

29. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

30. *Романовский Н. Н.* Коэрцитивные оценки для линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 2. С. 316–320.

Статья поступила 5 июня 2007 г.

Плотникова Елена Александровна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
pselena@gmail.com