Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.948.5

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОПЕРАТОРОВ СЛАБОГО ТИПА (φ, φ)

Б. И. Пелешенко

Аннотация. Для измеримых и неотрицательных на полупрямой $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, исследуются операторы слабого типа (φ, φ), отображающие классы φ-интегрируемых по Лебегу функций в пространство измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ вещественных функций. Доказаны теоремы интерполяции субаддитивных операторов слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченно действующих в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, и субаддитивных операторов слабых типов (φ_0, φ_0), (φ_1, φ_1) в пространствах $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ при некоторых предположениях относительно неотрицательных и возрастающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(x)$. Теоремы интерполяции получены и для линейных операторов слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченно действующих из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$. Для таких операторов, суженных на множество характеристических функций измеримых по Лебегу множеств, установлены оценки перестановок модулей их значений; в качестве следствия получена теорема об ограниченности операторов в симметричных пространствах.

Ключевые слова: интерполяция операторов, φ-интегрируемая функция, оператор слабого типа, симметричное пространство, модулярное неравенство.

Введение. В работах [1–3] получены теоремы интерполяции в пространствах $L_q(Q)$ $(1 \le p < q < \infty$, Q — n-мерный куб или $\mathbb{R}^n)$ линейных операторов типа (L_p, L_p) (или слабого типа (L_p, L_p^*)), ограничено действующих из пространства $L_\infty(Q)$ в пространство функций ограниченных осцилляций $BMO(Q)$.

Дальнейшее развитие этих результатов дано в [4], где доказана теорема интерполяции в пространствах Лоренца $L_{q,r}(\Theta)$ $(1 \le p < q < \infty$, $1 \le r \le \infty$, Θ — открытое множество из $\mathbb{R}^n)$ сублинейных операторов, определяемых на множестве простых функций и рассматриваемых как операторы слабого типа (L_p, L_q^*) и типа (L_∞, BMO), если их сузить на характеристические функции множеств $x+U_t \in \Theta$ некоторого регулярного семейства Витали $\{x+U_t\}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. При этом пространство ограниченной осциляции $BMO(\Theta)$ определяется по множествам $x + U_t \in \Theta$. В [5] получен общий метод, позволяющий интерполировать в пространствах Лоренца — Зигмунда как квазилинейные операторы условно слабых типов $(L_{p,1}, L_q^*)$, $(L_{r,1}, L_s^*)$ $(0 < p < r \le \infty$, $0 < q, s \le \infty$, $q \ne s)$, так и некоторые операторы слабого типа (L_p, L_p^*), ограничено действующие из пространства $L_\infty(Q)$ в пространство $BMO(Q)$.

Результаты перечисленных работ обобщают и дополняют известную теорему Марцинкевича [6] и ее версии в форме Стейна, Вейса [7] , Ханта [8], Кальдерона [9]. Они показывают, что в условии теорем интерполяции сублинейных операторов слабого типа (L_p, L_p^*) и типа (L_∞, L_∞) вместо операторов типа (L_∞, L_∞) можно рассматривать операторы типа (L_∞, BMO).

В статье [10] для любой измеримой и неотрицательной на полупрямой $(0, \infty)$ функции $\Phi(x)$ определены операторы слабого типа (Φ, Φ) на классе Φ-интегрируемых по мере μ функций n переменных со значениями в банаховом пространстве B и доказана теорема об ограниченности субаддитивных операторов слабых типов (Φ, Φ) и (ψ, ψ) в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n, B)$ при условии, что

$$\max\left\{\int\limits_0^{1/2} t^{p-1}\psi\left(\frac{1}{t}\right) dt, \int\limits_{1/2}^{\infty} t^{p-1}\Phi\left(\frac{1}{t}\right) dt\right\} < \infty.$$

В предлагаемой работе рассматриваются операторы слабых типов (φ, φ), отображающие классы φ-интегрируемых по Лебегу функций $f : \mathbb{R}^n \to R$ в пространство измеримых на $\mathbb{R}^n$ по Лебегу вещественных функций. Целью работы является доказательство для операторов слабых типов (φ_0, φ_0), (φ_1, φ_1) и операторов слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченно действующих из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$, модулярных неравенств вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\, dx \le C_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\, dx \quad (f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n))$$

при подходящем выборе функции $\varphi(t)$. Вышеприведенные результаты наиболее близко подходят к исследованиям данной работы.

Следует отметить, что понятие оператора слабого типа обобщалось в работах многих авторов, в которых получены уточнения и обобщения теорем Марцинкевича об интерполяции квазилинейных операторов слабых типов (L_p, L_p^*) и (L_r, L_r^*) $(1 \le p < r \le \infty)$.

В работе [11] доказаны весьма общие теоремы интерполяции для квазиаддитивных операторов слабых типов (A_0, ψ_0), (A_1, ψ_1), действующих из банаховых пространств A_1, A_2 в пространство вещественных измеримых на $(0, \infty)$ функций и удовлетворяющих при некоторых $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и всех $t > 0$, $f \in A_1$, $g \in A_2$ неравенствам $(Tf)^*(t)\psi_1(t) \le K_1\|f\|_{A_1}$, $(Tg)^*(t)\psi_2(t) \le K_2\|g\|_{A_2}$.

Символом $u^*(t)$ обозначается перестановка измеримой функции $|u(t)|$ в не возрастающем порядке, $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$ — положительные неубывающие на полуоси $(0, \infty)$ функции, для которых $t^{-1}\psi_0(t)$, $t^{-1}\psi_1(t)$ не возрастают. Важную роль при доказательстве изложенных в [11] результатов играет максимальный оператор Кальдерона.

Для сравнения отметим, что операторы слабого типа (Φ, Φ) заданы на классе Φ-интегрируемых функций, в котором не всегда можно ввести норму, а операторы слабого типа (A, ψ) заданы на банаховом пространстве. Если, например, хотя бы одна из функций $\Phi(t)$, $\psi(t)$ вогнутая, то результаты работы [11] не применимы для операторов слабых типов (Φ, Φ), (ψ, ψ). Операторы слабого типа (A, ψ) совпадают с операторами слабого типа (Φ, Φ) и являются операторами слабого типа (L_p, L_p^*) в случае $A = L_p(\mathbb{R}^n)$, $\psi(t) = t^{1/p}$, $\Phi(t) = t^p$, где $1 \le p < \infty$. Кроме того, в [11] не рассматриваются операторы, ограниченно действующие из банаховых пространств в $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Обозначения и определения. Прежде чем формулировать и доказывать теоремы, введем необходимые обозначения и определения.

Пусть Φ — множество всюду конечных измеримых возрастающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ и $\varphi(2t) = O(\varphi(t))$ при $t \to +0$, $t \to \infty$.

Для положительной всюду конечной на $(0, \infty)$ функции $\psi(t)$ определим функцию растяжения

$$M_\psi(t) = \sup_{0<s<\infty} \psi(st/\psi(s)), \quad 0 < t < \infty.$$

Нижний и верхний показатели γ_ψ, δ_ψ растяжения функции $\psi(t)$ определяются формулами [12]

$$\gamma_\psi = \lim_{t\to 0} \frac{\ln M_\psi(\tau)}{\ln \tau}, \quad \delta_\psi = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln M_\psi(\tau)}{\ln \tau}.$$

Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ класс измеримых по Лебегу функций $f : \mathbb{R}^n \to R$. Символом $\operatorname{mes} D$ далее обозначается мера Лебега измеримого множества $D \in \mathbb{R}^n$. Если $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, то ее функция распределения для чисел $\tau \geq 0$ определяется равенством $\lambda(f;\tau) = \operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \tau\}$, а невозрастающая перестановка $|f(x)|$ определяется для чисел $t > 0$ по формуле $f^*(t) = \inf\{\tau : \lambda(f;\tau) < t\}$.

Банахово пространство $E(\mathbb{R}^n)$ функций, заданных на $\mathbb{R}^n$, называется *симметричным*, если из того, что $y \in E(\mathbb{R}^n)$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$ для всех $t \in (0,\infty)$, вытекает, что $x \in E(\mathbb{R}^n)$ и для норм выполняется неравенство $\|x\|_{E(\mathbb{R}^n)} \leq \|y\|_{E(\mathbb{R}^n)}$. Пусть $\chi_D(x)$ — характеристическая функция измеримого множества $D \in \mathbb{R}^n$, равенством $\varphi_E(\operatorname{mes} D) = \|\chi_D\|_{E(\mathbb{R}^n)}$ определена фундаментальная функция $\varphi_E(t)$ пространства $E(\mathbb{R}^n)$.

Для неотрицательной измеримой на полуоси $(0,\infty)$ функции $\varphi(t)$ класс $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество таких функций $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$, для которых $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx < \infty$. Если функция $\varphi(t)$ выпуклая и удовлетворяет условию $t^{-1}\varphi(t) \to \infty$, когда $t \to \infty$, то класс $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством $L^*_\varphi(\mathbb{R}^n)$ всех функций $f(x)$ таких, что $\lambda f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ при некотором $\lambda > 0$. В $L^*_\varphi(\mathbb{R}^n)$ определена норма

$$\|f\|_{L^*_\varphi(\mathbb{R}^n)} = \inf_{\lambda>0}\left\{\lambda : \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq \varphi(1)\right\}.$$

Символ $L^0_\varphi(\mathbb{R}^n)$ обозначает множество функций с компактным носителем из класса $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

Для локально интегрируемой по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ и любого куба $B \in \mathbb{R}^n$ обозначим $f_B = (\operatorname{mes} B)^{-1} \int\limits_B f(x)\,dx$. Пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$ состоит из таких локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций, для которых конечна полунорма $\|f\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} = \sup\limits_B \frac{1}{\operatorname{mes} B} \int\limits_B |f(x) - f_B|\,dx$, где точная верхняя грань берется по всем кубам $B \in \mathbb{R}^n$.

Определение [5]. Субаддитивный оператор T называется *оператором слабого типа* (φ,φ), если существует такая постоянная $A_\varphi > 0$, что для всех функций $f(x) \in S(\mathbb{R}^n)$ и чисел $t > 0$ таких, что $\frac{f(x)}{t} \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$, выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf(x)| > t\} \leq A_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{t}\right) dx.$$

Если в определении $\varphi(t) = t^p$, $0 < p < \infty$, то T называется *оператором слабого типа* (L_p, L^*_p). Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит Φ и $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\varphi(t) > 0$.

Примером субаддитивного оператора слабого типа (φ, φ) является максимальный оператор, ставящий в соответствие каждой локально интегрируемой на $\mathbb{R}^n$ функции максимальную функцию, определяемую на множествах инвариантного относительно гомотетий базиса Буземана — Феллера, дифференцирующего класс функций $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ [13].

В представленной работе для субаддитивных операторов слабых типов (φ_0, φ_0), (φ_1, φ_1) и для субаддитивных операторов слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченных в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, доказаны модулярные неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx \le C_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx$$

при некоторых предположениях относительно измеримых неотрицательных возрастающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(x)$. Такого же вида неравенства доказаны для линейных операторов слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченно действующих из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$. Установлены оценки перестановок модулей образов линейных операторов слабого типа (φ_0, φ_0) и типа (L_∞, BMO), суженных на характеристические функции множеств конечной меры Лебега. В качестве следствия доказана теорема об ограниченности таких операторов в симметричных пространствах.

Основные результаты. Сформулируем и докажем содержащиеся в работе утверждения.

Теорема 1. *Пусть субаддитивный оператор T является оператором слабых типов (φ_0, φ_0), (φ_1, φ_1) и функция растяжения функции $\varphi(t) \in \Phi$ удовлетворяет условию*

$$B_\varphi = \max\left\{ \int\limits_0^{1/2} M_\varphi(z)\varphi_0(z^{-1})z^{-1}\,dz,\ \int\limits_{1/2}^{\infty} M_\varphi(z)\varphi_1(z^{-1})z^{-1}\,dz \right\} < \infty. \tag{1}$$

Тогда существует такая постоянная $C_\varphi > 0$, что для всех функций $f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx \le C_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx. \tag{2}$$

Доказательство. Для функции $f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ и $t > 0$ полагаем $f_t(x) = f(x)$, если $|f(x)| \le t$, и $f_t(x) = 0$ в другом случае; $f^t(x) = f(x) - f_t(x)$. Обозначим через E_t носитель функции $f_t(x)$ и через F_t — носитель функции $f^t(x)$.

Так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию в нуле и на бесконечности, то функция растяжения $M_\varphi(t)$ существует в каждой точке $t \in (0, \infty)$. Из условия конечности величины B_φ и полумультипликативности функции растяжения $M_\varphi(t)$ получаем

$$\int\limits_0^1 M_\varphi(2t)\varphi_0(2t^{-1})t^{-1}\,dt + \int\limits_1^\infty M_\varphi(2t)\varphi_1(2t^{-1})t^{-1}\,dt$$
$$\le M_\varphi(4)\left\{ \int\limits_0^{1/2} M_\varphi(s)\varphi_0(s^{-1})s^{-1}\,ds + \int\limits_{1/2}^{\infty} M_\varphi(s)\varphi_1(s^{-1})s^{-1}\,ds \right\} < \infty. \tag{3}$$

Следовательно, интегралы $\int\limits_0^1 M_\varphi(2t)\varphi_0(2t^{-1})t^{-1}\,dt$, $\int\limits_1^\infty M_\varphi(2t)\varphi_1(2t^{-1})t^{-1}\,dt$ сходятся. Так как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\int\limits_0^1 \varphi(2z|f(x)|)\varphi_0(2z^{-1})z^{-1}\,dz+\int\limits_1^\infty \varphi(2z|f(x)|)\varphi_1(2z^{-1})z^{-1}\,dz\right\}dx$$
$$\le\left\{\int\limits_0^1 M\varphi(2z)\varphi_0(2z^{-1})z^{-1}\,dz+\int\limits_1^\infty M\varphi(2z)\varphi_1(2z^{-1})z^{-1}\,dz\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx$$

и по теореме Фубини

$$\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_{E_t}\varphi_1\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx+\int\limits_{F_t}\varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx\right\}\varphi(2t)t^{-1}\,dt$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\int\limits_0^{|f(x)|}\varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)\varphi(2t)t^{-1}\,dt+\int\limits_{|f(x)|}^\infty\varphi_1\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)\varphi(2t)t^{-1}\,dt\right\}dx$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left\{\int\limits_0^1 \varphi(2z|f(x)|)\varphi_0(2z^{-1})z^{-1}\,dz+\int\limits_1^\infty \varphi(2z|f(x)|)\varphi_1(2z^{-1})z^{-1}\,dz\right\}dx,$$

то

$$\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_{E_t}\varphi_1\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx+\int\limits_{F_t}\varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx\right\}\varphi(2t)t^{-1}\,dt$$
$$\le\left\{\int\limits_0^1 M\varphi(2z)\varphi_0(2z^{-1})z^{-1}\,dz+\int\limits_1^\infty M\varphi(2z)\varphi_1(2z^{-1})z^{-1}\,dz\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx. \quad (4)$$

Из сходимости интегралов, стоящих в правой части, следует сходимость интеграла, стоящего в левой части неравенства, а также конечность интегралов $\int\limits_{E_t}\varphi_1\big(\frac{2|f(x)|}{t}\big)\,dx$, $\int\limits_{F_t}\varphi_0\big(\frac{2|f(x)|}{t}\big)\,dx$ почти для всех $t>0$.

Пусть $A=\max\{A_{\varphi_0},A_{\varphi_1}\}$, где A_{φ_0}, A_{φ_1} — постоянные в неравенствах, определяющих слабые типы (φ_0,φ_0), (φ_1,φ_1) оператора T. Тогда

$$\int\limits_0^\infty\lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt\le\int\limits_0^\infty\lambda(Tf_t;t/2)\varphi(2t)t^{-1}\,dt+\int\limits_0^\infty\lambda(Tf^t;t/2)\varphi(2t)t^{-1}\,dt$$
$$\le A\int\limits_0^\infty\left\{\int\limits_{E_t}\varphi_1(2t^{-1}|f_t(x)|)\,dx+\int\limits_{F_t}\varphi_0(2t^{-1}|f^t(x)|)\,dx\right\}dt.$$

С учетом неравенств (3), (4) получаем

$$\int\limits_0^\infty\lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt\le 2AM_\varphi(4)B_\varphi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx. \quad (5)$$

Докажем, что $\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\,d\varphi(t) \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt$. Если $\lambda(Tf;\varepsilon) > 0$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то

$$\int\limits_0^\varepsilon \varphi(2t)t^{-1}\,dt \le \frac{1}{\lambda(Tf;\varepsilon)}\int\limits_0^\varepsilon \lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt \le \frac{1}{\lambda(Tf;\varepsilon)}\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt,$$

т. е. интеграл $\int\limits_0^\varepsilon \varphi(2t)t^{-1}\,dt$ сходится. По условию функция $\varphi(t)$ ограничена на отрезке $[0,\tau]$ при любом $\tau \in (0,\infty)$, следовательно, интеграл $\int\limits_0^\tau \varphi(2t)t^{-1}\,dt$ сходится и

$$\int\limits_0^\tau d\varphi(t) = \varphi(\tau) \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_\tau^{2\tau} \varphi(t)t^{-1}\,dt \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^\tau \varphi(2t)t^{-1}\,dt.$$

Тогда из свойства интегралов от неотрицательных невозрастающих на полуоси $(0,\infty)$ функций [12] следует неравенство

$$\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\,d\varphi(t) \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt.$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\,d\varphi(t) &= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^{\lambda(Tf;t)} dz\right)\varphi'(t)\,dt \\ &= \int\limits_0^\infty dz \int\limits_0^{(Tf)^*(z)} \varphi'(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \varphi(Tf^*(z))\,dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx,\end{aligned}$$

и неравенство (5), получаем (2)

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^\infty \varphi(|Tf(x)|)\,dx \le \frac{1}{\ln 2}\int\limits_0^\infty \lambda(Tf;t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt \\ &\le \frac{1}{\ln 2}A\left\{\int\limits_0^{1/2} M_\varphi(4s)\varphi_0(s^{-1})s^{-1}\,ds + \int\limits_{1/2}^\infty M_\varphi(4s)\varphi_1(s^{-1})s^{-1}\,ds\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx \\ &\qquad \le \frac{2}{\ln 2}CM_\varphi(4)B_\varphi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx = C_\varphi\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx.\end{aligned}$$

Если $\lambda(Tf;t) = 0$ для всех $t \in R_+$, то тогда $Tf(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, и неравенство (2) доказано.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 1 *оператор* T *положительно однородный* (*т. е. для любого действительного числа* α *выполняется равенство* $|T(\alpha f(x))| = |\alpha|\,|Tf(x)|$) *и функция* $\varphi(t) \in \Phi$ *выпукла и удовлетворяет условиям* $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}\varphi(t) = \infty$, *то оператор* T *ограничен в пространстве* $L^*_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство получаем из теоремы 1 и теоремы 10.14 в [14].

Теорема 2. *Пусть T — субаддитивный оператор слабого типа (φ_0, φ_0), ограниченный в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|T\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)\to L_\infty(\mathbb{R}^n)} = M$, и функция растяжения функции $\varphi(t) \in \Phi$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^M M_\varphi(z)\varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}\,dz < \infty$.*

Тогда существует такая постоянная $D_\varphi > 0$, что для всякой функции $f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx \le D_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ и $t > 0$. Полагаем $f_t(x) = f(x)$, если $2M|f(x)| \le t$, и $f_t(x) = 0$ в других случаях, а $f^t(x) = f(x) - f_t(x)$. Обозначим символом G_t носитель функции $f^t(x)$. По условию оператор T является ограниченным в пространстве $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, следовательно,

$$\|Tf_t\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le M\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \le t/2 \quad \text{и} \quad \lambda(Tf_t; t/2) = 0. \tag{6}$$

Повторяя рассуждения, аналогичные рассуждениям, используемым при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{G_t} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right) dx \right\} \varphi(2t)t^{-1}\,dt \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int\limits_0^{2M|f(x)|} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)\varphi(2t)t^{-1}\,dt \right\} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int\limits_0^M \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)\varphi(4|f(x)|z)z^{-1}\,dz \right\} dx \\ &\le M_\varphi(4) \left\{ \int\limits_0^M \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) M_\varphi(z)z^{-1}\,dz \right\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как интеграл $\int\limits_0^M \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right)M_\varphi(z)z^{-1}\,dz$ сходится и функция $f(x)$ принадлежит $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$, интеграл $\int\limits_0^\infty \left\{\int\limits_{G_t} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx\right\}\varphi(2t)t^{-1}\,dt$ также сходится. Тогда почти для всех $t > 0$ существует интеграл $\int\limits_{G_t} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right)dx$ и, учитывая (6), имеем

$$\lambda(Tf; t) \le \lambda(Tf^t; t/2) + \lambda(Tf_t; t/2) \le A_{\varphi_0} \int\limits_{G_t} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right) dx.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx &\le \frac{1}{\ln 2} \int\limits_0^\infty \lambda(Tf; t)\varphi(2t)t^{-1}\,dt \\ &\le \frac{A_{\varphi_0}}{\ln 2} \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{G_t} \varphi_0\left(\frac{2|f(x)|}{t}\right) dx \right\} \varphi(2t)t^{-1}\,dt. \end{aligned}$$

С учетом неравенства (7) и условия теоремы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|Tf(x)|)\,dx$$

$$\leq \frac{A_{\varphi_0} M_\varphi(4)}{\ln 2} \left\{ \int\limits_0^M \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) M_\varphi(z) z^{-1}\,dz \right\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx = D_\varphi \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(|f(x)|)\,dx.$$

Теорема доказана.

Пусть $\{Q_k\}$ — семейство кубов, покрывающих пространство $\mathbb{R}^n$, с непересекающимися внутренностями и $\theta(t)$ — вогнутая функция из множества Φ. Определим на $L_\theta^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ операторы τ_θ, π_θ, которые всякой функции $g(x) \in L_\theta^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ ставят в соответствие функции $\tau_\theta g(x)$, $\pi_\theta g(x)$, равные на каждом кубе Q_k покрытия величинам

$$\theta^{-1}\left(|Q_K|^{-1} \int\limits_{Q_K} |\theta(|g(x)|) - (\theta(|g|))_{Q_K}|\,dx\right), \quad \theta^{-1}\left(|Q_K|^{-1} \int\limits_{Q_K} \theta(|g(x) - \alpha_k|)\,dx\right),$$

где $\theta(|g|)_{Q_K} = |Q_K|^{-1} \int_{Q_K} \theta(|g(x)|)\,dx$ и через α_k обозначается наименее уклоняющаяся от функции g в θ-метрике пространства $L_\theta(Q_k)$ константа, т. е. такое число, что $\int_{Q_k} \theta(|g(x) - \alpha_k|)\,dx = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \int_{Q_k} \theta(|g(x) - \alpha|)\,dx$.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная неубывающая функция на $(0, \infty)$ такая, что ее нижний показатель растяжения γ_φ больше 0, $\theta(t)$ — вогнутая функция из множества Φ и выполняется условие*

$$\int\limits_1^\infty M_\varphi(z^{-1})\,dM_\theta(z) < \infty. \tag{8}$$

Пусть линейный оператор T слабого типа (φ, φ), ограничен из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$ и

$$C = \sup_{g \in L_\infty(\mathbb{R}^n),\, g \neq 0} (\|Tg\|_{BMO(\mathbb{R}^n)} / \|g\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}).$$

Тогда существует такое число $K_\varphi > 0$, что для всех измеримых на $\mathbb{R}^n$ функций $f(x)$ и $\tau > 0$ таких, что $\frac{f(x)}{\tau} \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$, выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x : \theta(\pi_\theta T f(x)) > 3\theta(\tau)\} \leq K_\varphi \int\limits_{|f(x)| > \tau/C} \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\tau}\right) dx.$$

Доказательство. Пусть вогнутая функция $\theta(t)$ из множества Φ удовлетворяет условию (8). Для всякой функции $h(x) \in L_\theta(\mathbb{R}^n)$ и выбранного покрытия $G = \{Q_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(\pi_\theta h(x))\,dx$$

$$\leq \int\limits_{\bigcup\limits_k Q_k} \theta\left(\sum_k \chi_k(y) \theta^{-1}\left(|Q_K|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|h(x)|)\,dx\right)\right) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta(|h(x)|)\,dx. \tag{9}$$

Пусть $g(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\tilde{g}(x) = Tg(x)$. Применяя неравенство Иенсена [14], для любого куба Q_k имеем

$$\inf_{\alpha \in R} |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|\tilde{g}(x) - \alpha|)\, dx \le |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta\biggl(\biggl|\tilde{g}(x) - |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \tilde{g}(y)\, dy\biggr|\biggr)\, dx$$
$$\le \theta\biggl(|Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} |\tilde{g}(x) - \tilde{g}_{Q_k}|\, dx\biggr) \le \theta(C\|g\|_{L_\infty}).$$

Следовательно, $(\pi_\theta \tilde{g}(x)) \le \theta^{-1}(\theta(C \sup_x |g(x)|)) \le \theta^{-1}(\theta(Ct)) = Ct$.

Пусть измеримая на $\mathbb{R}^n$ функция $f(x)$ и число $t > 0$ такие, что $\frac{f(x)}{Ct} \in L_\varphi(\mathbb{R}^n)$. Воспользуемся представлением $f(x) = f_t(x) + f^t(x)$ функции $f(x)$из доказательства теоремы 1 и обозначим $\tilde{f}(x) = Tf(x)$, $\tilde{f}_t(x) = Tf_t(x)$, $\tilde{f}^t(x) = Tf^t(x)$. Так как $f_t(x) \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$, из доказанного неравенства получаем, что

$$\sup_x (\pi_\theta \tilde{f}_t(x)) \le Ct. \tag{10}$$

Полагаем $\tilde{f}_1^t(x) = \tilde{f}^t(x)$, если $|\tilde{f}(x)| \le Ct$, и $\tilde{f}_1^t(x) = 0$ в другом случае, а $\tilde{f}_2^t(x) = \tilde{f}^t(x) - \tilde{f}_1^t(x)$. Тогда $\theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_1^t(x)\bigr) \le \theta\bigl(\|\tilde{f}_1^t\|_{L_\infty}\bigr) \le \theta(Ct)$.

Покажем, что $\tilde{f}_2^t(x) \in L_\theta(\mathbb{R}^n)$. Так как интеграл $\int\limits_1^\infty M_\varphi(z^{-1})\, dM_\theta(z)\, dz$ сходится, функция $\frac{f(x)}{Ct}$ принадлежит $L_\varphi(\mathbb{R}^n)$ и T — оператор слабого типа (φ, φ), то

$$\frac{1}{\theta(Ct)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta\bigl(\bigl|\tilde{f}_2^t(x)\bigr|\bigr)\, dx \le M_\theta(1)\lambda\biggl(\frac{\tilde{f}_2^t}{Ct}; 1\biggr) + \int\limits_1^\infty \lambda\biggl(\frac{\tilde{f}_2^t}{Ct}; \tau\biggr)\, dM_\theta(\tau)$$
$$\le A \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\biggl(\frac{\bigl|f_2^t(x)\bigr|}{Ct}\biggr)\, dx + A \int\limits_1^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\biggl(\frac{\bigl|f_2^t(x)\bigr|}{Ct\tau}\biggr)\, dx dM_\theta(\tau)$$
$$\le A\biggl\{1 + \int\limits_1^\infty M_\varphi(\tau^{-1})\, dM_\theta(\tau)\biggr\} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\biggl(\frac{\bigl|f_2^t(x)\bigr|}{Ct}\biggr)\, dx < \infty. \tag{11}$$

Далее через $\alpha_{t,k}$, $\alpha_{1,k}^t$, $\alpha_{2,k}^t$ обозначим константы, наименее уклоняющиеся соответственно от функций $\tilde{f}_t$, $\tilde{f}_1^t$, $\tilde{f}_2^t$ в θ-метрике пространства $L_\theta(Q_k)$. По условию T — линейный оператор. Тогда для всякого куба Q_k из покрытия $\mathbb{R}^n$ имеем

$$\inf_{\alpha \in R} |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|\tilde{f}(x) - \alpha|)\, dx \le |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|\tilde{f}_t(x) - \alpha_{t,k}|)\, dx$$
$$+ |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta\bigl(\bigl|\tilde{f}_1^t(x) - \alpha_{1,k}^t\bigr|\bigr)\, dx + |Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta\bigl(\bigl|\tilde{f}_2^t(x) - \alpha_{2,k}^t\bigr|\bigr)\, dx$$

и, следовательно, $\theta(\pi_\theta \tilde{f}(x)) \le \theta(\pi_\theta \tilde{f}_t(x)) + \theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_1^t(x)\bigr) + \theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_2^t(x)\bigr)$.

Учитывая (10) и неравенство $\theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_1^t(x)\bigr) \le \theta(Ct)$, а также неравенство (9), верное для функции $\tilde{f}_2^t(x) \in L_\theta(\mathbb{R}^n)$, имеем

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : \theta(\pi_\theta \tilde{f}(x)) > 3\theta(Ct)\} \le \operatorname{mes}\bigl\{x \in \mathbb{R}^n : \theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_2^t(x)\bigr) > \theta(Ct)\bigr\}$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta\bigl(\pi_\theta \tilde{f}_2^t(x)\bigr)}{\theta(Ct)}\, dx \le \frac{1}{\theta(Ct)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta\bigl(\bigl|\tilde{f}_2^t(x)\bigr|\bigr)\, dx.$$

Из полученного неравенства и оценки (11) следует, что

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n:\theta(\pi_\theta\tilde f(x))>3\theta(Ct)\}$$
$$\le A\left\{1+\int_1^\infty M_\varphi(\tau^{-1})\,dM_\theta(\tau)\right\}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\biggl(\frac{|f^t(x)|}{Ct}\biggr)\,dx=K_\varphi\int_{|f(x)|>t}\varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{Ct}\biggr)\,dx.$$

Полагая $\tau=Ct$, получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание 1. Если в теореме 3 оператор T определен на множестве измеримых финитных функций, ограниченно действует из пространства $L^0_\infty(\mathbb{R}^n)$ в $BMO(\mathbb{R}^n)$ и неравенство слабого типа (φ,φ) выполняется для финитных функций, то утверждение теоремы остается верным для функций $f(x)$ и $\tau>0$ таких, что $\tau^{-1}f(x)\in L^0_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4. *Пусть $\varphi(t)$ — положительная неубывающая функция на $(0,\infty)$, функция $\theta(t)$ и оператор T удовлетворяют условиям теоремы 3 и число $p>1$ выбрано так, что*

$$\int_0^1\varphi(C^{-1}M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\tau^{p-1}\,d\tau<\infty. \tag{12}$$

Тогда существует такая постоянная $A_{\theta^p}>0$, что для всякой функции $f(x)\in L^0_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$ и $t>0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n:\theta(|Tf(x)|)>t\}\le A_{\theta^p}t^{-p}\int_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f(x)|)\,dx. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $f(x)\in L^0_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$ и $t>0$. Как и в теореме 3, полагаем $f_t(x)=f(x)$, если $|f(x)|\le t$, и $f_t(x)=0$ в другом случае; $f^t(x)=f(x)-f_t(x)$. Тогда $\sup\limits_x(\pi_\theta Tf_t(x))\le Ct$.

Пусть $p>1$ удовлетворяет условию (12), докажем, что $\theta(\pi_\theta Tf_t(x))\in L_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$. Так как по условию функция $\varphi(t)$ не убывает, $\int\limits_0^1\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\tau^{p-1}\,d\tau$ сходится и $f(x)\in L^0_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_0^\infty d\theta^p(Ct)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\biggl(\frac{|f^t(x)|}{Ct}\biggr)\,dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_0^{f(x)}\varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{Ct}\biggr)\,d\theta^p(Ct)=\int_{\mathbb{R}^n}dx\int_0^{\theta(C|f(x)|)}\varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{\theta^{-1}(y)}\biggr)\,dy^p$$
$$\le M_{\theta^p}(C)\int_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f(x)|)\,dx\int_0^1\varphi\biggl(\frac{1}{C}M_{\theta^{-1}}(t^{-1})\biggr)\,dt^p\le C_2\int_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f(x)|)\,dx<\infty.$$

Из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 d\theta^p(Ct)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f^t(x)|(Ct)^{-1})\,dx$ следует, что интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f^t(x)|(Ct)^{-1})\,dx$ существует почти для всех $t>0$.

Применяя теорему 3, получаем для любой $f(x) \in L^0_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(\pi_\theta Tf(x))\,dx = \int\limits_0^\infty \lambda(\theta(\pi_\theta Tf); s)d(s^p) = \int\limits_0^\infty \lambda(\theta(\pi_\theta Tf); 3\theta(Ct))d(3^p\theta^p(Ct))$$
$$\leq 3^p K_\varphi \int\limits_0^\infty d\theta^p(Ct) \int\limits_{|f(x)|>t} \varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{Ct}\biggr)\,dx = 3^p K_\varphi C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(|f(x)|)\,dx.$$

Обозначим через β_k константу наилучшего приближения $\theta(\tilde g(x))$ в $L_\theta(Q_k)$, т. е. такое число, что $\int\limits_{Q_k} |\theta(\tilde g(x)) - \beta_k|\,dx = \inf\limits_{\beta\in R}\int\limits_{Q_k} |\theta(\tilde g(x)) - \beta|\,dx$. Для каждого куба Q_k покрытия имеем

$$|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k} |\theta(|\tilde g(x)|) - (\theta(|\tilde g|))_{Q_k}|\,dx$$
$$\leq 2|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k} \theta\biggl(\biggl|\,|\tilde g(x)| - |Q_k|^{-1}\biggl|\int\limits_{Q_k}\tilde g(y)\,dy\biggr|\,\biggr|\biggr)\,dx$$
$$\leq 2|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k} \theta\biggl(\biggl|\tilde g(x) - |Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k}\tilde g(y)\,dy\biggr|\biggr)\,dx.$$

Следовательно, $\theta^p(\tau_\theta Tf(x)) \leq 2^p\theta^p(\pi_\theta Tf(x))$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(\tau_\theta Tf(x))\,dx \leq 2^p\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(\pi_\theta Tf(x))\,dx \leq 6^p K_\varphi C_2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(|f(x)|)\,dx. \tag{14}$$

Согласно теореме Йона — Ниренберга [15] для любого куба $Q \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\operatorname{mes}\biggl\{x\in Q : \biggl|\theta(|Tf(x)|) - |Q|^{-1}\int\limits_Q \theta(|Tf(x)|)\,dx\biggr| > t\biggr\}$$
$$\leq A(n,p)t^{-p}\sup_{\{Q_i\}}\sum_i |Q_i|^{1-p}\biggl(\int\limits_{Q_i} |\theta(Tf(x)) - (\theta(Tf))_{Q_i}|\,dx\biggr)^p,$$

если конечна точная верхняя грань, взятая по всем покрытиям $\{Q_i\}$ куба Q попарно не перекрывающимися кубами.

Тогда для каждого покрытия $\{Q_k\}$ попарно не перекрывающимися кубами пространства $\mathbb{R}^n$ получаем

$$\operatorname{mes}\biggl\{x\in \mathbb{R}^n : \biggl|\theta(|Tf(x)|) - \sum_k \chi_{Q_k}(x)|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k} \theta(|Tf(x)|)\,dx\biggr| > t\biggr\}$$
$$= \sum_k \operatorname{mes}\biggl\{x\in Q_k : \biggl|\theta(|Tf(x)|) - |Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k} \theta(|Tf(x)|)\,dx\biggr| > t\biggr\}$$
$$\leq A(n,p)t^{-p}\sum_k\sup_{\{Q_{k,i}\}}\sum_i |Q_{k,i}|^{1-p}\biggl(\int\limits_{Q_{k,i}} |\theta(Tf(x)) - (\theta(Tf))_{Q_{k,i}}|\,dx\biggr)^p,$$

где символ $\{Q_{k,i}\}$ обозначает покрытие попарно не перекрывающимися кубами куба Q_k и точная верхняя грань в последней строке берется по всем покрытиям кубами $\{Q_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n$.

Учитывая (14) и неравенство

$$\sum_k \sum_i |Q_{k,i}|^{1-p}\biggl(\int\limits_{Q_{k,i}} |\theta(Tf(x)) - (\theta(Tf))_{Q_{k,i}}|\,dx\biggr)^p \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(\tau_\theta(Tf(x)))\,dx,$$

которое выполняется для любого покрытия $\{Q_k\}$ попарно не перекрывающимися кубами пространства $\mathbb{R}^n$ и соответствующих подпокрытий $\{Q_{k,i}\}$ каждого из этих кубов, имеем

$$\operatorname{mes}\biggl\{x\in\mathbb{R}^n : \biggl|\theta(|Tf(x)|) - \sum_k \chi_{Q_k}(x)|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k}\theta(|Tf(x)|)\,dx\biggr| > t\biggr\}$$
$$\le 6^p A(n,p)K_\varphi C_2 t^{-p}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f(x)|)\,dx. \tag{15}$$

Далее оценим среднее значение функции $\theta(|Tf(x)|)$ на любом кубе Q_k покрытия пространства $\mathbb{R}^n$. Сначала покажем, что $f(x)\in L^0_\varphi(\mathbb{R}^n)$. По условию функция $f(x)\in L^0_{\theta^p}(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель Ω и интеграл $\int_0^{|\Omega|} M_{\varphi(\theta^{-1})}(t^{-(1/p)})\,dt$ сходится. Тогда из оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx = \int\limits_{\Omega}\varphi(|f(x)|)\,dx \le \int\limits_0^{|\Omega|}\varphi(\theta^{-1}(\sup_{0<t<\infty}(\theta^p(f^*(t))t)^{1/p}t^{-(1/p)}))\,dt$$
$$\le p\varphi\left(\theta^{-1}\left(\left\{\int\limits_0^{|\Omega|}\theta^p(f^*(\tau))\,d\tau\right\}^{1/p}\right)\right)\int\limits_0^{|\Omega|^p} M_{\varphi(\theta^{-1})}(\tau^{-1})\tau^{p-1}\,d\tau$$

следует, что $f(x)\in L^0_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

С учетом полученной оценки для любого куба Q_k покрытия имеем

$$|Q_k|^{-1}\int\limits_{Q_k}\theta(|Tf(x)|)\,dx \le |Q_k|^{-1}\int\limits_0^\tau |Q_k|\,d\theta(t) + |Q_k|^{-1}\int\limits_\tau^\infty \lambda(\chi_{Q_k}Tf;t)\,d\theta(t)$$
$$\le \theta(\tau) + |Q_k|^{-1}\int\limits_\tau^\infty d\theta(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{t}\biggr)\,dx$$
$$\le \theta(\tau) + |Q_k|^{-1}\int\limits_\tau^\infty M_\varphi(t^{-1})\,d\theta(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(|f(x)|)\,dx \le \theta(\tau)$$
$$+ |Q_k|^{-1}\int\limits_\tau^\infty M_\varphi(t^{-1})\,d\theta(t)\int\limits_0^{|\Omega|} M_{\varphi(\theta^{-1}(t))}(t^{-(1/p)})\,dt$$
$$\times\varphi\left(\theta^{-1}\left(\left\{\int\limits_0^{|\Omega|}\theta^p(f^*(\tau))\,d\tau\right\}^{1/p}\right)\right) = \theta(\tau) + \eta(f;\tau).$$

Из условий теоремы о сходимости интегралов следует, что величина $\eta(f;\tau)$ конечная для всякого числа $\tau > 0$ и любого куба Q_k. Для заданного числа $t > 0$ всегда можно выбрать число τ и кубы Q_k покрытия $\mathbb{R}^n$ такого объема, чтобы для каждого из них выполнялось неравенство

$$|Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|Tf(x)|)\,dx \le \theta(\tau) + \eta(f;\tau) \le t.$$

Тогда

$$\operatorname{mes}\{x \in Q_k : \theta(|Tf(x)|) > 2t\} \le \operatorname{mes}\{x \in Q_k : |\theta(|Tf(x)|) - (\theta(Tf))_{Q_k}| > t\}$$

и, учитывая неравенство (15), получаем

$$\operatorname{mes}\{x \in \mathbb{R}^n : \theta(|Tf(x)|) > 2t\} \le \sum_k \operatorname{mes}\{x \in Q_k : |\theta(|Tf(x)|) - (\theta(|Tf|))_{Q_k}| > t\}$$
$$\le \operatorname{mes}\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \Big|\theta(|Tf(x)|) - \sum_k \chi_{Q_k}(x)|Q_k|^{-1} \int\limits_{Q_k} \theta(|Tf(x)|)\,dx\Big| > t\Big\}$$
$$\le 6^p A(n,p) K_\varphi C_2 t^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(|f(x)|)\,dx \le A_{\theta^p} t^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta^p(|f(x)|)\,dx.$$

Отсюда следует неравенство (13). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть положительная неубывающая на полуоси $(0,\infty)$ функция $\varphi(t)$ и вогнутая функция $\theta(t) \in \Phi$ таковы, что $\int_1^\infty M_\varphi(\tau^{-1})\,dM_\theta(\tau) < \infty$ и $\int_0^1 \varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\tau^{p-1}\,d\tau < \infty$ для некоторого числа $p > 1$. Кроме того, пусть выпуклая функция $\psi(t)$ из множества Φ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{1/2} \varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(\tau) + \int\limits_{1/2}^{\infty} \tau^{-p}\,dM_\psi(\tau) < \infty \tag{16}$$

и T — линейный оператор слабого типа (φ,φ), ограниченно действующий из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$.

Тогда существует такая постоянная $C_{\psi(\theta)} > 0$, что для всякой функции $f(x) \in L^0_\psi(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\theta(|Tf(x)|))\,dx \le C_{\psi(\theta)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\theta(|f(x)|))\,dx.$$

Доказательство. Пусть функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию теоремы, $f(x) \in L^0_\psi(\mathbb{R}^n)$ и $t > 0$. Представим $f(x)$ в виде суммы функций $f_{\theta^{-1}(t)}(x) + f^{\theta^{-1}(t)}(x)$, полагая $f_{\theta^{-1}(t)}(x) = f(x)$, если $|f(x)| \le \theta^{-1}(t)$, и $f_{\theta^{-1}(t)}(x) = 0$ в другом случае. Из условия (16) следует конечность функции $M_\psi(t)$ на всей полуоси $(0,\infty)$. Так как функция $M_\psi(t)$ полумультипликативная, то $\int_0^t dM_\psi(2\tau) \le$

$M_\psi(2)\int\limits_0^t dM_\psi(\tau)$ для любого $t>0$ и для интегралов от невозрастающей положительной функции $\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))$ выполняется неравенство

$$\int\limits_0^{1/2}\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(2\tau)\le M_\psi(2)\int\limits_0^{1/2}\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(\tau).$$

Из полученного неравенства, равенства $\int\limits_{1/2}^{\infty}\tau^{-p}\,dM_\psi(2\tau)=2^p\int\limits_1^\infty\tau^{-p}\,dM_\psi(\tau)$ и условия (16) следует сходимость интегралов $\int\limits_0^{1/2}\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(2\tau)$ и $\int\limits_{1/2}^{\infty}\tau^{-p}\,dM_\psi(2\tau)$. С учетом этого из соотношений

$$\int\limits_0^\infty t^{-p}\,d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f_{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx+\int\limits_0^\infty d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi([\theta^{-1}(2^{-1}t)]^{-1}|f^{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_0^{\theta(|f(x)|)}\varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{\theta^{-1}(2^{-1}t)}\biggr)\,d\psi(t)+\int\limits_{\mathbb{R}^n}dx\int\limits_{\theta(|f(x)|)}^{\infty}\theta^p(|f(x)|)t^{-p}\,d\psi(t)$$

$$\le\left\{\int\limits_0^{1/2}\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(2\tau)+2^{-p}\int\limits_{1/2}^{\infty}\tau^{-p}\,dM_\psi(2\tau)\right\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\theta(|f(x)|))\,dx$$

получаем, что интегралы

$$\int\limits_0^\infty t^{-p}\,d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f_{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx,\quad \int\limits_0^\infty d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi([\theta^{-1}(2^{-1}t)]^{-1}|f^{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx$$

также сходятся. Следовательно, почти для всех $t>0$ существуют интегралы $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f_{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi((\theta^{-1}(2^{-1}t))^{-1}|f^{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx$. Учитывая, что T — оператор слабого типа (φ,φ), функция $\theta(t)$ вогнутая, и применяя теорему 4, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\theta(|Tf(x)|))\,dx\le\int\limits_0^\infty\lambda(\theta(|Tf_{\theta^{-1}(t)}|);t/2)\,d\psi+\int\limits_0^\infty\lambda(\theta(|Tf^{\theta^{-1}(t)}|);t/2)\,d\psi(t)$$

$$\le 2^pA_{\theta^p}\int\limits_0^\infty t^{-p}\,d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta^p(|f_{\theta^{-1}(t)}(x)|)\,dx+A_\varphi\int\limits_0^\infty d\psi(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi\biggl(\frac{|f^{\theta^{-1}(t)}(x)|}{\theta^{-1}(2^{-1}t)}\biggr)\,dx.$$

Применяя доказанные неравенства, окончательно имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\theta(|Tf(x)|))\,dx\le\Biggl\{A_\varphi\int\limits_0^{1/2}\varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_\psi(2\tau)$$

$$+A_{\theta^p}\int\limits_{1/2}^{\infty}t^{-p}\,dM_\psi(2\tau)\Biggr\}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\theta(|f(x)|))\,dx=C_{\psi(\theta)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(\theta(|f(x)|))\,dx.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть положительная неубывающая на $(0,\infty)$ функция $\varphi(t)$ и вогнутая функция $\theta(t)\in\Phi$ такие, что $\int\limits_1^\infty M_\varphi(\tau^{-1})\,dM_\theta(\tau)<\infty$ и для некоторого числа $p>1$ интеграл $\int\limits_0^1 \varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\tau^{p-1}\,d\tau<\infty$ конечен.*

Если линейный оператор T является оператором слабого типа (φ,φ) и ограниченно действует из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$, а выпуклая функция $\psi_0(t)\in\Phi$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^1 \varphi(M_{\theta^{-1}}(\tau^{-1}))\,dM_{\psi_0(\theta^{-1})}(\tau)+\int\limits_1^\infty \tau^{-p}\,dM_{\psi_0(\theta^{-1})}(\tau)<\infty,$$

то существуют такие постоянные $N_{\psi_0}>0$, $B_1>0$, что для характеристической функции $\chi_E(x)$ произвольного множества E из $\mathbb{R}^n$ конечной меры Лебега и $t>0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n : |T\chi_E(x)|>t\}\le N_{\psi_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\biggl(-\frac{B_1 t}{2\chi_E(x)}\biggr)\psi_0\biggl(\frac{2\chi_E(x)}{t}\biggr)\,dx. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E конечной меры и функция $\psi_0(t)$ удовлетворяет условиям теоремы. Полагая в теореме 5 $\psi(t)=\psi_0(\theta^{-1}(t))$, получаем для любого $t>0$ неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_0\biggl(\frac{|T\chi_E(x)|}{t}\biggr)\,dx\le C_{\psi_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_0\biggl(\frac{\chi_E(x)}{t}\biggr)\,dx. \tag{18}$$

Пусть $t>0$. Применяя к функции $\psi_0\bigl(\frac{|T\chi_E(x)|}{t}\bigr)$ лемму Кальдерона — Зигмунда [16], получаем такую последовательность попарно не перекрывающихся кубов $\{Q_{x_k,r_k}\}$, что $|T\chi_E(x)|\le t$ почти всюду на $\mathbb{R}^n-\bigl(\bigcup\limits_k Q_{x_k,r_k}\bigr)$ и для каждого куба

$$|Q_{x_k,2r_k}|^{-1}\int\limits_{Q_{x_k,2r_k}}\psi_0\biggl(\frac{|T\chi_E(x)|}{t}\biggr)\,dx\le\psi_0(1)\le|Q_{x_k,r_k}|^{-1}\int\limits_{Q_{x_k,r_k}}\psi_0\biggl(\frac{|T\chi_E(x)|}{t}\biggr)\,dx.$$

Учитывая, что $\psi_0(t)$ — выпуклая функция, и применяя неравенство Йенсена [14], имеем

$$(t^{-1}T\chi_E)_{Q_{x_k,r_k}}\le\psi_0^{-1}\biggl(|Q_{x_k,2r_k}|^{-1}\int\limits_{Q_{x_k,2r_k}}\psi_0\biggl(\frac{|T\chi_E(x)|}{t}\biggr)\,dx\biggr)\le 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n : |T\chi_E(x)|>2t\}&=\operatorname{mes}\Bigl\{(x\in\mathbb{R}^n : |T\chi_E(x)|>2t)\cap\Bigl(\bigcup_k Q_{x_k,2r_k}\Bigr)\Bigr\}\\&\le\sum_{k=1}^\infty\operatorname{mes}\{(x\in\mathbb{R}^n : |T\chi_E(x)-(T\chi_E)_{Q_{x_k,2r_k}}|>t)\cap Q_{x_k,2r_k}\}.\end{aligned} \tag{19}$$

По теореме Йона — Ниренберга [15] найдутся такие постоянные величины $C_3>0$, $B_0>0$ (не зависящие от t и χ_E), что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^\infty\operatorname{mes}\{(x\in\mathbb{R}^n : |T\chi_E(x)-(T\chi_E))_{Q_{x_k,2r_k}}|>t)\cap Q_{x_k,2r_k}\}\\&\qquad\le C_3\exp\bigl(-B_0 t\|T\chi_E\|^{-1}_{BMO(\mathbb{R}^n)}\bigr)\sum_{k=1}^\infty|Q_{x_k,2r_k}|.\end{aligned} \tag{20}$$

Учитывая ограниченность оператора T из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$ и неравенство (18), имеем

$$\exp\bigl(-B_0t\|T\chi_E\|^{-1}_{BMO(\mathbb{R}^n)}\bigr)\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{x_k,2r_k}|\le 2^n\exp\bigl(-B_1t\|\chi_E\|^{-1}_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}\bigr)\sum_{k=1}^{\infty}|Q_{x_k,r_k}|$$
$$\le\frac{2^nC_{\psi_0}}{\psi_0(1)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\biggl(-\frac{B_1t}{\chi_E(x)}\biggr)\psi_0\biggl(\frac{\chi_E(x)}{t}\biggr)\,dx.\qquad(21)$$

Из доказанных неравенств (19)–(21) получаем неравенство (17) для любого множества E конечной меры Лебега и всякого $t>0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Если обозначить $\varphi_1(t)=e^{-(B_1/2t)}\psi_0(2t)$, то неравенство (17) запишется в виде

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n:|T\chi_E|>t\}\le N_{\psi_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi_1\biggl(\frac{\chi_E(x)}{t}\biggr)\,dx.$$

Теорема верна для всех выпуклых функций $\psi_0(t)\in\Phi$ с показателями растяжения, удовлетворяющими условию $\delta_\varphi<\gamma_{\psi_0}\le\delta_{\psi_0}<\infty$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда существуют такие положительные постоянные $C_4(\psi_0)>0$ и $C_5(\psi_0)>0$, что для характеристической функции $\chi_E(x)$ любого множества E конечной меры Лебега из пространства $\mathbb{R}^n$ и $t>0$ выполняется неравенство*

$$(T\chi_E)^*(t)\le C_4(\psi_0)\left\{\int\limits_0^t\chi_E^*(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr)+\int\limits_t^\infty\chi_E^*(\tau)\tau^{-1}\,d\tau\right\},\qquad(22)$$

а в случае сходимости интеграла $\int\limits_0^1 M_{\psi_0^{-1}}(t^{-1})\,dt$ — неравенство

$$(T\chi_E)^{**}(t)\le C_5(\psi_0)\left\{\int\limits_0^t\chi_E^*(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr)+\int\limits_t^\infty\chi_E^*(\tau)\tau^{-1}\,d\tau\right\}.\qquad(23)$$

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что для характеристической функции $\chi_E(x)$ множества E конечной меры Лебега $|E|$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{x\in\mathbb{R}^n:|T\chi_E(x)|>t\}\le N_{\psi_0}\exp(-2^{-1}B_1t)\psi_0(2t^{-1})|E|$$
$$\le A_1(\psi_0)\begin{cases}\frac{1}{\psi_0(B_1)}\psi_0(2t^{-1})|E|, & 0<t\le\frac{2}{B_1},\\ \exp(1-2^{-1}B_1t)|E|, & \frac{2}{B_1}<t<\infty,\end{cases}$$

где $A_1(\psi_0)=N_{\psi_0}\psi_0(B_1)/e$. В случае $A_1(\psi_0)\ge1$ имеем

$$(T\chi_E)^*(t)\le 2B_1^{-1}(1-\ln t+\ln A_1(\psi_0)|E|),\quad\text{если } 0<t\le A_1(\psi_0)|E|,$$
$$(T\chi_E)^*(t)\le 2\bigl[\psi_0^{-1}([A_1(\psi_0)|E|]^{-1}\psi_0(B_1)t)\bigr]^{-1},\quad\text{если } A_1(\psi_0)|E|<t<\infty.$$

Пусть число t удовлетворяет неравенству $0<t<|E|$. Тогда

$$(T\chi_E)^*(t)\le\frac{2}{B_1}\biggl(1-\ln\frac{t}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)=\frac{2}{B_1}\left(1+\int\limits_t^{A_1(\psi_0)|E|}\tau^{-1}\,d\tau\right)$$
$$\le\frac{2}{B_1}\left((1+\ln A_1(\psi_0))\psi_0^{-1}(1)\int\limits_0^t\chi_E^*(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr)+\int\limits_t^\infty\chi_E^*(\tau)\tau^{-1}\,d\tau\right).$$

В случае $|E| < t \le A_1(\psi_0)|E|$ имеем

$$(T\chi_E)^*(t) \le \frac{2}{B_1}\psi_0^{-1}(1)M_{\psi^{-1}}(A_1(\psi_0))(1+\ln A_1(\psi_0))\int\limits_0^t \chi_E^*(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr).$$

Если $t > A_1(\psi_0)|E|$, то

$$(T\chi_E)^*(t) \le 2\biggl[\psi_0^{-1}\biggl(\frac{\psi_0(B_1)t}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\biggr]^{-1} \le 2M_{\psi_0^{-1}}\biggl(\frac{A_1(\psi_0)}{\psi_0(B_1)}\biggr)\int\limits_0^t \chi_E(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr).$$

Неравенство (22) доказано. Докажем неравенство (23). Пусть для функции растяжения $M_{\psi_0^{-1}}(t)$ функции $\psi_0^{-1}(t)$ выполняется условие теоремы $\int_0^1 M_{\psi_0^{-1}}(y^{-1})\,dy < \infty$. В случае $0 < t \le A_1(\psi_0)|E|$ имеем

$$\int\limits_0^t (T\chi_E)^*(t)\,d\tau \le \frac{2}{B_1}\int\limits_0^t \biggl(1-\ln\frac{t}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\,d\tau \le \frac{2}{B_1}t\biggl(2-\ln\frac{t}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr).$$

Отсюда следует, что

$$(T\chi_E)^{**}(t) = t^{-1}\int\limits_0^t (T\chi_E)^*(z)\,dz \le \frac{4}{B_1}(1-\ln t+\ln(A_1(\psi_0)|E|)).$$

Повторяя далее рассуждения, примененные при доказательстве неравенства (22) в случае $0 < t \le A_1(\psi_0)|E|$, получаем требуемое неравенство.

Пусть $t > A_1(\psi_0)|E|$, тогда

$$(T_{\chi_E})^{**}(t) \le \frac{2}{B_1 t}\int\limits_0^{A_1(\psi_0)|E|}\biggl(1-\ln\frac{t}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\,d\tau + \frac{2}{t}\int\limits_{A_1(\psi_0)|E|}^t \biggl[\psi_0^{-1}\biggl(\frac{\psi_0(B_1)\tau}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\biggr]^{-1}\,d\tau.$$

После замены переменной во втором интеграле приходим к неравенствам

$$\frac{2}{t}\int\limits_{A_1(\psi_0)|E|}^t \biggl[\psi_0^{-1}\biggl(\frac{\psi_0(B_1)\tau}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\biggr]^{-1}\,d\tau \le 2\int\limits_{A_1(\psi_0)|E|t^{-1}}^1 \biggl[\psi_0^{-1}\biggl(\frac{\psi_0(B_1)ty}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\biggr]^{-1}\,dy$$
$$\le 2M_{\psi_0^{-1}}\biggl(\frac{A_1(\psi_0)}{\psi_0(B_1)}\biggr)\int\limits_0^1 M_{\psi_0^{-1}}\biggl(\frac{1}{y}\biggr)\,dy\frac{1}{\psi_0^{-1}(t|E|^{-1})}.$$

Так как для вогнутой функции $\psi^{-1}(t)$ (обратной к выпуклой функции $\psi(t)$) выполняется неравенство $\psi_0^{-1}(t|E|^{-1}) \le \psi_0^{-1}(1)t|E|^{-1}$ для всех $t > |E|$, то

$$\frac{2}{B_1 t}\int\limits_0^{A_1(\psi_0)|E|}\biggl(1-\ln\frac{\tau}{A_1(\psi_0)|E|}\biggr)\,d\tau \le \frac{4A_1(\psi_0)|E|}{B_1 t} \le \frac{4A_1(\psi_0)}{B_1}\frac{\psi_0^{-1}(1)}{\psi_0^{-1}(t|E|^{-1})}.$$

Учитывая полученные неравенства и сходимость интеграла $\int_0^1 M_{\psi_0^{-1}}(t^{-1})\,dt$, имеем

$$(T\chi_E)^{**}(t) \le 2\biggl(\frac{2}{B_1}A_1(\psi_0)+KM_{\psi_0^{-1}}\biggl(\frac{A_1(\psi_0)}{\psi_0(B_1)}\biggr)\biggr)\int\limits_0^t \chi_E(\tau)\,d\biggl(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\biggr).$$

Теорема доказана в случае, когда $A_1(\psi_0)\ge 1$.

Если верно неравенство $0<A_1(\psi_0)<1$, то для любого $t\in(0,A_1(\psi_0)|E|)$

$$(T\chi_E)^*(t)\le \frac{2}{B_1}\left(1+\ln\frac{A_1(\psi_0)|E|}{t}\right)$$
$$\le \frac{2}{B_1}\left\{\psi_0^{-1}(1)\int\limits_0^t \chi_E^*(\tau)\,d\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\right)+\int\limits_t^\infty \chi_E^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

В случае $t>A_1(\psi_0)|E|$ имеем

$$(T\chi_E)^*(t)\le 2M_{\psi_0^{-1}}\left(\frac{1}{\psi_0(B_1)}\right)\left[\psi_0^{-1}\left(\frac{t}{A_1(\psi_0)|E|}\right)\right]^{-1}$$
$$\le 2M_{\psi_0^{-1}}\left(\frac{1}{\psi_0(B_1)}\right)\int\limits_0^t \chi_E(\tau)\,d\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\right).$$

Оценка для $(Tf)^{**}(t)$ устанавливается так же, как и в случае, когда $A_1(\psi_0)\ge 1$. Пусть $0<t\le A_1(\psi_0)|E|$, тогда

$$(T\chi_E)^{**}(t)\le \frac{2}{B_1}\left\{2\psi_0^{-1}(1)\int\limits_0^t \chi_E^*(\tau)\,d\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(t\tau^{-1})}\right)+\int\limits_t^\infty \chi_E^*(\tau)\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

Если $t>A_1(\psi_0)|E|$, то

$$(T\chi_E)^{**}(t)\le\left[\frac{4\psi_0^{-1}(1)}{B_1}+2M_{\psi_0^{-1}}\left(\frac{1}{\psi_0(B_1)}\right)\int\limits_0^1 M_{\psi_0^{-1}}\left(\frac{1}{u}\right)du\right]\left[\psi_0^{-1}\left(\frac{t}{|A_1(\psi_0)E|}\right)\right]^{-1}.$$

Учитывая сходимость интеграла $\int\limits_0^1 M_{\psi_0^{-1}}(t^{-1})\,dt$, получаем неравенство (23).

Теорема доказана.

Замечание 3. Установленная в теореме оценка (23) справедлива для функций $f(x)=\sum\limits_{n=1}^n c_k\chi_{E_k}(x)$, принимающих ненулевые значения c_k на множествах конечной меры Лебега E_k, $k=\overline{1,n}$. Отметим, что в случае $\psi_0(t)=t^p$, $0<p<\infty$, операторы, удовлетворяющие неравенству (22), исследовались в работе [5].

Следствие 2. *Пусть функции $\varphi(t)$, $\theta(t)$, $\Psi_0(t)$ и линейный оператор T удовлетворяют условиям теоремы 7, а $E(\mathbb{R}^n)$ является таким симметричным сепарабельным пространством, что для нормы оператора растяжения $\|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E}$ выполняется условие*

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E}\,d\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(\tau^{-1})}\right)+\int\limits_1^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E}\tau^{-1}\,d\tau<\infty.$$

Тогда существует такая постоянная $C_6>0$, что для любой $f\in E(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|(Tf)^{**}\|_E\le C_6\|f\|_E. \tag{24}$$

Доказательство. Согласно замечанию 3 для любой конечнозначной функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x)$ приходим к неравенству

$$(Tf)^{**}(t) \le C_5(\psi_0) \left\{ \int\limits_0^t f^*(z)\, d\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(tz^{-1})} \right) + \int\limits_t^\infty f^*(z) z^{-1}\, dz \right\}.$$

Сделав замену переменных в интегралах и применяя лемму 4.7 из работы [12], устанавливаем неравенство (24). Утверждение теоремы следует из условия плотности в симметричном сепарабельном пространстве множества конечнозначных функций.

Следствие 3. *Пусть функция $\varphi(t)$ из множества Φ имеет показатели растяжения $\gamma_\varphi, \delta_\varphi \in (0,1]$. Пусть число $v \in (0,1)$ и симметричное сепарабельное пространство $E(\mathbb{R}^n)$ таковы, что для нормы оператора растяжения $\|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E}$ выполняется условие*

$$\int\limits_0^1 \|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E} \tau^{v-1}\, d\tau + \int\limits_1^\infty \|\sigma_{1/\tau}\|_{E\to E} \tau^{-1}\, d\tau < \infty.$$

Пусть T — линейный оператор слабого типа (φ,φ), ограниченно действующий из пространства $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ в пространство $BMO(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует такая постоянная $C_7 > 0$, что для всех $f(x) \in E(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|(Tf)^{**}\|_E \le C_7 \|f\|_E.$$

Доказательство. Согласно замечанию 2 теорема 7 верна для любой выпуклой функции $\psi_0(t)$ из множества Φ с показателями растяжения $\gamma_{\psi_0}, \delta_{\psi_0} \in (1,\infty)$. Полагая $\psi_0(t) = t^{1/v}$ и применяя следствие 2, получаем требуемое утверждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stampacchia G.* The spaces $L^{(p,\lambda)}$, $N^{(p,\lambda)}$ and interpolation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Ser. III. 1965. V. 19, N 3. P. 443–462.
2. *Campanato S.* Su un teorema di interpolazione di G. Stampaccia // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1966. V. 20, N 3. P. 649–652.
3. *Spanne S.* Sur l'interpolation entre les espaces $L_k^{p,\varphi}$ // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1966. V. 20, N 3. P. 625–648.
4. *Riviere N. M.* Interpolation a la Marcinkiewicz // Rev. Mat. Argentina. 1971. V. 25. P. 363–377.
5. *Bennett C., Rudnick K.* On Lorentz–Zygmund spaces. Warszawa: Panstw. Wydawn. Nauk, 1980.
6. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
8. *Hunt R. A.* On $L(p,q)$ spaces // L'Ens. Math. 1966. V. 12. P. 249–275.
9. *Calderon A. P.* Spaces between L_1 and L_∞ and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math. 1966. V. 26, N 3. P. 273–299.
10. *Riviere N. M.* Singular integrals and multiplier operators // Arkiv För Mat. 1971. V. 9, N 2. P. 243–278.
11. *Dmitriev V. I., Krein S. G.* Interpolation of operators of weak type // Anal. Math. 1978. V. 4, N 2. P. 83–99.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

13. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
14. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
15. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14, N 3. P. 415–426.
16. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 19 мая 2006 г., окончательный вариант — 29 декабря 2006 г.

Пелешенко Борис Игнатьевич
Днепропетровский гос. агроуниверситет, кафедра высшей математики
ул. Ворошилова, 25, Днепропетровск 49027, Украина
dsaupelesh@mail.ru