*Сибирский математический журнал*
*Март—апрель, 2008. Том 49, № 2*

*УДК 512.54*

# О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМ МНОЖЕСТВОМ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

**Д. В. Лыткина, Л. Р. Тухватуллина, К. А. Филиппов**

**Аннотация.** Пусть $\mathfrak{M}$ — множество, элементами которого являются простые трехмерные унитарные группы $U_3(q)$ или линейные группы $L_3(q)$ над конечными полями. Доказывается, что периодическая группа, насыщенная группами из конечного подмножества множества $\mathfrak{M}$, конечна.

**Ключевые слова:** насыщенность группы множеством групп, периодическая группа.

**Введение.** Говорят, что группа $G$ *насыщена* группами из множества групп $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из $G$ содержится в подгруппе группы $G$, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$. Пусть группа $G$ насыщена группами из множества групп $\mathfrak{R}$ и для любого $X \in \mathfrak{R}$ в $G$ найдется подгруппа $L$, изоморфная $X$. В этом случае будем говорить, что $G$ *насыщена множеством групп* $\mathfrak{R}$, а само множество $\mathfrak{R}$ называть *насыщающим множеством групп для* $G$.

В [1] высказана гипотеза о том, что периодическая группа, насыщенная группами из конечного множества $\mathfrak{R}$ конечных неабелевых простых групп, конечна. Эта гипотеза получила подтверждение в случае, когда любой элемент из $\mathfrak{R}$ является конечной простой группой, в централизаторе силовской 2-подгруппы которой не содержатся элементы нечетного порядка большего трех [1], а также в случаях $\mathfrak{R} = \{U_3(9)\}$ [2], $\mathfrak{R} = \{L_3(11)\}$ [3] и $\mathfrak{R} = \{L_3(27)\}$ [4].

Пусть $\delta$ — переменная, принимающая значения $+$ или $-$. Через $L_3^{\delta}(p^n)$ обозначается группа $L_3(p^n)$, если $\delta = +$, и группа $U_3(p^n)$, если $\delta = -$.

**Теорема.** *Пусть периодическая группа $G$ насыщена группами из множества $\mathfrak{R} = \left\{L_3^{\delta_i}\left(p_i^{n_i}\right) \mid i = 1, 2, \dots, m\right\}$. Тогда группа $G$ изоморфна группе $L_3^{\delta_j}\left(p_j^{n_j}\right)$ для некоторого $1 \le j \le m$.*

**Предварительные результаты.** Нам потребуются следующие свойства групп $L_3(p^n) = SL_3(p^n)/Z(SL_3(p^n))$ и $U_3(p^n) = SU_3(p^n)/Z(SU_3(p^n))$. Под записью «матрица $a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$» мы будем подразумевать «элемент $aZ$», где $Z$ — центр группы $SL_3(p^n)$ или $SU_3(p^n)$ (из контекста будет ясно, о какой группе идет речь).

**Предложение 1.** *Пусть $L = L_3(p^n)$, где $p$ — нечетное простое число. Тогда*

1. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in GF(p^n) \right\}$ — *силовская $p$-подгруппа группы $L$ и $N_L(S) = S \leftthreetimes D$, где $D = \langle t_1 \rangle \times \langle t_2 \rangle$ и* $t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, $|\beta| = p^n - 1$, $|t_1| = p^n - 1$, $|t_2| = (p^n - 1)/(3, p^n - 1)$.

2. $N_L(D) = D \leftthreetimes V$, *где* $V = \langle b, w \rangle = \{b, w \mid b^3 = w^2 = 1, b^w = b^{-1}\}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. *Для любого элемента $d \in D$ выполняется $|db| = 3$.*

4. *Пусть $A = \langle i \rangle \times \langle j \rangle$, где* $i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — *инволюция из $\langle t_1 \rangle$,* $j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — *инволюция из $\langle t_2 \rangle$. Тогда $A$ — четверная группа, т. е. элементарная абелева группа порядка 4, $N_L(A) = C_L(A) \leftthreetimes V$, квадраты элементов, порядок которых не равен трем, содержатся в $C_L(A)$ и $C_L(A) = D$.*

5. *Все четверные подгруппы из $L$ сопряжены с $A$, в $L$ существует элемент порядка 8 и любая абелева секция силовской 2-подгруппы из $L$ порождается двумя элементами.*

Доказательство. Пп. 1, 2 хорошо известны. П. 3 легко доказывается элементарным перемножением матриц.

Докажем п. 4. Включение $C_L(A) \leftthreetimes V \subseteq N_L(A)$ очевидно. Докажем обратное включение. Действительно, возьмем элемент $1 \neq x \in N_L(A)$. Если $x \in C_L(A)$, то все доказано. Пусть $x \notin C_L(A)$. Тогда $a^x = a^v$ для некоторого фиксированного $v \in V$ и любого $a \in A$. Следовательно, $a^{xv^{-1}} = a$ для всех $a \in A$, т. е. $xv^{-1} = c \in C_L(A)$ или $x = cv \in C_L(A) \leftthreetimes V$.

Докажем, что $C_L(A) = D$. Пусть $c \in C_L(A)$ и $c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Тогда $ic = ci$ и $jc = cj$. В самом деле,

$$ic = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix} = ci = \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ c_{21} & -c_{22} & -c_{23} \\ c_{31} & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $c = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$. Теперь

$$jc = \begin{pmatrix} -c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & -c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix} = cj = \begin{pmatrix} -c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & -c_{23} \\ 0 & c_{32} & -c_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда $c = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$, т. е. $c \in D$ и $C_L(A) = D$.

Пусть $x \in N_L(A)$ и $|x| \neq 3$. Если $x \in D$, то $x^2 \in D$. Пусть $x \notin D$. Поскольку $N_L(A)$ — множество мономиальных матриц, то в этом случае $x$ может быть только матрицей одного из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что квадраты этих матриц являются диагональными матрицами.

П. 5 доказан в [5].

**Предложение 2.** *Пусть $U = U_3(p^n)$, где $p$ — нечетное простое число, $SU_3(p^n)$ — подгруппа унитарных матриц из $SL_3(p^{2n})$, т. е. таких матриц $s \in SL_3(p^{2n})$, для которых выполняется равенство $s \cdot \bar{s}^T = 1$, где $\bar{s}^T$ — матрица, полученная из $s$ транспонированием и заменой всех ее элементов $s_{ij}$ сопряженными им элементами $\bar{s}_{ij} = \varphi(s_{ij})$, где $\varphi$ — автоморфизм порядка 2 поля $GF(p^{2n})$. Тогда*

1) *$U_3(p^n) = SU_3(p^n)/Z(SU_3(p^n)) \subset L_3(p^{2n}) = SL_3(p^{2n})/Z(SL_3(p^{2n}))$;*

2) *группы $A$ и $V$ из предложения 1 содержатся в $U$;*

3) *все четверные подгруппы из $U$ сопряжены с $A$, в $U$ существует элемент порядка 8 и любая абелева секция силовской 2-подгруппы из $U$ порождается двумя элементами.*

Доказательство. П. 1 хорошо известен.

Докажем п. 2. Пусть $\alpha, \beta \in GF(p^n)$, $q$ — корень неприводимого многочлена второй степени над полем $GF(p^n)$. Тогда $x = \alpha + \beta q \in GF(p^{2n})$. Под сопряжением будем понимать автоморфизм $\varphi$ порядка 2: $\alpha + \beta q \mapsto \alpha - \beta q$, который сопоставляет каждому элементу $x = \alpha + \beta q$ поля $GF(p^{2n})$ сопряженный с ним элемент $\bar{x} = \alpha - \beta q$ и $\bar{\alpha} = \alpha$ для любого $\alpha \in GF(p^n)$. Тогда $\overline{0} = 0$, $\overline{1} = 1$, $\overline{-1} = -1$ и для любой матрицы $s$ из $A$ или $V$ выполняется $s \cdot \bar{s}^T = 1$.

П. 3 доказан в [5].

**Предложение 3.** *Если $S$ — силовская 2-подгруппа группы $L_3^\delta(2^n)$, то период $S$ равен 4 и $S$ содержит элементарную абелеву секцию порядка $2^{2n}$.*

**Предложение 4** (теорема Шункова [6]). *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Следующие два результата принадлежат Шункову, и их доказательство можно найти в диссертациях [7] и [8], но поскольку диссертации существуют лишь в единичных экземплярах, мы эти доказательства повторяем здесь.

**Предложение 5.** *В бесконечной 2-группе $T$ любая конечная подгруппа отлична от своего нормализатора. В частности, $T$ содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $T$ — 2-группа и $K$ — ее собственная конечная подгруппа такая, что $N_T(K) = K$. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ множество всех конечных подгрупп группы $T$, не лежащих в подгруппе $K$. Пусть $n$ максимальное из множества $\{|K \cap X| \mid X \in \mathfrak{Y}\}$ и $Y$ — элемент из $\mathfrak{Y}$ такой, что $n = |K \cap Y|$. Положим $D = K \cap Y$. В силу нормализаторного условия в конечных группах [9] найдутся такие $v \in N_K(D) \setminus D$ и $w \in N_Y(D) \setminus D$, что $v^2 \in D$ и $w^2 \in D$. Конечная группа $M = \langle v, w, D \rangle$, очевидно, не лежит в $K$, а значит, $M \in \mathfrak{Y}$. Но $M \cap K \supset \langle v, D \rangle$ и, следовательно, $|M \cap K| >$

$|D| = n$, что противоречит выбору $n$. Полученное противоречие означает, что конечная подгруппа $K$ отлична от своего нормализатора. Возьмем в $N_T(K) \setminus K$ элемент $x_1$. Группа $R_1 = K \leftthreetimes \langle x_1 \rangle$ конечна и отлична от своего нормализатора. Возьмем в $N_T(R_1) \setminus R_1$ элемент $x_2$. Группа $R_2 = R_1 \leftthreetimes \langle x_2 \rangle$ также конечна. Действуя подобным образом, получаем цепочку вложенных конечных подгрупп $R_1 < R_2 < \dots < R_i < \dots$, объединение $\bigcup R_i$ которой есть бесконечная локально конечная группа. Предложение доказано.

**Предложение 6.** *Если в периодической группе $T$ некоторая силовская 2-подгруппа конечна, то все силовские 2-подгруппы из $T$ конечны и сопряжены.*

Доказательство. Предположим обратное, и пусть $R$ — конечная силовская 2-подгруппа группы $T$. Пусть $\mathfrak{Y} = \{R^g \mid g \in T\}$ и $\mathfrak{M}$ — множество всех силовских 2-подгрупп группы $T$, не сопряженных с $R$. Выберем такие $X \in \mathfrak{Y}$ и $Y \in \mathfrak{M}$, что число $m = |X \cap Y|$ принимает максимально возможное значение. Используя нормализаторное условие в конечных 2-группах и предложение 5, выберем элементы $x \in N_X(D) \setminus D$ и $y \in N_Y(D) \setminus D$, где $D = X \cap Y$, такие, что $x^2, y^2 \in D$. В конечной группе $K = \langle x, y, D \rangle$ все силовские 2-подгруппы сопряжены, и пусть $S$ одна из них. Так как $S$ вкладывается в какую-либо силовскую 2-подгруппу группы $T$, то $S \subset Z$, где $Z$ принадлежит одному из множеств $\mathfrak{Y}$ или $\mathfrak{M}$. Но в первом случае $Z^g \cap Y \supset \langle x, D \rangle$ и $|Z^g \cap Y| > m$ для некоторого $g \in K$, а во втором случае $Z^g \cap X \supset \langle y, D \rangle$ для некоторого $g \in K$ и снова $|Z^g \cap X| > m$. В обоих случаях приходим к противоречию с выбором $m$. Предложение доказано.

**Предложение 7** [10]. *Пусть $a$ — расщепляющий автоморфизм порядка 3 группы $X$. Тогда группа $X$ нильпотентна.*

Доказательство теоремы. Пусть $G$ — контрпример к теореме.

Нетрудно убедиться, что в этом случае ($\Re$ конечно) силовская 2-подгруппа $S$ группы $G$ конечна. Действительно, если предположить, что силовская 2-подгруппа $S$ группы $G$ бесконечна, то по предложению 5 в $S$ есть бесконечная локально конечная подгруппа $H$ и в $H$ найдется конечная подгруппа, порядок которой превосходит порядок максимальной по порядку группы из $\Re$, что невозможно. Тогда по предложению 6 и все силовские 2-подгруппы из $G$ конечны и сопряжены. Понятно, что каждая 2-подгруппа из $G$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе группы $G$. В силу конечности $S$ содержится в некоторой подгруппе $M < G$, где $M$ изоморфна группе $L_3^\delta(p_*^{n_*}) \in \Re$, и, очевидно, является силовской 2-подгруппой группы $M$. Зафиксируем обозначения подгрупп $M$, $S$, числа $p_*$ и обозначим через $S_k$ силовскую 2-подгруппу подгруппы $M_k \simeq L_3^\delta(p_k^{n_k})$ из $G$ ($M_k \neq M$). Для всех $k = \overline{1, m-1}$ должно выполняться с точностью до сопряжения включение $S_k \subset S$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $M = L_3^\delta(p_*^{n_*})$, где $p_* = 2$. Предположим, что $p_k > 2$ для некоторого $k = \overline{1, m-1}$. Тогда в $M_k$ есть элемент порядка 8 (предложения 1(5), 2(3)), а в $M$ его нет (предложение 3). Тем самым в этом случае $p_k = 2$ для всех $k$ и заключение теоремы вытекает из [1].

2. $M = L_3^\delta(p_*^{n_*})$, где $p_* > 2$. Тогда $S = S^* \leftthreetimes \langle b \rangle$, где подгруппа $S^* = S \cap SL_2(p_*^{n_*})$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы $SL_2(p_*^{n_*})$, $b \in GL_2(p_*^{n_*})$ и $|b| = (p_*^{n_*} - \delta 1)_2$. Значит, в $S$ максимальная элементарная абелева подгруппа — четверная группа, и, в частности, таковой будет группа $\langle x \rangle \times \langle y \rangle$, где $x$, $y$ — инволюции из $S^*$ и $\langle b \rangle$ соответственно. Если $p_k = 2$ для некоторого $k = \overline{1, m-1}$, то $S_k$ содержит элементарную абелеву секцию порядка $2^{2n_k}$ (предложение 3). Поэтому включение $S_k \subset S$, когда $p_k = 2$, а $p_* > 2$, возможно только в случае

$M_k = L_3(2) \simeq L_2(7) \subseteq L_3(7)$.

Итак, можно считать, что либо все $p_k$ нечетны, либо $p_r = 2$ лишь для одного $r \neq k$ и в этом случае $M_r \simeq L_3(2) \simeq L_2(7)$. Отметим, что в $L_2(7)$ любая четверная подгруппа совпадает со своим централизатором, а ее нормализатор изоморфен $A_4$ — знакопеременной группе степени 4.

**Лемма 1.** *Любая локально конечная подгруппа группы $G$ конечна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $H$ — бесконечная локально конечная подгруппа группы $G$. Тогда в $H$ есть конечная подгруппа, порядок которой превосходит порядок максимальной по порядку группы из $\Re$, что противоречит условию насыщенности. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения из формулировки предложений 1 и 2.

**Лемма 2.** *Пусть $A$ — группа из предложения* 1(4). *Тогда $C_G(A)$ — бесконечная не локально конечная группа.*

Доказательство. Пусть $i$ — инволюция из $A$. Ее централизатор $C = C_G(i)$ является бесконечной не локально конечной группой. Действительно, в противном случае группа $G$ локально конечна по предложению 4 и, более того, конечна по лемме 1, что противоречит нашему предположению. Пусть $j$ — инволюция из $A$, отличная от $i$. Тогда $C_C(j)$ также является бесконечной не локально конечной группой, поскольку в противном случае группа $C$ будет конечной группой. Так как $A = \langle i\rangle \times \langle j\rangle$, то $C_C(j) \subseteq C_G(A)$ и $C_G(A)$ — бесконечная не локально конечная группа. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *$N_G(A) = C_G(A) \leftthreetimes V$, где $V = \langle b, w\rangle$ — группа из предложения* 1(2).

Доказательство. Включение $C_G(A) \leftthreetimes V \subseteq N_G(A)$ очевидно. Докажем обратное включение. Действительно, возьмем элемент $1 \neq x \in N_G(A)$. Если $x \in C_G(A)$, то все доказано. Пусть $x \notin C_G(A)$. Тогда $a^x = a^v$ для некоторого фиксированного $v \in V$ и любого $a \in A$. Следовательно, $a^{xv^{-1}} = a$ для всех $a \in A$, т. е. $xv^{-1} = c \in C_G(A)$ или $x = cv \in C_G(A) \leftthreetimes V$. Лемма доказана.

**Лемма 4.** *$|db| = 3$ для любого элемента $d$ из $C_G(A)$.*

Доказательство. Возьмем неединичный элемент $d \in C_G(A)$. Предположим противное, и пусть $|db| \neq 3$. Группа $H = \langle A, db\rangle$ конечна и содержится в некоторой подгруппе $L$ группы $G$, изоморфной $L_3^\delta(p^n) \in \Re$. Если $L \simeq L_3(2)$, то $|db| = 3$, поэтому, не ограничивая общности, можем считать, что $L = L_3^\delta(p^n)$, $p > 2$, а группа $A \subset H \subset L$ совпадает с группой $A$ из предложения 1(4), так как в $L_3^\delta(p^n)$ все четверные группы сопряжены (предложения 1(5) и 2(3)). Если $|db| \neq 3$, то $(db)^2 \in C_L(A)$ (предложение 1(4)) и $a^{dbdb} = a^{bdb} = a^{d^{b^{-1}}b^2} = a^{b^2} = a$, что противоречит тому, что $\langle b\rangle \cap C_G(A) = 1$. Следовательно, $|db| = 3$. Лемма доказана.

По лемме 4 и предложению 7 подгруппа $C_G(A)$ нильпотентна и, следовательно, локально конечна, что противоречит утверждению леммы 2. Таким образом, наше предположение о бесконечности группы $G$ неверно. Следовательно, $G$ — конечная группа, и из условия насыщенности вытекает, что $G$ изоморфна одной из групп множества $\Re$. Теорема доказана.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Шлепкин А. К., Рубашкин А. Г.* О группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 42, № 6. С. 1397–1400.

**2.** *Lytkina D. V.* Periodic groups saturated by the group $U_3(9)$ // Сиб. электронные мат. изв. 2007. V. 4. P. 300–303.

**3.** *Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* Периодические группы, насыщенные группой $L_3(11)$ // Мат. системы. 2007. № 6. С. 60–64.

**4.** *Лыткина Д. В., Тухватуллина Л. Р., Филиппов К. А.* Периодические группы, насыщенные группой $L_3(27)$ // Мат. системы. 2007. № 6. С. 65–68.

**5.** *Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D.* Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 151, N 1. P. 1–261.

**6.** *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.

**7.** *Рубашкин А. Г.* Группы, насыщенные заданными множествами конечных групп: дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006.

**8.** *Филиппов К. А.* Группы, насыщенные конечными неабелевыми группами и их расширениями: дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006.

**9.** *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. В.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

**10.** *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 329–338.


*Статья поступила 15 ноября 2007 г.*

Лыткина Дарья Викторовна
Новосибирский гос. университет, Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`d_lytkin@mail.ru`

Тухватуллина Ляйсан Ринатовна, Филиппов Константин Анатольевич
Красноярский гос. аграрный университет,
пр. Мира, 88а, Красноярск 660049
`lyaisan_78@mail.ru`, `filippov_kostya@mail.ru`