Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 517.98

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Кусраев, С. Н. Табуев

Аннотация. Устанавливается, что решеточный биморфизм, действующий из декартова произведения векторных решеток в расширенное пространство Канторовича, представим в виде произведения двух решеточных гомоморфизмов, определенных на решетках-сомножителях. Этот факт позволяет свести рассматриваемую задачу к линейному случаю и получить результаты о представлении билинейных порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, в виде сильно дизъюнктной суммы операторов взвешенного сдвига или мультипликативных операторов.

Ключевые слова: порядково ограниченный билинейный оператор, решеточный биморфизм, оператор взвешенного сдвига, мультипликативное представление.

§ 1. Введение

В последние годы значительный интерес уделяется билинейным операторам в векторных решетках. Это связано, в частности, с исследованием решеточно упорядоченных алгебр [1–4], гильбертовых решеток [5], а также разных структурных свойств билинейных операторов [6–9]. Введены и изучены новые конструкции, связанные с порядковыми свойствами билинейных операторов, получен ряд интересных результатов для этого класса операторов [10–16].

Настоящая работа продолжает [11] и посвящена аналитическому представлению билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. Устанавливается, что решеточный биморфизм, действующий из декартова произведения векторных решеток в расширенное пространство Канторовича, представим в виде произведения двух решеточных гомоморфизмов, определенных на решетках-сомножителях (теорема 3.2). Этот факт позволяет распространить результаты А. Е. Гутмана о представлении линейных порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность, в виде сильно дизъюнктной суммы операторов взвешенного сдвига или мультипликативных операторов (см. [17–19]), на билинейные операторы (теоремы 4.6 и 4.8). Частный случай операторов, действующих в пространствах непрерывных функций на компакте, изучался в работе [6]. Следует отметить, что исследование мультипликативного представления операторов, сохраняющих дизъюнктность, инициировано работой Ю. А. Абрамовича [20]. Дальнейшее развитие и исторический комментарий см. в [18, 19].

Необходимые сведения имеются в книгах [18, 21, 22]. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются вещественными и архимедовыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00622).

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе фиксируем терминологию и обозначения и формулируем несколько нужных для дальнейшего результатов.

2.1. Пусть E, F и G — векторные решетки. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ называют *положительным*, если $b(x, y) \geq 0$ для всех $0 \leq x \in E$ и $0 \leq y \in F$, и *регулярным*, если он представим в виде разности двух положительных билинейных операторов. Множество $BL(E, F; G)$ всех регулярных билинейных операторов из $E \times F$ в G является упорядоченным векторным пространством, в котором порядок вводится с помощью конуса положительных билинейных операторов $BL_+(E, F; G)$. Если G — пространство Канторовича, то $BL(E, F; G)$ — также пространство Канторовича (см. [23, 9]).

2.2. Оператор b называют *решеточным биморфизмом*, если операторы $b_x : y' \mapsto b(x, y')$ $(y' \in F)$ и $b_y : x' \mapsto b(x', y)$ $(x' \in E)$ являются решеточными гомоморфизмами при $0 \leq x \in E$ и $0 \leq y \in F$ (см. [24]). Говорят, что билинейный оператор $b : E \times F \to G$ *сохраняет дизъюнктность*, если для произвольных $x \in E$ и $y \in F$ выполняется

$$x_1 \perp x_2 \implies b(x_1, y) \perp b(x_2, y), \quad y_1 \perp y_2 \implies b(x, y_1) \perp b(x, y_2)$$

(напомним, что $x \perp y$ означает $|x| \wedge |y| = 0$). Как видно, билинейный оператор сохраняет дизъюнктность в том и только в том случае, если для любых $x \in E$ и $y \in F$ дизъюнктность сохраняют операторы $b_x : F \to G$ и $b_y : E \to G$. Положительный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, будет решеточным биморфизмом, так как операторы b_x и b_y являются решеточными гомоморфизмами при $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Следующий результат установлен в [11, теорема 3.4] и независимо в [12, теорема 5].

2.3. Теорема. *Пусть E, F и G — векторные решетки, а $b : E \times F \to G$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда b имеет положительную часть b^+, отрицательную часть b^- и модуль $|b|$, являющиеся решеточными биморфизмами. Более того, $b^+(x, y) = b(x, y)^+$ и $b^-(x, y) = b(x, y)^-$ при $0 \leq x \in E$, $0 \leq y \in F$ и $|b|(|x|, |y|) = |b(x, y)|$ для произвольных $x \in E$ и $y \in F$. В частности, b регулярен.*

2.4. Если X — векторное пространство, то билинейный оператор $b : X \times X \to G$ называют *симметрическим* (*положительно полуопределенным*), если $b(x, y) = b(y, x)$ (соответственно $b(x, x) \geq 0$) для всех $x, y \in X$. Билинейный оператор $b : E \times E \to G$ называют *ортосимметрическим*, если для любых $x, y \in E$ из $x \perp y$ следует $b(x, y) = 0$.

Как показано в [10, лемма 1], для решеточного биморфизма $b : E \times E \to F$ эквивалентны следующие утверждения: (1) b симметричен; (2) b ортосимметричен; (3) b положительно полуопределен. Эквивалентность (1) и (2) отмечалось также в [12, следствие 7].

2.5. В доказательстве ключевого результата — теоремы 3.2 — используется метод булевозначного представления изучаемых операторов. Этого метод опирается на теорему Гордона и технику спусков и подъемов. Первая утверждает, что расширенное пространство Канторовича представляет собой интерпретацию поля вещественных чисел в подходящей булевозначной модели, а вторая связывает, в частности, изучаемые операторы с функционалами в булевозначной модели (подробности см. в [21]). Уточним сказанное и введем соответствующие обозначения.

Пусть $\mathbb{B}$ — полная булева алгебра порядковых проекторов расширенного пространства Канторовича G. Тогда G изоморфен спуску $\mathscr{R}{\downarrow}$ поля вещественных чисел $\mathscr{R}$ в булевозначной модели теории множеств $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ [21, теорема 10.3.4]. На этом основании можно считать, что $G = \mathscr{R}{\downarrow}$.

2.6. Существует *каноническое вложение* $X \mapsto X^\wedge$ класса всех множеств $\mathbb{V}$ в класс булевозначных множеств $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ [21, § 4.2, 5.1]). При этом объект $\mathbb{R}^\wedge$ — стандартное имя поля действительных чисел $\mathbb{R}$ — представляет собой плотное подполе поля $\mathscr{R}$ внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ [21, 10.3.2].

Если E — векторная решетка, то ее стандартное имя $E^\wedge$ представляет собой векторную решетку над упорядоченным полем $\mathbb{R}^\wedge$ в модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Для оператора $T : E \to G$ существует такой элемент $\tau := T{\uparrow} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, называемый *подъемом* T, что внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ выполняются соотношения

$$\tau : E^\wedge \to \mathscr{R}, \quad \tau(x^\wedge) = Tx \quad (x \in E).$$

2.7. Пусть $E^{\wedge\sim}$ обозначает пространство порядково ограниченных $\mathbb{R}^\wedge$-линейных функций из $E^\wedge$ в $\mathscr{R}$. Тогда $E^{\wedge\sim}$ — пространство Канторовича внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Спуск $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$ также будет пространством Канторовича.

Отображение $T \mapsto \tau := T{\uparrow}$ представляет собой изоморфизм векторных решеток $L^\sim(E, G)$ и $E^{\wedge\sim}{\downarrow}$. При этом T будет решеточным гомоморфизмом (положительным, сохраняющим дизъюнктность) в том и только в том случае, когда τ — решеточный гомоморфизм (положителен, сохраняет дизъюнктность) внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Подробности см. в [25].

§ 3. Строение решеточных биморфизмов

Основной результат параграфа утверждает, что решеточный биморфизм представим в виде произведения двух решеточных гомоморфизмов.

3.1. Обозначим символом mG максимальное расширение векторной решетки G. Это означает, что mG — расширенное пространство Канторовича, а G — порядково плотная (т. е. минорантная) подрешетка в нем. Пусть $\mathbf{1} := \mathbf{1}_{mG}$ — фиксированная порядковая единица в mG. Тогда пространство mG единственным образом можно снабдить структурой f-кольца так, чтобы $\mathbf{1}$ была кольцевой единицей. В дальнейшем, рассматривая mG как f-кольцо, будем иметь в виду фиксированное умножение, однозначно определяемое выбором порядковой единицы $\mathbf{1}$.

3.2. Теорема. *Для произвольного решеточного биморфизма $b : E \times F \to G$ существуют два решеточных гомоморфизма $S : E \to mG$ и $T : F \to mG$ такие, что*

$$b(x, y) = S(x)T(y) \quad (x \in E,\ y \in F).$$

Если, кроме того, $E = F$ и биморфизм b симметричен, то в этом представлении можно взять $S = T$.

Доказательство проведем в два этапа. Сначала разберем скалярный случай $G := \mathbb{R}$. Предположим, что решеточный биморфизм $b : E \times F \to \mathbb{R}$ отличен от нуля, так как в противном случае доказывать нечего. Подберем $0 \leq x_0 \in E$ так, чтобы функционал $g := b(x_0, \cdot)$ был ненулевым решеточным гомоморфизмом.

Возьмем $u \in E_+$ и положим $e = x_0 + u$. Как видно, три решеточных гомоморфизма b_{x_0}, b_u и b_e связаны равенством $b_e = b_{x_0} + b_u$. По теореме Кутателадзе (см. [18, 3.3.4(1)]) для подходящих $r, s \in \mathbb{R}_+$ будет $g = b_{x_0} = rb_e$ и $b_u = sb_e$. Так как $g \neq 0$, то $r > 0$, стало быть, $b_u = \gamma g$, где $\gamma := s/r$.

Итак, для любого $u \in E_+$ существует число $\gamma(u) \geq 0$ такое, что $b_u = \gamma(u)g$, т. е. $b(u, y) = \gamma(u)g(y)$ для всех $u \in E_+$ и $y \in F$. Отсюда видно, в частности, что $\gamma(x_0) = 1$.

Поскольку для $y \in F_+$ функционал $b(\cdot, y)$ — решеточный гомоморфизм, то для любых $u, u' \in E_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}_+$ выполняется

$$\gamma(u + u')g(y) = \gamma(u)g(y) + \gamma(u')g(y), \quad \gamma(u \vee u')g(y) = \gamma(u)g(y) \vee \gamma(u')g(y),$$
$$\gamma(\lambda u)g(y) = \lambda\gamma(u)g(y) \quad (y \in F_+).$$

Таким образом, γ аддитивен, положительно однороден и сохраняет точные верхние границы конечных множеств. Положим $f(x) := \gamma(x^+) - \gamma(x^-)$ $(x \in E)$. Функционал f, продолжающий γ на всю решетку E, будет решеточных гомоморфизмом. При этом для $x \in E$ и $y \in F$ выполняется

$$b(x, y) = b(x^+, y) - b(x^-, y) = \gamma(x^+)g(y) - \gamma(x^-)g(y) = f(x)g(y).$$

Если $E = F$ и функционал b симметричен, то $f(x)g(y) = g(x)f(y)$ при всех $x \in E$ и $y \in F$, следовательно, $g(y) = g(x_0)f(y)$. Полагая $h := \sqrt{g(x_0)}f$, получим представление $b(x, y) = h(x)h(y)$.

Редукция общего случая к скалярному осуществляется с помощью булевозначного анализа. Для корректного применения последнего важно заметить, что установленное выше утверждение остается в силе, если заменить E и F векторными решетками над упорядоченным полем $\mathbb{P}$, удовлетворяющим включениям $\mathbb{Q} \subset \mathbb{P} \subset \mathbb{R}$. При этом следует помнить, что функционалы b, f и g принимают значения из $\mathbb{R}$ и являются $\mathbb{P}$-линейными. Для таких функционалов сохраняет силу теорема Кутателадзе — основной инструмент приведенного выше доказательства.

Итак, рассматривая общий случай, можем считать в силу теоремы Гордона, что расширенное K-пространство mG представляет собой спуск $\mathscr{R}{\downarrow}$ поля вещественных чисел $\mathscr{R}$ из булевозначной модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, где $\mathbb{B} := \mathfrak{P}(mG)$ — булева алгебра порядковых проекторов в mG. В качестве упорядоченного поля $\mathbb{P}$ возьмем стандартное имя $\mathbb{R}^\wedge$ поля $\mathbb{R}$. Тогда $E^\wedge$ и $F^\wedge$ представляют собой векторные решетки над полем $\mathbb{P}$ внутри модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Техника спусков и подъемов (см. [21, 5.7.7 (3)]) обеспечивает существование такого элемента $\beta \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, что выполнены соотношения

$$[\![\beta : E^\wedge \times F^\wedge \to \mathscr{R}]\!] = \mathbf{1},$$
$$[\![\beta \text{ — решеточный } \mathbb{P}\text{-биморфизм}]\!] = \mathbf{1},$$
$$[\![\beta(x^\wedge, y^\wedge) = b(x, y)]\!] = \mathbf{1} \quad (x \in E,\, y \in F).$$

Установленный выше факт о строении вещественнозначных решеточных гомоморфизмов справедлив внутри модели $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ в соответствии с булевозначным принципом переноса [21, теорема 4.4.1]. Привлекая булевозначный принцип максимума [21, теорема 4.3.9], найдем элементы $\sigma, \tau \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, для которых верны равенства

$$[\![\, \sigma : E^\wedge \to \mathscr{R} \,]\!] = [\![\, \tau : F^\wedge \to \mathscr{R} \,]\!] = \mathbf{1},$$
$$[\![\sigma, \tau \text{ — решеточные } \mathbb{P}\text{-гомоморфизмы}]\!] = \mathbf{1},$$
$$[\![(\forall x \in E^\wedge)\, (\forall y \in F^\wedge)\, \beta(x, y) = \sigma(x)\tau(y)]\!] = \mathbf{1}.$$

Пусть S и T обозначают спуски элементов σ и τ соответственно. Это означает, что справедливы соотношения

$$S : E \to \mathscr{R}{\downarrow}, \quad T : F \to \mathscr{R}{\downarrow},$$

$$[\![S(x) = \sigma(x^\wedge)]\!] = [\![T(y) = \tau(y^\wedge)]\!] = \mathbf{1} \quad (x \in E,\, y \in F).$$

Согласно 2.7 S и T — решеточные гомоморфизмы. Более того, имеет место представление $b(x,y) = S(x)T(y)$, так как при $x \in E$ и $y \in F$ будет

$$[\![b(x,y) = \beta(x^\wedge, y^\wedge) = \sigma(x^\wedge)\tau(y^\wedge) = S(x)T(y)]\!] = \mathbf{1}.$$

Симметричность b равносильна симметричности β внутри $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, стало быть, можно выбрать σ и τ равными, что равносильно, в свою очередь, равенству $S = T$. $\square$

3.3. Следствие. *Порядково ограниченный билинейный оператор $b : E \times F \to G$, сохраняющий дизъюнктность, допускает представление в виде произведения*

$$b(x,y) = S(x)T(y) \quad (x \in E,\ y \in F),$$

где один из операторов $S : E \to mG$ и $T : F \to mG$ порядково ограничен и сохраняет дизъюнктность, а другой — решеточный гомоморфизм. Если, кроме того, $E = F$ и оператор b симметричен, а S — решеточный гомоморфизм, то можно взять $T = \pi S - \pi^\perp S$, где π — порядковый проектор в mG.

Доказательство. Пусть билинейный оператор b порядково ограничен и сохраняет дизъюнктность. В силу теоремы 2.3 и [11, предложение 3.7(2)] существует проектор π в mG такой, что $\pi b = b^+$ и $\pi^\perp b = -b^-$, причем b^+ и b^- служат решеточными биморфизмами. В соответствии с теоремой 3.2 имеют место представления

$$b^+(x,y) = S_1(x)T_1(y), \quad b^-(x,y) = S_2(x)T_2(y) \quad (x \in E,\ y \in F),$$

где $S_1, S_2 : E \to mG$ и $T_1, T_2 : F \to mG$ — решеточные гомоморфизмы. Билинейный оператор $(x,y) \mapsto S(x)T(y)$ обозначим символом $S \odot T$. Справедливы равенства

$$b = b^+ - b^- = \pi b + \pi^\perp b = \pi S_1 \odot T_1 - \pi^\perp S_2 \odot T_2 = \pi S_1 \odot \pi T_1 - \pi^\perp S_2 \odot \pi^\perp T_2.$$

Положим $S = \pi S_1 - \pi^\perp S_2$ и $T = \pi T_1 + \pi^\perp T_2$. Тогда S порядково ограничен и сохраняет дизъюнктность, T — решеточный гомоморфизм и

$$\begin{aligned} S \odot T &= (\pi S_1 - \pi^\perp S_2) \odot (\pi T_1 + \pi^\perp T_2) \\ &= \pi S_1 \odot \pi T_1 + \pi S_1 \odot \pi^\perp T_2 - \pi^\perp S_2 \odot \pi T_1 - \pi^\perp S_2 \odot \pi^\perp T_2 \\ &= \pi S_1 \odot \pi T_1 - \pi^\perp S_2 \odot \pi^\perp T_2 = b, \end{aligned}$$

что и требовалось. Оставшаяся часть очевидна. $\square$

§ 4. Мультипликативное представление

В этом параграфе устанавливается результат о мультипликативном представлении билинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность.

4.1. Пусть $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — расширенные K-пространства с фиксированными порядковыми единицами $\mathbf{1}_{\mathscr{E}}$, $\mathbf{1}_{\mathscr{F}}$ и $\mathbf{1}_{\mathscr{G}}$. Каждое из этих пространств будем рассматривать вместе со структурой f-алгебры, однозначно определяемой тем условием, что порядковая единица служит единицей умножения. Используем также следующие обозначения: $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ — булева алгебра всех порядковых проекторов в $\mathscr{E}$, $\mathfrak{E}(\mathbf{1})$ — булева алгебра всех осколков элемента $\mathbf{1}$, $\mathscr{E}(\mathbf{1})$ — идеал, порожденный элементом $\mathbf{1}$.

Напомним что в рассматриваемых расширенных K-пространствах ортоморфизмы являются операторами умножения и отождествляются с соответствующими мультипликаторами. Для каждого $f \in \mathscr{E}$ существует единственный элемент $g \in \mathscr{E}$ такой, что $fg = [f]\mathbf{1}_{\mathscr{E}}$ и $[f] = [g]$, где $[f]$ — порядковый проектор на полосу, порожденную элементом f. Обозначим такой элемент g символом $1/f := \mathbf{1}_{\mathscr{E}}/f$ и положим $e/f := e(1/f)$ для любого $e \in \mathscr{E}$.

4.2. Всюду в этом параграфе E, F и G обозначают фундаменты в $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ соответственно. Возьмем еще четверку фундаментов $E' \subset \mathscr{E}$, $F' \subset \mathscr{F}$, $G' \subset \mathscr{G}$ и $G'' \subset \mathscr{G}$. Обозначим символом $G' \cdot G''$ подрешетку в $\mathscr{G}$, порожденную множеством $\{g'g'' : g' \in G',\, g'' \in G''\}$. Для линейных операторов $w : E \to E'$, $v : F \to F'$, $\sigma : E' \to G'$ и $\tau : F' \to G''$ введем два оператора $w \times v : E \times F \to E' \times F'$ и $\sigma \odot \tau : E' \times F' \to G' \cdot G''$ формулами $(x, y) \mapsto (wx, vy)$ и $(x, y) \mapsto \sigma(x)\tau(y)$ соответственно.

4.3. Будем говорить, что билинейный оператор $b : E \times F \to G$ *допускает WSW-факторизацию*, если существуют фундаменты $E' \subset \mathscr{E}$, $F' \subset \mathscr{F}$ и $G', G'' \subset \mathscr{G}$, ортоморфизмы $w : E \to E'$, $v : F \to F'$ и $W : G' \cdot G'' \to G$ и операторы сдвига $\sigma : E' \to G'$ и $\tau : F' \to G''$ такие, что

$$b = W \circ (\sigma \odot \tau) \circ (w \times v),$$

т. е. коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\;\;b\;\;} & G \\ {\scriptstyle w\times v}\Big\downarrow & & \Big\uparrow{\scriptstyle W} \\ E' \times F' & \xrightarrow[\sigma\odot\tau]{} & G' \cdot G''. \end{array}$$

Оператором сдвига из E' в F' называем решеточный гомоморфизм $\sigma : E' \to F'$, широкий на элементе $\mathbf{1}_{\mathscr{E}}$ и переводящий осколки $\mathbf{1}_{\mathscr{E}}$ (входящие в E') в осколки $\mathbf{1}_{\mathscr{F}}$ (см. [17, 6.3.7; 18, 5.3.4]). Оператор W называют *внешним весом*, а v и w — *внутренними весами*. Оператор, допускающий WSW-факторизацию, называют также *оператором взвешенного сдвига*.

Оператор сдвига из E' в F' является ограничением на E' положительного линейного оператора $\widehat{S} : \widehat{E} \to \mathscr{F}$ — *сдвига*, характеризуемого следующими свойствами:

1) $\widehat{E}$ — фундамент в $\mathscr{E}$, состоящий из элементов вида $x = o\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n x_n$, где (x_n) — произвольная последовательность в $\mathscr{E}(\mathbf{1}_{\mathscr{E}})$, а (π_n) — счетное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ такое, что $\big(\hat{S}(\pi_n \mathbf{1}_{\mathscr{E}})\big)$ — разбиение единицы в $\mathfrak{E}\big(\widehat{S}(\mathbf{1}_{\mathscr{E}})\big)$;

2) $\widehat{S}(\mathbf{1}_{\mathscr{E}})$ является осколком $\mathbf{1}_{\mathscr{F}}$;

3) $\widehat{S}$ сохраняет дизъюнктность;

4) $\widehat{S}(\mathbf{1}_{\mathscr{E}})^{\perp\perp} = \widehat{S}(\hat{E})^{\perp\perp}$ (см. [17, 6.3.7; 18, 5.3.1, 5.3.3]); если ρ — порядковый проектор в $\mathscr{F}$, то $S_0 := \rho \circ \widehat{S}$ является оператором сдвига, поэтому совпадает с ограничением на $\widehat{E}$ однозначно определенного сдвига $\widehat{S}_0$, который будем обозначать символом, $\rho\widehat{S} := \widehat{S}_0$ (см. [17, 6.3.8]).

4.4. Будем говорить, что *билинейный оператор* $b : E \times F \to G$ *широк на множестве* $C \times D$, где $C \subset E$ и $D \subset F$, если $b_x(D)^{\perp\perp} = b_x(F)^{\perp\perp}$ и $b_y(C)^{\perp\perp} = b_y(E)^{\perp\perp}$ для любых $x \in E$ и $y \in F$. Для $0 \le c \in \mathscr{E}$ обозначим ${}^cE := \{e \in E : e$ — осколок $c\}$. Если $0 \le c \in \mathscr{E}$ и $0 \le d \in \mathscr{F}$, то будем говорить, что оператор b *широк на паре элементов* (c, d), если он широк на множестве ${}^eE \times {}^dF$.

Имеют место следующие два утверждения.

(1) *Если порядково ограниченный билинейный оператор $b : E \times F \to G$, сохраняющий дизъюнктность, широк на паре элементов (c, d), то найдутся сохраняющие дизъюнктность порядково ограниченные линейные операторы S_0 и T_0 такие, что $b = S_0 \odot T_0$, причем S_0 широк на c, а T_0 широк на d.*

(2) *Если в представлении $b = S \odot T$ порядково ограниченного билинейного оператора $b : E \times F \to G$, сохраняющего дизъюнктность, S и T широки на c и d соответственно, то билинейный оператор b широк на (c, d).*

Доказательство. (1) Из того, что b широк на (c, d), вытекает по определению, что $b_y({}^cE)^{\perp\perp} = b_y(E)^{\perp\perp}$ для любого $y \in F$. Возьмем какое-нибудь представление $b = S \odot T$ в соответствии с п. 3.3. Тогда $(S({}^cE)T(y))^{\perp\perp} = (S(E)T(y))^{\perp\perp}$, т. е. для любого фиксированного $y \in F$ линейный оператор $S(\cdot)T(y)$ широк на c. Аналогично устанавливается, что оператор $S(x)T(\cdot)$ широк на элементе d для любого $x \in E$. Рассмотрим проекторы

$$\pi := \bigvee_{y \in F} [T(y)], \quad \rho := \bigvee_{x \in E} [S(x)].$$

Операторы $S_0 := \pi S$ и $T_0 := \rho T$ широки на c и d соответственно. При этом очевидно, что $b = S_0 \odot T_0$.

(2) Данное утверждение доказывается непосредственно. Пусть операторы S и T широки на c и d соответственно, причем $b = S \odot T$. Тогда для любого $y \in F$ имеем

$$\begin{aligned} b_y({}^cE)^{\perp\perp} &= (S({}^cE)T(y))^{\perp\perp} = S({}^cE)^{\perp\perp}T(y) \\ &= S(E)^{\perp\perp}T(y) = (S(E)T(y))^{\perp\perp} = b_y(E)^{\perp\perp}. \end{aligned}$$

Аналогично устанавливается равенство $b_x({}^dF)^{\perp\perp} = b_x(F)^{\perp\perp}$ для любого $x \in E$. □

4.5. Теорема. *Пусть $0 \le v \in \mathscr{E}$ и $0 \le w \in \mathscr{F}$. Билинейный оператор $b : E \times F \to G$ допускает WSW-факторизацию с внутренними весами v и w в том и только в том случае, если b сохраняет дизъюнктность, порядково ограничен и широк на паре элементов $(1/v, 1/w)$.*

Доказательство основано на теореме 3.2 с учетом соответствующего результата для линейных операторов (см. [17, теорема 6.4.2] или [18, теорема 5.3.6]). Нужно лишь заметить, что если b широк на паре (c, d), то найдутся сохраняющие дизъюнктность порядково ограниченные линейные операторы S и T такие, что $b = S \odot T$, причем S широк на c, а T широк на d. □

4.6. Теорема. *Пусть $b : E \times F \to G$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(G)$ и семейства положительных элементов $(e_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в E и $(f_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в F такие, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиция $\rho_\xi \circ b$*

допускает WSW-факторизацию с внутренними весами $1/e_\xi$ и $1/f_\xi$, и оператор b разлагается в сильно дизъюнктную сумму

$$b = \bigoplus_{\xi\in\Xi} W \circ (\rho_\xi\sigma \odot \rho_\xi\tau) \circ (1_{\mathscr{E}}/e_\xi \times 1_{\mathscr{F}}/f_\xi),$$

где σ и τ — операторы сдвига, а $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ — оператор умножения на $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} \rho_\xi b(e_\xi, f_\xi)$.

Доказательство. Из теоремы в п. 3.2 следует, что имеет место представление $b = S \odot T$, где один из операторов $S : E \to \mathscr{G}$ и $T : F \to \mathscr{G}$ порядково ограничен и сохраняет дизъюнктность, а другой — решеточный гомоморфизм. Далее, в силу теоремы Гутмана (см. [17, теорема 6.4.5] или [18, теорема 5.3.7]) существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в алгебре $\mathfrak{P}(G)$ и семейства e_ξ и f_ξ положительных элементов в E и F соответственно такие, что для каждого $\xi \in \Xi$ композиции $\rho_\xi \circ S$ и $\rho_\xi \circ T$ допускают WSW-факторизации

$$\rho_\xi \circ S = W_S \circ \rho_\xi\sigma \circ (1/e_\xi), \quad \rho_\xi \circ T = W_T \circ \rho_\xi\sigma \circ (1/f_\xi),$$

где $\rho_\xi\sigma$ и $\rho_\xi\tau$ понимаются согласно п. 4.3, а $W_S, W_T : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ — операторы умножения на $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} \rho_\xi S e_\xi$ и $o\text{-}\sum\limits_{\xi\in\Xi} \rho_\xi T f_\xi$ соответственно. Учитывая сказанное, выводим

$$\rho_\xi b(x, y) = \rho_\xi S(x)\rho_\xi T(y) = W_S W_T(\rho_\xi\sigma)(x/e_\xi)(\rho_\xi\tau)(y/f_\xi) \quad (x \in E,\ y \in F).$$

Обозначив $W := W_S W_T$, видим, что $W : \mathscr{G} \to \mathscr{G}$ — оператор умножения на

$$o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi S e_\xi T f_\xi = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi b(e_\xi, f_\xi).$$

Остается заметить, что $\rho_\xi b = W \circ (\rho_\xi\sigma \odot \rho_\xi\tau) \circ (1_{\mathscr{E}}/e_\xi \times 1/f_\xi)$. $\square$

4.7. Предположим, что $\mathscr{E} = C_\infty(P)$, $\mathscr{F} = C_\infty(Q)$ и $\mathscr{G} = C_\infty(R)$, где P, Q и R — экстремально несвязные компакты. Пусть E, F и G — фундаменты в расширенных K-пространствах $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ соответственно. Обозначим символом $C_0(R, Q)$ множество всех непрерывных функций $s : R_0 := \mathrm{dom}(s) \to Q$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $R_0 \subset R$. Для произвольных $s \in C_0(R, Q)$ и $e \in C_\infty(Q)$ определим функцию $s^*e : R \to \overline{\mathbb{R}}$ формулой

$$(s^*e)(r) := \begin{cases} e(s(r)), & \text{если } r \in \mathrm{dom}(s), \\ 0, & \text{если } r \in R\setminus \mathrm{dom}(s). \end{cases}$$

Функция s^*e непрерывна, но не принадлежит, вообще говоря, пространству $C_\infty(R)$, поскольку она может принимать бесконечные значения на множестве с непустой внутренностью.

4.8. Теорема. *Пусть E, F и G — фундаменты в $C_\infty(P)$, $C_\infty(Q)$ и $C_\infty(R)$ соответственно, а $b : E \times F \to G$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют отображения $s \in C_0(R, P)$ и $t \in C_0(R, Q)$, семейства $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ и $(f_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций из E и F соответственно и семейство $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных функций из $C_\infty(R)$ такие, что справедливо представление*

$$b(x, y) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi s^*(x/e_\xi)t^*(y/f_\xi).$$

Доказательство. Здесь можно рассуждать так же, как и в п. 4.6, но комбинируя теорему 3.2 с соответствующим результатом для линейных операторов. Пусть $b : E \times F \to G$ — порядково ограниченный билинейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. По теореме Гутмана о мультипликативном представлении (см. [17, теорема 6.5.12] или [18, теорема 5.4.5]) операторы $S : E \to G$ и $T : F \to G$ из теоремы 3.2 допускают представления

$$Sx = o\text{-}\sum_{\xi_1 \in \Xi_1} W'_{\xi_1} s^*(x/e_{\xi_1})\ (x \in E), \quad Ty = o\text{-}\sum_{\xi_2 \in \Xi_2} W''_{\xi_2} t^*(y/f_{\xi_2})\ (y \in F),$$

где $s \in C_0(R, P)$ и $t \in C_0(R, Q)$, $e_{\xi_1} \in E_+$ $(\xi_1 \in \Xi_1)$ и $f_{\xi_2} \in F_+$ $(\xi_2 \in \Xi_2)$, а $(W_{\xi_1})_{\xi_1 \in \Xi_1}$ и $(W_{\xi_2})_{\xi_2 \in \Xi_2}$ — два попарно дизъюнктных семейства функций из $C_\infty(R)$. Обозначим $\Xi := \Xi_1 \times \Xi_2$ и для каждого $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ положим $W_\xi := W'_{\xi_1} W''_{\xi_2}$, $e_\xi := e_{\xi_1}$, $f_\xi := f_{\xi_2}$. Тем самым приходим к представлениям S и T с одним и тем же множеством индексов и, подставив эти выражения в равенство $b(x, y) = S(x)T(y)$, получим требуемое. $\square$

Авторы признательны рецензенту за труд по искоренению разного рода досадных неточностей, указавшему, в частности, ошибку в первоначальном доказательстве теоремы 4.6, а также способ ее устранения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bernau S. J., Huijsmans C. B.* The order bidual of almost f-algebras and d-algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347, N 11. P. 4259–4274.
2. *Buskes G. J. H. M.* Five theorems in the theory of Riesz spaces // Circumspice. Nijmegen: Katholieke Univ. Nijmegen, 2001. P. 3–10.
3. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 233–243.
4. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Almost f-algebras: structure and the Dedekind completion // Positivity. 2000. V. 4, N 3. P. 227–231.
5. *Gaans O. W. van.* The Riesz part of a positive bilinear form // Circumspice. Nijmegen: Katholieke Univ. Nijmegen, 2001. P. 19–30.
6. *Boulabiar K.* Some aspects of Riesz multimorphisms // Indag. Math. (N.S.) 2002. V. 13, N 4. P. 419–432.
7. *Boulabiar K., Toumi M. A.* Lattice bimorphisms on f-algebras // Algebra Universalis. 2002. V. 48, N 1. P. 103–116.
8. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Bounded variation and tensor products of Banach lattices // Positivity. 2003. V. 7, N 1. P. 47–59.
9. *Кусраев А. Г., Шотаев Г. Н.* Билинейные мажорируемые операторы // Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию. Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004. С. 241–262.
10. *Кусраев А. Г.* О представлении ортосимметрических билинейных операторов в векторных решетках // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 4. С. 30–34.
11. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 1. С. 58–70.
12. *Boulabiar K., Buskes G., Page R.* On some properties of bilinear maps of order bounded variation // Positivity. 2005. V. 9, N 3. P. 401–414.
13. *Buskes G. J. H. M., van Rooij A. C. M.* Squares of Riesz spaces // Rocky Mountain J. Math. 2004. V. 31, N 1. P. 45–56.
14. *Scheffold E.* Über Bimorphismen und das Arens-Product bei kommutativen D-Banachverbandsalgebren // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1994. V. 39, N 3. P. 183–205.
15. *Scheffold E.* Über die Arens-Triadjungierte von Bimorphismen // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1996. V. 41, N 9–10. P. 697–701.
16. *Scheffold E.* Über symmetrische Operatoren auf Banachverbänden und Arens-Regularität // Czechoslovak Math J. 1998. V. 48, N 4. P. 747–753.

17. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. С. 63–211.
18. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
19. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector lattices and integral operators. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 361–454.
20. *Abramovich Yu. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. (N.S.) 1983. V. 45, N 3. P. 265–279.
21. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
22. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators. New York: Acad. Press, 1985.
23. *Кусраев А. Г.* Об одном свойстве базы K-пространства регулярных операторов и некоторых его приложениях. Новосибирск, 1977. 16 с. (Препринт / ИМ СО АН СССР).
24. *Fremlin D. H.* Tensor product of Archimedean vector lattices // Amer. J. Math. 1972. V. 94, N 3. P. 777–798.
25. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартные методы и пространства Канторовича // Нестандартный анализ и векторные решетки. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2005. С. 1–123.

Статья поступила 23 октября 2006 г., окончательный вариант — 3 июля 2007 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич, Табуев Сослан Наполенович
Институт прикладной математики и информатики,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027, РСО-А
`kusraev@smath.ru`, `soslan@tabuev.com`