Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 512.554

МНОГООБРАЗИЯ ДИАЛГЕБР И КОНФОРМНЫЕ АЛГЕБРЫ

П. С. Колесников

Аннотация. Вводится и исследуется понятие многообразия диалгебр. Оно находится в тесной связи с понятием многообразия конформных алгебр: любая диалгебра некоторого многообразия может быть вложена в подходящую конформную алгебру этого же многообразия. В частности, класс алгебр Лейбница совпадает с многообразием диалгебр Ли, и любая алгебра Лейбница может быть вложена в конформную алгебру Ли.

Ключевые слова: алгебра Лейбница, диалгебра, конформная алгебра, операда, псевдоалгебра.

Введение

Алгебры Лейбница, введенные Лодеем [1], являются некоммутативными аналогами алгебр Ли. Определяющее тождество многообразия левых (соответственно правых) алгебр Лейбница представляет собой следующее условие: оператор левого (соответственно правого) умножения на любой элемент алгебры является дифференцированием, т. е.

$$x(yz) = (xy)z + y(xz) \quad \text{или} \quad (xy)z = (xz)y + x(yz).$$

Подобно тому, как алгебра Ли вкладывается в ассоциативную алгебру, любая алгебра Лейбница может быть вложена в ассоциативную диалгебру. По определению [2, 3] диалгебра — это линейное пространство с двумя билинейными операциями умножения $\dashv$ и $\vdash$. Тождества, которым должна удовлетворять диалгебра A, чтобы называться ассоциативной, выбираются таким образом, чтобы новая операция

$$ab = a \vdash b - b \dashv a \quad \text{или} \quad ab = a \dashv b - b \vdash a$$

превращала A в левую (или соответственно правую) алгебру Лейбница [2]:

$$\begin{gathered}
(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \quad x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \\
(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z), \\
(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z).
\end{gathered} \tag{1}$$

В работе [4] также введено понятие альтернативной диалгебры из следующих соображений. Еще в [5] отмечено, что некоторая алгебра A вкладывается в алгебру Стейнберга $\mathrm{st}(n, A)$, $n \geq 4$, тогда и только тогда, когда A ассоциативна;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Лаврентьевского гранта поддержки молодежных проектов СО РАН № 29.

если $n = 3$, то A должна быть хотя бы альтернативной. В [4] построен аналог алгебры Стейнберга $\mathrm{stl}(n, D)$ в многообразии алгебр Лейбница, где D — некоторая диалгебра. Тождества, необходимые для вложения D в $\mathrm{stl}(3, D)$, объявлены тождествами альтернативной диалгебры:

$$\begin{gathered}(x \dashv y) \vdash z = (x \vdash y) \vdash z, \quad x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \dashv z), \\ (x, y, z)_\dashv + (z, y, x)_\vdash = 0, \quad (x, y, z)_\dashv - (y, z, x)_\vdash = 0, \\ (x, y, z)_\times + (x, z, y)_\vdash = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $(x, y, z)_\vdash = (x \vdash y) \vdash z - x \vdash (y \vdash z)$, $(x, y, z)_\dashv = (x \dashv y) \dashv z - x \dashv (y \dashv z)$, $(x, y, z)_\times = (x \vdash y) \dashv z - x \vdash (y \dashv z)$.

Основной целью настоящей работы является построение общей схемы, позволяющей для некоторого многообразия алгебр (ассоциативных, лиевых, альтернативных и т. п.) определить, что следует называть соответствующим многообразием диалгебр. Данная конструкция основывается на связи диалгебр и конформных алгебр.

Напомним, что *конформной алгеброй* [6] называется линейное пространство C (над полем характеристики нуль), снабженное одной линейной операцией $T : C \to C$ и счетным семейством билинейных операций произведения $(\cdot {}_{(n)} \cdot) : C \times C \to C$, индексированным множеством $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, причем

- для любых $a, b \in C$ существует лишь конечное число не равных нулю элементов $a {}_{(n)} b$;
- $Ta {}_{(n)} b = -na {}_{(n-1)} b$, $a {}_{(n)} Tb = T(a {}_{(n)} b) + na {}_{(n-1)} b$.

Любая конформная алгебра может быть вложена в пространство формальных степенных рядов $A[[z, z^{-1}]]$ над подходящей обыкновенной алгеброй A, где

$$(Ta)(z) = \frac{d}{dz} a(z), \quad (a {}_{(n)} b)(z) = \operatorname*{Res}_{w=0} a(w)b(z)(w - z)^n.$$

Здесь $\mathrm{Res}_{w=0} f(w, z)$ означает коэффициент при w^{-1} ряда $f(z, w)$ из пространства $A[[z, z^{-1}, w, w^{-1}]]$.

В [7] показано, что для произвольной конформной алгебры C существует единственная с точностью до изоморфизма обыкновенная алгебра $\mathrm{Coeff}\, C$ такая, что $\mathrm{Coeff}\, C[[z, z^{-1}]] \supseteq C$, универсальная в следующем смысле. Для любой алгебры A такой, что $A[[z, z^{-1}]]$ содержит C, существует гомоморфизм алгебр $\mathrm{Coeff}\, C \to A$ такой, что его естественное продолжение $\mathrm{Coeff}\, C[[z, z^{-1}]] \to A[[z, z^{-1}]]$ действует на C тождественно. Алгебра $\mathrm{Coeff}\, C$ называется *алгеброй коэффициентов* конформной алгебры C.

Конформная алгебра C называется *ассоциативной* (*лиевой*, *альтернативной* и т. п.) [7], если такова $\mathrm{Coeff}\, C$. Например, ассоциативность конформной алгебры C эквивалентна выполнению тождеств

$$a {}_{(n)} (b {}_{(m)} c) = \sum_{s \geq 0} \binom{n}{s} (a {}_{(n-s)} b) {}_{(m+s)} c, \quad a, b, c \in C, \ n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Более общий подход развит в [8], см. подробности в п. 1.4.

Нетрудно заметить, что для любой ассоциативной конформной алгебры C новые операции

$$a \vdash b = a {}_{(0)} b, \quad a \dashv b = \sum_{s \geq 0} \frac{1}{s!} (-T)^s (a {}_{(s)} b) \tag{3}$$

удовлетворяют соотношениям (1), т. е. относительно этих операций C является ассоциативной диалгеброй. То же самое верно для альтернативных конформных алгебр: операции (3) на альтернативной конформной алгебре удовлетворяют тождествам (2). Однако совершенно не очевидно, почему любая ассоциативная (или альтернативная) диалгебра может быть получена таким образом. Поэтому мы введем определение многообразия диалгебр при помощи категорного языка с использованием понятия операды, и затем докажем, что любая диалгебра многообразия Var может быть вложена в конформную алгебру (в общем случае псевдоалгебру) многообразия Var.

§ 1. Операды и алгебры

1.1. Разбиения. Пусть $m \geq n \geq 1$ — два натуральных числа. Упорядоченный набор натуральных чисел $\pi = (m_1, \dots, m_n)$, $m_i \geq 1$, назовем *n-разбиением* числа m, если $m_1 + \dots + m_n = m$. Множество всех таких разбиений обозначим через $\Pi(m, n)$.

Каждое разбиение $\pi \in \Pi(m, n)$ определяет взаимно однозначное соответствие между множествами $\{1, \dots, m\}$ и $\{(i, j) \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m_i\}$ по правилу

$$(i, j) \leftrightarrow k = m_1 + \dots + m_{i-1} + j.$$

Обозначим это число k через $(i, j)^\pi$.

Для двух данных разбиений $\tau = (p_1, \dots, p_m) \in \Pi(p, m)$, $\pi = (m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$ определим $\tau\pi \in \Pi(p, n)$ следующим естественным образом:

$$\tau\pi = (p_1 + \dots + p_{m_1}, p_{m_1+1} + \dots + p_{m_1+m_2}, \dots, p_{m-m_n+1} + \dots + p_m).$$

Если $\tau\pi = (q_1, \dots, q_n)$, то для любого $i = 1, \dots, n$ обозначим через $\tau\pi_i$ подразбиение $(p_{m_1+\dots+m_{i-1}+1}, \dots, p_{m_1+\dots+m_i}) \in \Pi(q_i, m_i)$.

Определим также (правое) действие симметрической группы S_n на $\Pi(m, n)$ следующим образом: если $\pi = (m_1, \dots, m_n)$, то $\pi\sigma = (m_{1\sigma^{-1}}, \dots, m_{n\sigma^{-1}})$ для $\sigma \in S_n$.

1.2. Операды. Рассмотрим следующий набор данных:

- семейство линейных пространств $\{\mathscr{C}(n)\}_{n \geq 1}$ над полем $\Bbbk$;
- семейство линейных отображений (называемое *правилом композиции*)

  $$\mathrm{Comp}^\pi : \mathscr{C}(n) \otimes \mathscr{C}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathscr{C}(m_n) \to \mathscr{C}(m),$$

  где $\pi = (m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$.

Мы будем также использовать сокращенное обозначение для композиции:

$$\mathrm{Comp}^\pi(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n) = \mathrm{Comp}^\pi\big(\varphi, (\psi_i)_{i=1}^n\big).$$

Этот набор данных называется *операдой* (обозначаемой символом $\mathscr{C}$), если выполняются следующие условия:

(O1) правило композиции ассоциативно, т. е. для любых $\tau = (p_1, \dots, p_m) \in \Pi(p, m)$, $\pi = (m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$, $\psi_j \in \mathscr{C}(p_j)$, $\chi_i \in \mathscr{C}(m_i)$, $\varphi \in \mathscr{C}(n)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, выполнено равенство

$$\mathrm{Comp}^\tau\big(\mathrm{Comp}^\pi\big(\varphi, (\chi_i)_{i=1}^n\big), (\psi_j)_{j=1}^m\big) = \mathrm{Comp}^{\tau\pi}\Big(\varphi, \Big(\mathrm{Comp}^{\tau\pi_i}\big(\chi_i, (\psi_{(i,t)^\pi})_{t=1}^{m_i}\big)\Big)_{i=1}^n\Big); \quad (4)$$

(O2) существует «единица» $\mathrm{id} \in \mathscr{C}(1)$ такая, что

$$\mathrm{Comp}^{(1,\dots,1)}(f, \mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}) = \mathrm{Comp}^{(n)}(\mathrm{id}, f) = f \tag{5}$$

для любого $f \in \mathscr{C}(n)$.

Рассмотрим важный пример операды. Пусть $\mathscr{C}(n) = \Bbbk S_n$. Для $\sigma \in S_n$, $\pi = (m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$, $\tau_i \in S_{m_i}$, $i = 1, \dots, n$, определим подстановку

$$\Sigma = \mathrm{Comp}^{\pi}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n) \in S_m$$

по следующему правилу: если $k = (i, j)^{\pi} \in \{1, \dots, m\}$, то $k\Sigma = (i\sigma, j\tau_i)^{\pi\sigma}$.

Данное правило композиции удовлетворяет условию ассоциативности (4), единичным элементом является тождественная подстановка из S_1, которая, очевидно, удовлетворяет условию (5). Построенная операда называется *операдой симметрий* и обозначается через Sym.

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторая операда. Если каждое пространство $\mathscr{C}(n)$, $n \geq 1$, снабжено правым действием симметрической группы S_n и для любых $\pi = (m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$, $\varphi \in \mathscr{C}(n)$, $\sigma \in S_n$, $\psi_i \in \mathscr{C}(m_i)$, $\tau_i \in S_{m_i}$, $i = 1, \dots, n$, выполнено равенство

$$\mathrm{Comp}^{\pi\sigma}\left(\varphi^{\sigma}, \psi_{1\sigma^{-1}}^{\tau_{1\sigma^{-1}}}, \dots, \psi_{n\sigma^{-1}}^{\tau_{n\sigma^{-1}}}\right) = \mathrm{Comp}^{\pi}(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n)^{\mathrm{Comp}^{\pi}(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_n)}, \tag{6}$$

то операда $\mathscr{C}$ называется *симметрической.* Соотношение (6) называют *условием эквивариантности композиции* относительно действия симметрической группы.

Например, Sym является симметрической операдой относительно регулярного правого действия S_n на $\mathrm{Sym}(n)$: $\varphi^{\sigma} = \varphi\sigma$, $\sigma \in S_n$, $\varphi \in \mathrm{Sym}(n) = \Bbbk S_n$.

Пусть $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ — две операды. *Функтором* из $\mathscr{C}_1$ в $\mathscr{C}_2$ называется семейство $F = \{F_n\}_{n\geq 1}$ линейных отображений $F_n : \mathscr{C}_1(n) \to \mathscr{C}_2(n)$, $n \geq 1$, которое сохраняет правило композиции и единицу. Если $\mathscr{C}_i$ являются симметрическими операдами и каждое отображение F_n, $n \geq 1$, S_n-инвариантно, то F называется *симметрическим функтором.*

Для двух (симметрических) операд $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ набор линейных пространств $\mathscr{C}(n) = \mathscr{C}_1(n) \otimes \mathscr{C}_2(n)$, $n \geq 1$, задает (симметрическую) операду относительно покомпонентного правила композиции (и покомпонентного действия симметрической группы). Мы будем обозначать полученную таким образом операду через $\mathscr{C}_1 \otimes \mathscr{C}_2$.

1.3. Примеры операд. Выше был рассмотрен пример операды Sym, построенной на симметрических группах. Здесь мы приведем другие примеры операд, которые понадобятся в дальнейшем. Всюду до конца этого пункта π означает разбиение $(m_1, \dots, m_n) \in \Pi(m, n)$, σ — некоторая подстановка из S_n.

1.3.1. Операда $\mathscr{E}$. Пусть $\mathscr{E}(n) = \Bbbk^n$ и $\{e_1^{(n)}, \dots, e_n^{(n)}\}$ — стандартный базис пространства $\Bbbk^n$. Определим правило композиции и действие группы S_n следующим образом:

$$\mathrm{Comp}^{\pi}\left(e_i^{(n)}, e_{j_1}^{(m_1)}, \dots, e_{j_n}^{(m_n)}\right) = e_{m_1+\dots+m_{i-1}+j_i}^{(m)}, \quad \sigma : e_i^{(n)} \mapsto e_{i\sigma}^{(n)}.$$

Получаем симметрическую операду. Пространство $\mathscr{E}(n)$ можно рассматривать как образ $\mathrm{Sym}(n)$ при отображении $F_n : \Bbbk S_n \to \Bbbk^n$, заданном правилом $F_n(\sigma) = \sigma S_{n-1}$, отождествляя $(in)S_{n-1}$ с $e_i^{(n)}$. Семейство отображений F_n, $n \geq 1$, определяет функтор из Sym в $\mathscr{E}$, который, однако, не является симметрическим.

1.3.2. Операды $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$. Пусть V — линейное пространство над полем $\Bbbk$. Определим операду, которую также будем обозначать символом V, следующим образом:
$$V(n) = \mathrm{Hom}(V^{\otimes n}, V), \quad n \geq 1,$$
Comp — обычная композиция полилинейных отображений. Для $f \in V(n)$ положим $f^\sigma(v_1, \dots, v_n) = f(v_{1\sigma}, \dots, v_{n\sigma})$, $v_i \in V$. Полученная операда является симметрической. Класс операд, построенных на векторных пространствах над полем $\Bbbk$ указанным образом, обозначим через $\mathrm{Vec}_{\Bbbk}$.

1.3.3. Операды H-mod. Пусть H — кокоммутативная биалгебра с копроизведением $\Delta : H \to H \otimes H$. Мы будем использовать стандартную запись Свидлера: $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, $(\Delta \otimes \mathrm{id}_H)\Delta(h) = (\mathrm{id}_H \otimes \Delta)\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)} \otimes h_{(3)}$, $h \in H$, и т. д.

Для любого левого унитального H-модуля M рассмотрим
$$M(n) = \mathrm{Hom}_{H^{\otimes n}}(M^{\otimes n}, H^{\otimes n} \otimes_H M), \tag{7}$$
где $H^{\otimes n}$ рассматривается как правый H-модуль, полученный тензорным произведением регулярных правых H-модулей.

Произвольное отображение $f \in M(n)$ может быть расширено до
$$f : (H^{\otimes m_1} \otimes_H M) \otimes \dots \otimes (H^{\otimes m_n} \otimes_H M) \to H^{\otimes m} \otimes_H M, \quad m = m_1 + \dots + m_n,$$
по следующему правилу: если $G_i \in H^{\otimes m_i}$, $a_i \in M$, $i = 1, \dots, n$, то
$$\begin{aligned} f(G_1 \otimes_H a_1, \dots, G_n \otimes_H a_n) \\ = (G_1 \otimes \dots \otimes G_n \otimes_H 1)(\Delta^{m_1 - 1} \otimes \dots \otimes \Delta^{m_n - 1} \otimes_H \mathrm{id}_M) f(a_1, \dots, a_n). \end{aligned} \tag{8}$$
Построенное расширение позволяет определить композицию отображений вида (7) точно так же, как композицию обычных полилинейных отображений. Соотношение
$$\varphi^\sigma(a_1, \dots, a_n) = (\sigma \otimes_H \mathrm{id}_M)\varphi(a_{1\sigma}, \dots, a_{n\sigma}),$$
где $(h_1 \otimes \dots \otimes h_n)^\sigma = (h_{1\sigma^{-1}} \otimes \dots \otimes h_{n\sigma^{-1}}) \in H^{\otimes n}$, задает действие группы S_n на $M(n)$. Построенную симметрическую операду обозначим тем же символом M, а класс всех таких операд — через H-mod.

1.3.4. Операда Alg. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество переменных. Всюду ниже мы будем использовать обозначение $(x_1 \dots x_n)$ для неассоциативного слова, полученного из $x_1 \dots x_n$ некоторой расстановкой скобок. Через $\mathrm{Alg}(n)$ обозначим линейную оболочку всех неассоциативных слов вида $(x_1 \dots x_n)$. Естественное правило композиции
$$\begin{aligned} \mathrm{Comp}^\pi(u, v_1, \dots, v_n) \\ = u(v_1(x_{(1,1)^\pi}, \dots, x_{(1,m_1)^\pi}), \dots, v_n(x_{(n,1)^\pi}, \dots, x_{(n,m_n)^\pi})) \end{aligned} \tag{9}$$
определяет операду, обозначаемую через Alg. Эта операда не является симметрической, но ее можно «симметризовать».

Рассмотрим $\mathrm{Alg}_S(n) = \mathrm{Alg}(n) \otimes \Bbbk S_n$, снабженное следующим правилом композиции:
$$\begin{aligned} \mathrm{Comp}^\pi(u \otimes \sigma, v_1 \otimes \tau_1, \dots, v_n \otimes \tau_n) \\ = \mathrm{Comp}^{\pi\sigma^{-1}}(u, v_{1\sigma}, \dots, v_{n\sigma}) \otimes \mathrm{Comp}^{\pi\sigma^{-1}}(\sigma, \tau_{1\sigma}, \dots, \tau_{n\sigma}). \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь и всюду ниже мы будем отождествлять $(x_1 \dots x_n) \otimes \sigma$ и $(x_{1\sigma} \dots x_{n\sigma})$. Относительно естественного действия группы S_n (перестановки переменных) построенная операда Alg_S является симметрической.

Если $\mathscr{C}$ — симметрическая операда и Φ — некоторый функтор из Alg в $\mathscr{C}$, то Φ может быть продолжен до симметрического функтора из Alg_S в $\mathscr{C}$ по следующему очевидному правилу:

$$\Phi_n(u \otimes \sigma) = \Phi_n(u)^\sigma, \quad u \in \mathrm{Alg}(n),\ \sigma \in S_n.$$

1.3.5. Операда $\mathrm{Var\,Alg}$. Пусть Var — однородное многообразие (неассоциативных) алгебр, определенное семейством полилинейных тождеств. Через $\Bbbk_{\mathrm{Var}}\{X\}$ обозначим свободную алгебру в этом многообразии, порожденную множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Пусть I_{Var} — идеал свободной алгебры $\Bbbk\{X\}$ такой, что $\Bbbk_{\mathrm{Var}}\{X\} \simeq \Bbbk\{X\}/I_{\mathrm{Var}}$.

Каждое пространство $\mathrm{Alg}_S(n)$, $n \geq 1$, можно рассматривать как подпространство в $\Bbbk\{X\}$. Обозначим

$$\mathrm{Var\,Alg}(n) = \mathrm{Alg}_S(n)/(\mathrm{Alg}_S(n) \cap I_{\mathrm{Var}}).$$

Поскольку многообразие Var однородно, правило композиции и действие симметрической группы корректно определены на пространствах $\{\mathrm{Var\,Alg}(n)\}_{n\geq 1}$. Следовательно, мы получаем симметрическую операду, обозначаемую $\mathrm{Var\,Alg}$. Семейство проекций

$$\mathrm{Alg}_S(n) \to \mathrm{Var\,Alg}(n), \quad n \geq 1,$$

является функтором из Alg_S в $\mathrm{Var\,Alg}$, который мы также будем обозначать через Var.

1.4. Алгебры и псевдоалгебры. Пусть A означает (неассоциативную) алгебру над полем $\Bbbk$. Тогда существует функтор (также обозначаемый через A) из Alg в операду $A \in \mathrm{Vec}_\Bbbk$, построенную на пространстве A. В самом деле, для любого $u = (x_1 \dots x_n) \in \mathrm{Alg}(n)$ определим $A_n(u) : a_1 \otimes \dots \otimes a_n \to (a_1 \dots a_n) \in A$.

Обратно, любой функтор F из Alg в операду $A \in \mathrm{Vec}_\Bbbk$ определяет операцию $F_2(x_1x_2) : A \otimes A \to A$, относительно которой A является алгеброй.

Таким образом, понятие алгебры можно отождествить с понятием функтора из Alg в операду класса $\mathrm{Vec}_\Bbbk$. Аналогично псевдоалгебра [9] — это функтор из Alg в операду класса H-mod. Именно, если $C : \mathrm{Alg} \to C \in H\text{-mod}$, то операция $a * b = C_2(x_1x_2)(a, b)$, $a, b \in C$, называется *псевдопроизведением.* Это $H^{\otimes 2}$-линейное отображение из $C \otimes C$ в $H^{\otimes 2} \otimes_H C$.

Поскольку $\mathrm{Vec}_\Bbbk$ и H-mod состоят из симметрических операд, любую (псевдо)алгебру можно рассматривать как функтор, определенный на $\mathrm{Alg}_S(n)$.

Теперь совершенно очевидно, как можно единообразно определить многообразия алгебр и псевдоалгебр. В самом деле, пусть Var — многообразие, как в п. 1.3.5. Алгебра A принадлежит многообразию Var (является Var-алгеброй) тогда и только тогда, когда существует функтор $\overline{A} : \mathrm{Var\,Alg} \to A \in \mathrm{Vec}_\Bbbk$ такой, что $A = \mathrm{Var} \circ \overline{A}$. Для псевдоалгебр требуется лишь заменить класс операд $\mathrm{Vec}_\Bbbk$ на H-mod, чтобы определить, что есть класс Var-псевдоалгебр.

Данный подход приводит к тем же тождествам псевдоалгебр, что были получены в [8]. Если Var определено семейством Σ полилинейных тождеств, то псевдоалгебра C является Var-псевдоалгеброй тогда и только тогда, когда C удовлетворяет тождествам

$$t^*(x_1, \dots, x_n), \quad t \in \Sigma,$$

где t^* получено из t следующим образом: каждый моном $\alpha(x_{1\sigma}\dots x_{n\sigma})$, $\alpha\in\Bbbk$, $\sigma\in S_n$, который встречается в t, следует заменить на $(\sigma\otimes_H\alpha)(x_{1\sigma}*\dots*x_{n\sigma})$. Выражение $(x_{1\sigma}*\dots*x_{n\sigma})$ может быть вычислено на элементах $a_1,\dots,a_n\in C$ по формуле (8), его значение лежит в $H^{\otimes n}\otimes_H C$.

Замечание. Класс Var-псевдоалгебр над H не является, вообще говоря, многообразием в обычном смысле: если $\dim H=\infty$, то прямое произведение бесконечного числа псевдоалгебр даже не является псевдоалгеброй.

§ 2. Диалгебры и соответствующие операды

Рассмотрим операду Dialg, которая аналогична Alg, но построена на двух бинарных операциях умножения $\dashv$, $\vdash$. Пространство $\mathrm{Dialg}(n)$ — это линейная оболочка всех термов, полученных из слова $x_1\dots x_n$ расстановкой скобок и операций $\dashv$, $\vdash$. То же самое соотношение (9) определяет правило композиции на Dialg.

Через Dialg_S обозначим симметрическую операду, полученную из Dialg так же, как Alg_S получается из Alg. Операда Dialg (Dialg_S) имеет следующее свойство: для любой (симметрической) операды $\mathscr{C}$ и для любых $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{C}(2)$ существует единственный (симметрический) функтор $\Psi:\mathrm{Dialg}\to\mathscr{C}$ ($\mathrm{Dialg}_S\to\mathscr{C}$) такой, что $\Psi_2(x_1\vdash x_2)=\varphi_1$, $\Psi_2(x_1\dashv x_2)=\varphi_2$. В частности, для $\mathscr{C}=\mathrm{Alg}_S\otimes\mathscr{E}$ существует $\Psi:\mathrm{Dialg}_S\to\mathrm{Alg}_S\otimes\mathscr{E}$ такой, что

$$\Psi_2(x_1\vdash x_2)=x_1x_2\otimes e_2^{(2)},\quad \Psi_2(x_1\dashv x_2)=x_1x_2\otimes e_1^{(2)}. \tag{11}$$

Всюду ниже мы будем через Ψ обозначать функтор $\mathrm{Dialg}_S\to\mathrm{Alg}_S\otimes\mathscr{E}$, определенный соотношением (11). Очевидно, что этот функтор является полным, т. е. $\Psi_n(\mathrm{Dialg}_S(n))=\mathrm{Alg}_S(n)\otimes\mathscr{E}(n)$ для любого $n\geq 1$.

Определение 1. Диалгебра A называется 0-*диалгеброй*, если для любых $x,y,z\in A$ выполняются равенства

$$(x\dashv y)\vdash z=(x\vdash y)\vdash z,\quad x\dashv(y\vdash z)=x\dashv(y\dashv z). \tag{12}$$

Цель этого параграфа — доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Диалгебра* $A:\mathrm{Dialg}_S\to A\in\mathrm{Vec}_\Bbbk$ *является* 0-*диалгеброй тогда и только тогда, когда существует симметрический функтор* $\overline{A}:\mathrm{Alg}_S\otimes\mathscr{E}\to A$ *такой, что* $A=\Psi\circ\overline{A}$.

Утверждение «тогда» очевидно: тождества (12) лежат в ядре отображения Ψ_3.

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа с коединицей ε и антиподом S.

Если C — левый унитальный H-модуль, то пространство $H^{\otimes n}\otimes_H C$ изоморфно $H^{\otimes n-1}\otimes C$ [9]. Мы будем обозначать соответствующий изоморфизм через i_n ($n\geq 1$), а именно

$$i_n(h_1\otimes\dots\otimes h_n\otimes_H a)=h_1S(h_{n(1)})\otimes\dots\otimes h_{n-1}S(h_{n(n-1)})\otimes h_{n(n)}a,$$

$h_i\in H$, $a\in C$.

Для некоторой операды $C\in H\text{-mod}$ обозначим через $C^{(0)}$ операду класса $\mathrm{Vec}_\Bbbk$, построенную на C как на линейном пространстве.

Лемма 2. *Семейство линейных отображений*

$$\varepsilon_n : C(n) \to C^{(0)}(n), \quad n \geq 1,$$

заданных правилом

$$\varepsilon_n(f)(a_1, \ldots, a_n) = (\varepsilon^{\otimes n-1} \otimes \mathrm{id}) i_n(f(a_1, \ldots, a_n)), \quad f \in C(n),$$

определяет (*не симметрический*) *функтор из* C *в* $C^{(0)}$.

Доказательство. Из правила продолжения (8) непосредственно следует, что для любых $f \in C(n)$, $g_i \in C(m_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $\pi = (m_1, \ldots, m_n) \in \Pi(m, n)$ имеем

$$\varepsilon_m(\mathrm{Comp}^\pi(f, g_1, \ldots, g_n)) = \mathrm{Comp}^\pi(\varepsilon_n(f), \varepsilon_{m_1}(g_1), \ldots, \varepsilon_{m_n}(g_n)).$$

Следовательно, семейство отображений ε_n, $n \geq 1$, определяет функтор (также обозначаемый через ε). $\square$

Пусть C — некоторая H-псевдоалгебра, рассматриваемая как функтор $\mathrm{Alg}_S \to C \in H\text{-mod}$. По универсальному свойству операды Dialg_S существует однозначно определенный симметрический функтор из Dialg_S в $C^{(0)} \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ (также обозначаемый через $C^{(0)}$) такой, что

$$\begin{aligned} C_2^{(0)}(x_1 \vdash x_2) &= \varepsilon_2(C_2(x_1 x_2)) \in C^{(0)}(2), \\ C_2^{(0)}(x_1 \dashv x_2) &= \varepsilon_2(C_2(x_2 x_1))^{(12)} \in C^{(0)}(2). \end{aligned} \tag{13}$$

В частности, для любых $a, b \in C$

$$a \vdash b = C_2^{(0)}(x_1 \vdash x_2)(a, b) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) i_2(a * b),$$
$$a \dashv b = C_2^{(0)}(x_1 \dashv x_2)(a, b) = \varepsilon_2(C_2(x_2 x_1))(b, a) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) i_2\{a * b\},$$

где $\{a * b\} = ((12) \otimes_H \mathrm{id})(a * b)$.

Лемма 3. *Для любой H-псевдоалгебры C диалгебра $C^{(0)}$, определенная формулой* (13), *является* 0-*диалгеброй.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что тождества (12) выполнены на $C^{(0)}$. Проверим, например, второе из этих тождеств.

Если $y * z = \sum\limits_i h_i \otimes 1 \otimes_H u_i$, $x * u_i = \sum\limits_j h_j \otimes 1 \otimes_H v_{ij}$, то

$$x \dashv (y \vdash z) = x \dashv \Big(\sum_i \varepsilon(h_i) u_i\Big) = \sum_{i,j} h_j \varepsilon(h_i) v_{ij}.$$

С другой стороны,

$$x * h_i u_i = \sum_j h_j \otimes h_i \otimes_H v_{ij} = h_j S(h_{i(1)}) \otimes 1 \otimes_H h_{i(2)} v_{ij},$$

следовательно,

$$x \dashv (y \dashv z) = x \dashv \Big(\sum_i h_i u_i\Big) = \sum_{i,j} h_j S(h_{i(1)}) h_{i(2)} v_{ij} = \sum_{i,j} h_j \varepsilon(h_i) v_{ij}. \quad \square$$

Предложение 4. *Для любой* 0*-диалгебры* A *существует* H*-псевдоалгебра* $C = C(A)$ *над* $H = \Bbbk[T]$ *такая, что* A *вкладывается в* $C^{(0)}$.

Доказательство. Здесь мы рассматриваем $\Bbbk[T]$ относительно обычной структуры алгебры Хопфа: $\Delta(T) = T \otimes 1 + 1 \otimes T$, $\varepsilon(T) = 0$, $S(T) = -T$.

Пусть A — некоторая 0-диалгебра. Обозначим $\langle a, b\rangle = a \vdash b - a \dashv b$. Из (12) следует, что $\langle a, b\rangle \vdash c = 0$, $a \dashv \langle b, c\rangle = 0$ для любых $a, b, c \in A$.

Рассмотрим линейное пространство

$$C = (H \otimes A) \oplus ((A \otimes A)/\operatorname{Span}\{\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle \mid a, b, c, d \in A\}).$$

Первое слагаемое является свободным H-модулем, второе наделяется структурой H-модуля следующим образом. Определим $T : A \otimes A \to A$ по правилу

$$T(a \otimes b) = \langle a, b\rangle, \quad a, b \in A, \tag{14}$$

и заметим, что $U = \operatorname{Span}\{\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle \mid a, b, c, d \in A\}$ лежит в ядре оператора T. Следовательно, действие T корректно определено на $(A \otimes A)/U$.

В дальнейшем мы будем отождествлять $1 \otimes a \in H \otimes A$ с a и записывать $a \otimes b$ $(a, b \in A)$ для обозначения образа соответствующего элемента в C.

Определим псевдопроизведение на C следующим образом:

$$a * b = 1 \otimes 1 \otimes_H (a \vdash b) - T \otimes 1 \otimes_H (a \otimes b), \tag{15}$$

$$a * (b \otimes c) = 1 \otimes 1 \otimes_H a \otimes \langle b, c\rangle = 1 \otimes 1 \otimes_H a \otimes T(b \otimes c), \tag{16}$$

$$(a \otimes b) * c = -1 \otimes 1 \otimes_H (\langle a, b\rangle \otimes c) = -1 \otimes 1 \otimes_H (T(a \otimes b) \otimes c), \tag{17}$$

$$(a \otimes b) * (c \otimes d) = 0. \tag{18}$$

Эта операция корректно определена и $H^{\otimes 2}$-линейна. Легко видеть, что A — поддиалгебра в $C^{(0)}$. $\square$

Лемма 5. *Пусть* C *— некоторая* H*-псевдоалгебра. Рассмотрим семейство линейных отображений*

$$C_n^{(\varepsilon)} : \operatorname{Alg}_S(n) \otimes \mathscr{E}(n) \to C^{(0)}(n), \quad n \geq 1,$$

определенных следующим образом: если

$$C_n(f)(a_1, \dots, a_n) = \sum_j h_{1j} \otimes \dots \otimes h_{nj} \otimes_H b_j, \quad f \in \operatorname{Alg}_S(n),\ a_i, b_j \in C,\ h_{ij} \in H,$$

то

$$C_n^{(\varepsilon)}\bigl(f \otimes e_i^{(n)}\bigr)(a_1, \dots, a_n) = \sum_j \varepsilon(h_{1j} \overset{i}{\hat{\dots}} h_{nj}) h_{ij} b_j.$$

Эти отображения определяют симметрический функтор $C^{(\varepsilon)} : \operatorname{Alg}_S \otimes \mathscr{E} \to C^{(0)} \in \mathrm{Vec}_\Bbbk$.

Доказательство. Из определения отображений $C_n^{(\varepsilon)}$ следует, что

$$\bigl(C_n^{(\varepsilon)}\bigl(f \otimes e_i^{(n)}\bigr)\bigr)^\sigma = C_n^{(\varepsilon)}\bigl(f^\sigma \otimes e_{i\sigma}^{(n)}\bigr), \quad f \in \operatorname{Alg}_S(n),\ i = 1, \dots, n,\ \sigma \in S_n.$$

Остается проверить, что $C_n^{(\varepsilon)}$ сохраняет композиции. Поскольку правило композиции ассоциативно (O1) и эквивариантно (O2), достаточно рассмотреть $\pi = (n, m - n) \in \Pi(m, 2)$, $x_1x_2 \in \operatorname{Alg}(2)$, $u_1 \in \operatorname{Alg}(n)$, $u_2 \in \operatorname{Alg}(m - n)$ и

$$C_m^{(\varepsilon)}\bigl(\operatorname{Comp}^\pi\bigl(x_1x_2 \otimes e_i^{(2)}, u_1 \otimes e_k^{(n)}, u_2 \otimes e_l^{(m-n)}\bigr)\bigr)$$
$$= C_m^{(\varepsilon)}\bigl(f \otimes e_p^{(m)}\bigr), \quad p = \begin{cases} k, & i = 1, \\ n + l, & i = 2, \end{cases} \tag{19}$$

где $f = u_1(x_1, \dots, x_n)u_2(x_{n+1}, \dots, x_m)$. Легко заметить, что композиция

$$\mathrm{Comp}^{(n,m-n)}\left(C_2^{(\varepsilon)}\big(x_1x_2 \otimes e_i^{(2)}\big), C_n^{(\varepsilon)}\big(u_1 \otimes e_k^{(n)}\big), C_{m-n}^{(\varepsilon)}\big(u_2 \otimes e_l^{(m-n)}\big)\right)$$

совпадает с (19). $\square$

Доказательство теоремы 1. Пусть A — некоторая 0-диалгебра. Обозначим через $C = C(A)$ ее обертывающую псевдоалгебру, построенную в предложении 4. Функтор $C : \mathrm{Alg}_S \to C \in H\text{-mod}$ индуцирует два функтора

$$C^{(0)} : \mathrm{Dialg}_S \to C^{(0)} \quad \text{и} \quad C^{(\varepsilon)} : \mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E} \to C^{(0)}$$

по леммам 2 и 5 соответственно. Очевидно, $\Psi \circ C^{(\varepsilon)} = C^{(0)}$. Следовательно, если $\Psi_n(f) = 0$ для некоторого $f \in \mathrm{Dialg}_S(n)$, то $C_n^{(0)}(f) = 0$ в $C^{(0)}(n)$. Поскольку A вкладывается в $C^{(0)}$, то f является тождеством на A.

Таким образом, если $\Psi_n(f) = 0$ для $f \in \mathrm{Dialg}_S(n)$, то f является тождеством на 0-диалгебре A. Следовательно, существует семейство линейных отображений $\overline{A}_n : \mathrm{Alg}_S(n) \otimes \mathscr{E}(n) \to A(n)$ таких, что $A_n = \Psi_n \otimes \overline{A}_n$, $n \geq 1$. Это семейство определяет симметрический функтор $\overline{A}$ из $\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E}$ в $A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$. $\square$

§ 3. Многообразия диалгебр

Пусть Var — однородное многообразие, определенное семейством Σ полилинейных тождеств от переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Тогда I_{Var} — идеал свободной алгебры $\Bbbk\{X\}$, порожденный множеством $\{t(f_1, \dots, f_n) \mid t(x_1, \dots, x_n) \in \Sigma,\ f_i \in \Bbbk\{X\}\}$.

Из теоремы 1 следует, что любая 0-диалгебра A может рассматриваться как функтор из операды $\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E}$ в $A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$. Ввиду этого наблюдения следующее определение весьма естественно.

Определение 2. Диалгебра $A : \mathrm{Dialg}_S \to A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$ *принадлежит многообразию* Var *диалгебр* (или, короче, *является* Var-*диалгеброй*), если существует симметрический функтор

$$\overline{A} : \mathrm{Var\,Alg} \otimes \mathscr{E} \to A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$$

такой, что $\Psi \circ (\mathrm{Var} \otimes \mathrm{id}) \circ \overline{A} = A$, т. е. диаграмма функторов

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Dialg}_S & \xrightarrow{A} & A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk} \\ {\scriptstyle\Psi}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle\overline{A}} \\ \mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E} & \xrightarrow{\mathrm{Var} \otimes \mathrm{id}} & \mathrm{Var\,Alg} \otimes \mathscr{E} \end{array}$$

коммутирует.

Предложение 6. *Диалгебра A является* Var-*диалгеброй тогда и только тогда, когда A является 0-диалгеброй, удовлетворяющей тождествам $\Psi_n^{-1}\big(t \otimes e_i^{(n)}\big)$, где $t \in \Sigma$, $n = \deg t$, $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Нуждается в доказательстве только прямое утверждение («тогда»). Поскольку A — 0-диалгебра, то A можно рассматривать как функтор $A : \mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E} \to A \in \mathrm{Vec}_{\Bbbk}$.

Предположим, что $f \in (\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E})(n)$, $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \otimes e_i^{(n)}$, $f_i \in \mathrm{Alg}_S(n)$. Если $(\mathrm{Var}_n \otimes \mathrm{id})(f) = 0$, то $\mathrm{Var}_n(f_i) = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Следовательно, необходимо показать, что если $\mathrm{Var}_n(g) = 0$ для некоторого $g \in \mathrm{Alg}_S(n)$, то $A_n\big(g \otimes e_i^{(n)}\big) = 0$ для всех $i = 1,\dots,n$. Так как $\operatorname{Ker}\mathrm{Var}_n = \mathrm{Alg}_S(n) \cap I_{\mathrm{Var}}$, элемент g может быть представлен в виде

$$g = \sum_k \mathrm{Comp}^{\pi_k}(a_k, b_{k1}, \dots, b_{kl_k})^{\sigma_k},$$

где $a_k \in \mathrm{Alg}_S(l_k)$, $b_{kj} \in \mathrm{Alg}_S(m_{kj})$, $\pi_k = (m_{k1},\dots,m_{kl_k}) \in \Pi(n, l_k)$, $\sigma_k \in S_n$, и для каждого k найдется $j_k \in \{1,\dots,l_k\}$ такое, что

$$b_{kj_k} = \mathrm{Comp}^{\tau_k}(t_k, c_{k1}, \dots, c_{km_k}), \quad t_k \in \Sigma, \quad c_{km} \in \mathrm{Alg}_S(q_m).$$

Для любого $i \in \{1,\dots,n\}$ элемент $g \otimes e_i^{(n)}$ может быть записан как композиция в $\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E}$ с теми же a_k, b_{kj}, t_k, c_{km} в первом тензорном множителе (так как правило композиции в $\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E}$ задано покомпонентно). Таким образом, $A_n\big(g \otimes e_i^{(n)}\big) = 0$ для всех $i = 1,\dots,n$ при условии, что $A_{m_k}\big(t_k \otimes e_p^{(m_k)}\big) = 0$ для любого $p = 1,\dots,m_k$. $\square$

Чтобы в явном виде выписать определяющие тождества многообразия Var-диалгебр, приведем следующую полезную конструкцию. Рассмотрим функтор $\alpha : \mathrm{Dialg} \to \mathrm{Alg} \otimes \mathrm{Sym}$, заданный правилом $\alpha_2(x_1 \vdash x_2) = x_1x_2 \otimes \mathrm{id}_2$, $\alpha_2(x_1 \dashv x_2) = x_1x_2 \otimes (12)$. Обозначим через E следующий функтор из Sym в $\mathscr{E}$: $E_n(\sigma) = e^{(n)}_{n\sigma^{-1}}$.

Лемма 7. *Если $u \otimes \sigma \in \mathrm{Dialg}_S(n)$, $\alpha_n(u) = v \otimes \tau$, то*

$$\Psi_n(u \otimes \sigma) = (v \otimes \sigma) \otimes E_n(\tau)^\sigma. \tag{20}$$

Доказательство. Обозначим правую часть соотношения (20) через $\Phi_n(u \otimes \sigma)$. Достаточно показать, что

1) $\Phi_n((u \otimes \sigma))^{\sigma_1} = \Phi_n(u \otimes \sigma\sigma_1)$;

2) отображения Φ_n, $n \geq 1$, сохраняют композицию.

Первое утверждение очевидно. Второе достаточно проверить для $u = u_1 \vdash u_2$ и $u = u_1 \dashv u_2$, $\sigma = \mathrm{id}_n$, $u_i \in \mathrm{Dialg}(n_i)$, $n_1 + n_2 = n$.

Если $u = u_1 \vdash u_2$, $\alpha_{n_i}(u_i) = v_i \otimes \tau_i$, то $\alpha_n(u) = v_1v_2 \otimes \mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}(\mathrm{id}_2, \tau_1, \tau_2)$. Следовательно,

$$\Phi_n(u \otimes \mathrm{id}_n) = v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n \otimes e^{(n)}_{n_1+n_2\tau_2^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}\big(x_1x_2 \otimes e_2^{(2)}, \Phi_{n_1}(v_1 \otimes \mathrm{id}_{n_1}), \Phi_{n_2}(v_2 \otimes \mathrm{id}_{n_2})\big) \\ = (v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n) \otimes \mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}\big(e_2^{(2)}, e^{(n_1)}_{n_1\tau_1^{-1}}, e^{(n_2)}_{n_2\tau_2^{-1}}\big) = v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n \otimes e^{(n)}_{n_1+n_2\tau_2^{-1}}.\end{gathered}$$

Если $u = u_1 \dashv u_2$, $\alpha_{n_i}(u_i) = v_i \otimes \tau_i$, то $\alpha_n(u) = v_1v_2 \otimes \mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}((12), \tau_1, \tau_2)$. Следовательно,

$$\Phi_n(u \otimes \mathrm{id}_n) = v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n \otimes e^{(n)}_{n_1\tau_1^{-1}}.$$

С другой стороны,

$$\begin{gathered}\mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}\big(x_1x_2 \otimes e_1^{(2)}, \Phi_{n_1}(v_1 \otimes \mathrm{id}_{n_1}), \Phi_{n_2}(v_2 \otimes \mathrm{id}_{n_2})\big) \\ = (v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n) \otimes \mathrm{Comp}^{(n_1,n_2)}\big(e_1^{(2)}, e^{(n_1)}_{n_1\tau_1^{-1}}, e^{(n_2)}_{n_2\tau_2^{-1}}\big) = v_1v_2 \otimes \mathrm{id}_n \otimes e^{(n)}_{n_1\tau_1^{-1}}.\end{gathered}$$

Таким образом, семейство отображений Φ_n, $n \ge 1$, определяет симметрический функтор Φ из Dialg_S в $\mathrm{Alg}_S \otimes \mathscr{E}$, который совпадает с Ψ на $\mathrm{Dialg}_S(2)$. Значит, $\Phi = \Psi$. $\square$

Чтобы построить $\Psi_n^{-1}\big(v \otimes \sigma \otimes e_i^{(n)}\big)$ для некоторого слова $v \in \mathrm{Alg}(n)$, $\sigma \in S_n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, достаточно расставить знаки операций $\dashv$, $\vdash$ в слове v, сохраняя расстановку скобок, таким образом, чтобы для полученного одночлена $v_i^d \in \mathrm{Dialg}(n)$ выполнялось $\alpha_n\big(v_i^d\big) = v \otimes \tau$, где $i\sigma^{-1} = n\tau^{-1}$. Тогда $v_i^d \otimes \sigma \in \mathrm{Dialg}_S(n)$ будет прообразом $v \otimes \sigma \otimes e_i^{(n)}$ при отображении Ψ_n.

Способ выбора такой расстановки операций весьма прост. Пусть $v \otimes \sigma = (x_{1\sigma} \dots x_{n\sigma}) \in \mathrm{Alg}_S(n)$. Тогда

$$v_i^d \otimes \sigma = (x_{1\sigma} \vdash \dots \vdash x_i \dashv \dots \dashv x_{n\sigma}),$$

т. е. горизонтальные штрихи символов операций всегда направлены на выбранную переменную x_i.

Рассмотрим некоторые примеры многообразий.

Ассоциативные диалгебры. В этом случае $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3)\}$, $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Из леммы 7 следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_3^{-1}\big((x_1, x_2, x_3) \otimes e_1^{(3)}\big) &= (x_1, x_2, x_3)_\dashv, \\ \Psi_3^{-1}\big((x_1, x_2, x_3) \otimes e_2^{(3)}\big) &= (x_1, x_2, x_3)_\times, \\ \Psi_3^{-1}\big((x_1, x_2, x_3) \otimes e_3^{(3)}\big) &= (x_1, x_2, x_3)_\vdash, \end{aligned} \tag{21}$$

где

$$(x, y, z)_\dashv = (x \dashv y) \dashv z - x \dashv (y \dashv z), \quad (x, y, z)_\times = (x \vdash y) \dashv z - x \vdash (y \dashv z),$$
$$(x, y, z)_\vdash = (x \vdash y) \vdash z - x \vdash (y \vdash z).$$

Вместе с соотношениями (12) тождества (21) образуют в точности систему аксиом (1), введенную в [2, 3].

Коммутативные диалгебры. Пусть $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_1x_2 - x_2x_1\}$. Первое тождество влечет (21), как и выше, второе эквивалентно

$$x_1 \vdash x_2 - x_2 \dashv x_1. \tag{22}$$

Таким образом, коммутативную диалгебру A можно рассматривать как обычную алгебру относительно $ab = a \vdash b$, $a, b \in A$. Эта алгебра ассоциативна и удовлетворяет тождеству perm-алгебры [10]

$$[x_1, x_2]x_3 = 0. \tag{23}$$

Обратно, любая ассоциативная алгебра, удовлетворяющая тождеству (23), является коммутативной диалгеброй.

Альтернативные диалгебры. Пусть $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) + (x_2, x_1, x_3),\ (x_1, x_2, x_3) + (x_1, x_3, x_2)\}$. Мы уже видели, что получается из $(x_1, x_2, x_3) \otimes e_i^{(3)}$ при Ψ_3^{-1}. Следовательно, из тождеств Σ получаются тождества

$$\begin{aligned} &(x_1, x_2, x_3)_\dashv + (x_1, x_2, x_3)_\times^{(12)}, \quad (x_1, x_2, x_3)_\vdash + (x_1, x_2, x_3)_\vdash^{(12)}, \\ &(x_1, x_2, x_3)_\dashv + (x_1, x_2, x_3)_\dashv^{(23)}, \quad (x_1, x_2, x_3)_\times + (x_1, x_2, x_3)_\vdash^{(23)}, \end{aligned} \tag{24}$$

которые эквивалентны системе тождеств (2), введенной в [4].

Диалгебры Ли. Если $\Sigma = \{(x_1, x_2, x_3) - x_2(x_1x_3),\ x_1x_2 + x_2x_1\}$, то соответствующие тождества диалгебр включают

$$x_1 \dashv x_2 + x_2 \vdash x_1.$$

Лиева диалгебра A, рассматриваемая как обычная алгебра относительно операции $[ab] = a \vdash b$, $a, b \in A$, является левой алгеброй Лейбница. Обратно, любая левая алгебра Лейбница L является диалгеброй Ли относительно операций $a \vdash b = [ab]$, $a \dashv b = -[ba]$. Следовательно, понятия диалгебры Ли и алгебры Лейбница эквивалентны.

Йордановы диалгебры. Пусть Σ состоит из тождества коммутативности и

$$J = x_1(x_2(x_3x_4)) + (x_2(x_1x_3))x_4 + x_3(x_2(x_1x_4)) \\ - (x_1x_2)(x_3x_4) - (x_1x_3)(x_2x_4) - (x_3x_2)(x_1x_4). \quad (25)$$

Последнее соотношение представляет собой йорданово тождество в полилинейной форме.

Следовательно, йорданова диалгебра удовлетворяет соотношению коммутативности $x_1 \dashv x_2 = x_2 \vdash x_1$ и четырем тождествам $\Psi_4^{-1}\big(J \otimes e_i^{(4)}\big)$. Если выразить эти тождества посредством операции $xy = x \vdash y$ (тогда $x \dashv y = yx$), то по модулю соотношений (12) получим систему, состоящую из (23) и

$$((x_4x_3)x_2)x_1 + x_4(x_2(x_3x_1)) + x_3(x_2(x_4x_1)) \\ = (x_4x_3)(x_2x_1) + (x_4x_2)(x_3x_1) + (x_3x_2)(x_4x_1). \quad (26)$$

$$x_1((x_4x_3)x_2) + x_4((x_3x_1)x_2) + x_3((x_4x_1)x_2) \\ = (x_4x_3)(x_1x_2) + (x_1x_3)(x_4x_2) + (x_4x_1)(x_3x_2). \quad (27)$$

Тождества (23), (26) и (27) определяют многообразие алгебр, которое находится в таком же соответствии с йордановыми алгебрами, как алгебры Лейбница с лиевыми. Алгебры этого многообразия наследуют важное свойство йордановых алгебр: коммутатор двух операторов левого умножения является дифференцированием алгебры.

§ 4. Связь с псевдоалгебрами

Как и прежде, Var — однородное многообразие, определенное семейством Σ полилинейных тождеств.

Теорема 8. *Если C — Var-псевдоалгебра над кокоммутативной алгеброй Хопфа H, то $C^{(0)}$ является Var-диалгеброй.*

Доказательство. Каждое тождество $t \in \Sigma$ степени n может быть рассмотрено как элемент пространства $\mathrm{Alg}_S(n)$, т. е. $t = \sum\limits_{\sigma \in S_n} t_\sigma \otimes \sigma$, $t_\sigma \in \mathrm{Alg}(n)$.

Зафиксируем линейный базис $\{h_i\}$ в H и некоторые элементы $a_1, \dots, a_n \in C$. Обозначим

$$C_n(t_\sigma \otimes \sigma)(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} h_{i_1} \otimes \dots \otimes h_{i_{n-1}} \otimes 1 \otimes_H b_{i_1, \dots, i_{n-1}; \sigma}.$$

Поскольку C — Var-псевдоалгебра, то для всех $i_1, \dots, i_{n-1}$ выполняется равенство $\sum\limits_{\sigma \in S_n} b_{i_1, \dots, i_{n-1}; \sigma} = 0$.

По лемме 5 $C_n^{(\varepsilon)}\big(t_\sigma\otimes\sigma\otimes e_j^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n)=\sum\limits_{i_1,\dots,i_{n-1}}\varepsilon(h_{i_1}\overset{j}{\hat{\dots}}h_{i_{n-1}})h_{i_j}b_{i_1,\dots,i_{n-1};\sigma}$ при $j\neq n$, а также $C_n^{(\varepsilon)}\big(t_\sigma\otimes\sigma\otimes e_n^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n)=\sum\limits_{i_1,\dots,i_{n-1}}\varepsilon(h_{i_1}\dots h_{i_{n-1}})b_{i_1,\dots,i_{n-1};\sigma}$. Следовательно, $C_n^{(0)}\big(\Psi_n^{-1}\big(t\otimes e_j^{(n)}\big)\big)=C_n^{(\varepsilon)}\big(t\otimes e_j^{(n)}\big)=0$ в $C^{(0)}(n)$, поэтому $C^{(0)}$ является Var-диалгеброй. $\square$

Оказывается, верно и обратное утверждение: любая Var-диалгебра может быть вложена в псевдоалгебру (над $H=\Bbbk[T]$), которая принадлежит многообразию Var псевдоалгебр.

Пусть A — некоторая Var-диалгебра. Поскольку A является, в частности, 0-диалгеброй, существует подходящая псевдоалгебра C такая, что A вкладывается в $C^{(0)}$. Цель данного параграфа — показать, что C может быть выбрана в многообразии Var псевдоалгебр.

Напомним конструкцию из предложения 4: рассмотрим $C=C_{(0)}\oplus C_{(1)}$, где $C_{(0)}=H\otimes A$, $C_{(1)}=(A\otimes A)/U$, $H=\Bbbk[T]$, $U=\operatorname{Span}\{\langle a,b\rangle\otimes\langle c,d\rangle\mid a,b,c,d\in A\}$, а псевдопроизведение задано соотношениями (15)–(18).

Как и выше, мы отождествим A и C с симметрическими функторами $A:\mathrm{Alg}_S\otimes\mathscr{E}\to A\in\mathrm{Vec}_\Bbbk$ и $C:\mathrm{Alg}_S\to C\in H$-mod соответственно.

Обозначим через $T_i^{(n)}$ элемент $(T\otimes 1\otimes\dots\otimes 1)^{(1i)}\in H^{\otimes n}$, $i=1,\dots,n$, и пусть $T_0^{(n)}=1\otimes\dots\otimes 1\in H^{\otimes n}$.

Лемма 9. *Предположим, $t\in\mathrm{Alg}(n)$, $a_1,\dots,a_n\in A$. Тогда*

$$C_n(t)(a_1,\dots,a_n)=T_0^{(n)}\otimes_H x_0-\sum_{i=1}^{n-1}T_i^{(n)}\otimes_H x_i,$$

где $x_0\in C_{(0)}$, $x_i\in C_{(1)}$,

$$x_0=A_n\big(t\otimes e_n^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n),\tag{28}$$

$$Tx_i=A_n\big(t\otimes e_n^{(n)}-t\otimes e_i^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n),\quad i=1,\dots,n-1.\tag{29}$$

Доказательство. Для $n\leq 2$ утверждение очевидно следует из (15). Предположим, требуемые равенства выполнены для всех термов степени k, $k<n$. Тогда произвольный элемент $t\in\mathrm{Alg}(n)$ может быть представлен в виде $t=\mathrm{Comp}^{(m,n-m)}(x_1x_2,t_1,t_2)$, $t_1\in\mathrm{Alg}(m)$, $t_2\in\mathrm{Alg}(n-m)$. По индукционному предположению $C_m(t_1)(a_1,\dots,a_m)=T_0^{(m)}\otimes_H x_0-\sum\limits_{i=1}^{m-1}T_i^{(m)}\otimes_H x_i$, $C_{n-m}(t_2)(a_{m+1},\dots,a_n)=T_0^{(n-m)}\otimes_H y_0-\sum\limits_{j=1}^{n-m-1}T_j^{(n-m)}\otimes_H y_j$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned}C_n(t)(a_1,\dots,a_n)&=C_m(t_1)(a_1,\dots,a_m)*C_{n-m}(t_2)(a_{m+1},\dots,a_n)\\&=T_0^{(n)}\otimes_H(x_0\vdash y_0)-\sum_{i=1}^{m}T_i^{(n)}\otimes_H(x_0\otimes y_0)\\&\quad-\sum_{i=1}^{m-1}T_i^{(n)}\otimes_H(-Tx_i)\otimes y_0-\sum_{j=1}^{n-m-1}T_{m+j}^{(n)}\otimes_H x_0\otimes Ty_j.\end{aligned}$$

Следовательно, $C_n(t)(a_1,\dots,a_n) = T_0^{(n)}\otimes_H z_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} T_i^{(n)}\otimes_H z_i$, где

$$z_i = \begin{cases} x_0 \vdash y_0, & i=0,\\ x_0\otimes y_0 - Tx_i\otimes y_0, & i=1,\dots,m-1,\\ x_0\otimes y_0, & i=m,\\ x_0\otimes Ty_{i-m}, & i=m+1,\dots,n-1.\end{cases}$$

По индукционному предположению

$$x_0 = A_m\big(t_1\otimes e_m^{(m)}\big)(a_1,\dots,a_m),\quad y_0 = A_{n-m}\big(t_2\otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)(a_{m+1},\dots,a_n).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} z_0 = A_n\big(\operatorname{Comp}^\pi\big(x_1x_2\otimes e_2^{(2)}, t_1\otimes e_m^{(m)}, t_2\otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)\big)(a_1,\dots,a_n)\\ = A_n\big(t\otimes e_n^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n),\end{aligned}$$

где $\pi=(m,n-m)\in\Pi(n,2)$. Аналогично для $i=1,\dots,m-1$ имеем

$$\begin{aligned} Tz_i &= x_0\vdash y_0 - x_0\dashv y_0 - Tx_i\vdash y_0 + Tx_i\dashv y_0\\ &= A_n\big(\operatorname{Comp}^\pi\big(x_1x_2\otimes\big(e_2^{(2)}-e_1^{(2)}\big), t_1\otimes e_m^{(m)}, t_2\otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)\big)(a_1,\dots,a_n)\\ &- A_n\big(\operatorname{Comp}^\pi\big(x_1x_2\otimes\big(e_2^{(2)}-e_1^{(2)}\big), t_1\otimes\big(e_m^{(n)}-e_i^{(m)}\big), t_2\otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)\big)(a_1,\dots,a_n)\\ &= A_n\big(t\otimes e_n^{(n)} - t\otimes e_m^{(n)} - t\otimes e_n^{(n)} + t\otimes e_n^{(n)} + t\otimes e_m^{(n)} - t\otimes e_i^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n)\\ &= A_n\big(t\otimes\big(e_n^{(n)}-e_i^{(n)}\big)\big)(a_1,\dots,a_n).\end{aligned}$$

Оставшиеся случаи $i=m,m+1,\dots,n-1$ рассматриваются аналогично. □

Лемма 10. *Предположим, $t\in \mathrm{Alg}_S(n)$, $t=u\otimes\sigma$, $u\in\mathrm{Alg}(n)$, $\sigma\in S_n$, и пусть $a_1,\dots,a_n\in A$. Тогда*

$$C_n(t)(a_1,\dots,a_n) = T_0^{(n)}\otimes_H x_{0,\sigma} - \sum_{i=1}^{n-1} T_i^{(n)}\otimes_H x_{i,\sigma},$$

где $x_0\in C_{(0)}$, $x_i\in C_{(1)}$,

$$x_{0,\sigma} = A_n\big(t\otimes e_{n\sigma^{-1}}^{(n)}\big)(a_1,\dots,a_n), \tag{30}$$

$$x_{i,\sigma} = A_n\big(t\otimes\big(e_{n\sigma^{-1}}^{(n)} - e_{i\sigma^{-1}}^{(n)}\big)\big)(a_1,\dots,a_n),\quad i=1,\dots,n-1. \tag{31}$$

Доказательство. По определению структуры операды C класса H-mod имеем $C_n(t)(a_1,\dots,a_n) = (\sigma\otimes_H\mathrm{id})C_n(u)(a_{1\sigma},\dots,a_{n\sigma})$, где $C_n(u)(a_{1\sigma},\dots,a_{n\sigma}) = T_0^{(n)}\otimes_H y_0 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} T_i^{(n)}\otimes_H y_i$, а по лемме 9 элементы $y_0,y_1,\dots,y_n$ удовлетворяют (28), (29).

Если $n\sigma=n$, то утверждение леммы очевидно. Предположим, что $n\sigma\ne n$. Поскольку $\sigma: T_i^{(n)}\mapsto T_{i\sigma}^{(n)}$, имеем

$$\begin{aligned} C_n(t)(a_1,\dots,a_n) &= T_0^{(n)}\otimes_H y_0 - \sum_{i=1}^{n-1} T_{i\sigma}^{(n)}\otimes_H y_i\\ &= T_0^{(n)}\otimes_H y_0 - T_n^{(n)}\otimes_H y_{n\sigma^{-1}} - \sum_{\substack{1\le j\le n-1,\\ j\ne n\sigma}} T_j^{(n)}\otimes_H y_{j\sigma^{-1}}\\ &= T_0^{(n)}\otimes_H (y_0 - Ty_{n\sigma^{-1}}) + \sum_{i=1}^{n-1} T_i^{(n)}\otimes_H (y_{n\sigma^{-1}} - (1-\delta_{i,n\sigma})y_{i\sigma^{-1}}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_i = \begin{cases} y_0 - Ty_{n\sigma^{-1}}, & i = 0, \\ -y_{n\sigma^{-1}} + y_{i\sigma^{-1}}, & i \neq n\sigma, \\ -y_{n\sigma^{-1}}, & i = n\sigma. \end{cases}$$

Остается применить (28) и (29), чтобы получить (30) и (31). $\square$

Лемма 11. *Пусть* $t \in \mathrm{Alg}(n)$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b \in A$. *Тогда для любого* $i = 1, \ldots, n$

$$C_n(t)(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \otimes b, a_{i+1}, \ldots, a_n) = T_0^{(n)} \otimes_H x_i,$$

где $x_i \in C_{(1)}$,

$$Tx_i = A_{n+1}\big(f_i \otimes \big(e_{i+1}^{(n+1)} - e_i^{(n+1)}\big)\big)(a_1, \ldots, a_i, b, a_{i+1}, \ldots, a_n), \quad (32)$$
$$f_i = t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}).$$

Доказательство. Пусть $t \in \mathrm{Alg}(n)$. Если $n = 1$, то утверждение очевидно. Предположим, лемма доказана для любого $k < n$. Достаточно показать, что требуемые соотношения выполняются для $t = (x_1 \ldots x_n) \in \mathrm{Alg}(n)$. Представим t в виде $t = \mathrm{Comp}^{(m,n-m)}(x_1 x_2, t_1, t_2)$, $1 \leq m \leq n$, $t_1 = (x_1 \ldots x_m)_1$, $t_2 = (x_1 \ldots x_{n-m})_2$, где $(\ldots)_1$, $(\ldots)_2$ означают некоторые расстановки скобок. Выберем $i \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда

$$C_n(t)(a_1, \ldots, a_i \otimes b_i, \ldots a_n)$$
$$= C_m(t_1)(a_1, \ldots, a_i \otimes b_i, \ldots a_m) * C_{n-m}(t_2)(a_{m+1}, \ldots, a_n).$$

По индукционному предположению $C_m(t_1)(a_1, \ldots, a_i \otimes b, \ldots, a_m) = T_0^{(m)} \otimes_H x_i$, где $x_i \in C_{(1)}$ удовлетворяет (32), а по лемме 9 $C_{n-m}(t_2)(a_{m+1}, \ldots, a_n) = T_0^{(n-m)} \otimes_H y_0 - \sum\limits_{j=1}^{n-m-1} T_j^{(n-m)} \otimes_H y_j$, $y_0 = A_{n-m}\big(t_2 \otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)(a_{m+1}, \ldots, a_n)$, $y_j \in C_{(1)}$ для $j = 1, \ldots, n-m$.

Поскольку $C_{(1)} * C_{(1)} = 0$, то $C_n(t)(a_1, \ldots, a_i \otimes b, \ldots, a_n) = \big(T_0^{(m)} \otimes_H x_i\big) * \big(T_0^{(n-m)} \otimes_H y_0\big) = -T_0^{(n)} \otimes_H (Tx_i \otimes y_0)$. Следовательно, достаточно рассмотреть $-T(Tx_i \otimes y_0) = Tx_i \dashv y_0 - Tx_i \vdash y_0$. Так как $Tx_i = A_{m+1}\big(f_i \otimes \big(e_{i+1}^{(m+1)} - e_i^{(m+1)}\big)\big)(a_1, \ldots, a_i, b, \ldots, a_m)$, где $f_i = t_1(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_{m+1})$, то $Tx_i \dashv y_0 - Tx_i \vdash y_0 = F_i(a_1, \ldots, a_i, b, \ldots, a_n)$, где

$$F_i = \mathrm{Comp}^{(m+1,n-m)}\big(x_1 x_2 \otimes \big(e_1^{(2)} - e_2^{(2)}\big), f_i \otimes \big(e_{i+1}^{(m+1)} - e_i^{(m+1)}\big), t_2 \otimes e_{n-m}^{(n-m)}\big)$$
$$= t_1(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots x_{m+1}) t_2(x_{m+2}, \ldots, x_n) \otimes \big(e_i^{(n+1)} - e_i^{(n+1)}\big)$$
$$= t(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots x_{n+1}) \otimes \big(e_i^{(n+1)} - e_i^{(n+1)}\big).$$

Оставшиеся случаи $i \in \{m+1, \ldots, n\}$ полностью аналогичны. $\square$

Лемма 12. *Пусть* $t \in \mathrm{Alg}_S(n)$, $t = u \otimes \sigma$, $u \in \mathrm{Alg}(n)$, $\sigma \in S_n$, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $b \in A$. *Тогда для любого* $i = 1, \ldots, n$ *выполняется*

$$C_n(t)(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i \otimes b, a_{i+1}, \ldots, a_n) = T_0^{(n)} \otimes_H x_i,$$

где $x_i \in C_{(1)}$,

$$Tx_i = A_{n+1}\big(f_i \otimes \big(e_{i\sigma^{-1}+1}^{(n+1)} - e_{i\sigma^{-1}}^{(n+1)}\big)\big)(a_1, \ldots, a_i, b, a_{i+1}, \ldots, a_n), \quad (33)$$
$$f_i = t(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}).$$

Доказательство. По определению операды $C \in H$-mod

$$C_n(t)(a_1,\dots,a_{i-1},a_i\otimes b,a_{i+1},\dots,a_n) = (\sigma\otimes_H \mathrm{id})C_n(u)(z_1,\dots,z_n),$$

где $z_j = a_{j\sigma}$ для $j \neq i\sigma^{-1}$ и $z_{i\sigma^{-1}} = a_i\otimes b$. Из леммы 11 вытекает требуемое соотношение. □

Теорема 13. *Для любой* Var*-диалгебры A существует* Var*-псевдоалгебра $C_{\mathrm{Var}}(A)$ такая, что $A \subseteq C_{\mathrm{Var}}(A)^{(0)}$.*

Доказательство. Рассмотрим псевдоалгебру $C = C(A)$ из предложения 4. Достаточно показать, что найдется идеал I в C такой, что $I \cap C_{(0)} = 0$ и C/I является Var-псевдоалгеброй.

Напомним, что Σ — система определяющих тождеств многообразия Var. Для любого $t\in\Sigma$ степени $n\geq 2$, рассмотрим выражения

$$C_n(t)(a_1,\dots,a_n) = T_0^{(n)}\otimes_H x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} T_i^{(n)}\otimes_H x_i, \tag{34}$$

$$C_n(t)(a_1,\dots,a_{j-1},a_j\otimes b,a_{j+1},\dots,a_n) = T_0^{(n)}\otimes_H y_j, \tag{35}$$

для всех $a_1,\dots,a_n,b\in A$, $j=1,\dots,n$. Из (28) и (30) вытекает, что $x_0 = 0$.

Обозначим через I линейную оболочку элементов $x_i, y_j \in C_{(1)}$ из (34), (35), $i,j\geq 1$, для всех $a_1,\dots,a_n,b\in A$ и для всех $t\in\Sigma$. Из лемм 9–12 и соотношений (16), (17) следует, что I является идеалом псевдоалгебры C. Более того, очевидно, что $C_{\mathrm{Var}}(A) = C/I$ как псевдоалгебра удовлетворяет тождествам $t\in\Sigma$. В самом деле, если два или более значений переменных $x_1,\dots,x_n\in C$ принадлежат $C_{(1)}$, то $C_n(t)(x_1,\dots,x_n) = 0$ по (18). □

Предложение 14. *Пусть A — некоторая* Var*-диалгебра, P —* Var*-псевдоалгебра над $H = \Bbbk[T]$ такая, что существует гомоморфизм диалгебр $\varphi : A \to P^{(0)}$, причем $\varphi(a)*\varphi(b) = \sum\limits_i h_i\otimes 1\otimes_H c_i$, где $\deg h_i \leq 1$ для всех $a,b\in A$. Тогда существует гомоморфизм псевдоалгебр $C_{\mathrm{Var}}(\varphi) : C_{\mathrm{Var}}(A)\to P$ такой, что $C_{\mathrm{Var}}(\varphi)|_A = \varphi$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\Sigma = \varnothing$, т. е. A — произвольная 0-диалгебра.

Предположим, что P — псевдоалгебра над $H = \Bbbk[T]$, которая удовлетворяет условию предложения. Поскольку поле $\Bbbk$ может иметь положительную характеристику, нам потребуется несколько видоизмененное (по сравнению со случаем конформных алгебр) определение n-произведений: $x \,{}_{(n)}\, y = z_n$ для $x,y\in P$, $n\in\mathbb{Z}_+$, если $x*y = \sum\limits_{s\geq 0} T^s\otimes 1\otimes_H z_s$. Тогда $x \,{}_{(n)}\, y = 0$ для $n \gg 0$, а из $H^{\otimes 2}$-линейности следует, что

$$Tx \,{}_{(n)}\, y = x \,{}_{(n-1)}\, y, \quad x \,{}_{(n)}\, Ty = T(x \,{}_{(n)}\, y) - x \,{}_{(n-1)}\, y, \tag{36}$$

если положить $x \,{}_{(-1)}\, y = 0$.

Для любых $a,b\in A$ имеем

$$\varphi(a\vdash b) = \varphi(a) \,{}_{(0)}\, \varphi(b), \quad \varphi(a\dashv b) = \varphi(a) \,{}_{(0)}\, \varphi(b) + T(\varphi(a) \,{}_{(1)}\, \varphi(b)), \tag{37}$$

поскольку $\varphi : A\to P^{(0)}$ является гомоморфизмом диалгебр.

Лемма 15. *Для любых $a,b,c,d\in A$ выполняются равенства $(\varphi(a) \,{}_{(1)}\, \varphi(b)) \,{}_{(n)}\, (\varphi(c) \,{}_{(1)}\, \varphi(d)) = 0$ при $n\geq 0$, $(\varphi(a) \,{}_{(1)}\, \varphi(b)) \,{}_{(n)}\, \varphi(c) = 0$ и $\varphi(a) \,{}_{(n)}\, (\varphi(b) \,{}_{(1)}\, \varphi(c)) = 0$ при $n\geq 1$.*

Доказательство. Обозначим $\varphi(a)$, $\varphi(b)$, $\varphi(c)$, $\varphi(d)$ соответственно через x, y, z, u.

Существует целое число $N \geq 0$ такое, что $x\ _{(n)}\ (y\ _{(1)}\ z) = 0$ для всех $n \geq N$. Предположим, что минимальное среди таких N больше либо равно двум. Тогда из (37) получаем $x\ _{(N)}\ T(y\ _{(1)}\ z) = x\ _{(N)}\ \varphi(b \vdash c) - x\ _{(N)}\ \varphi(b \dashv c) = 0$. С другой стороны, из (36) вытекает $x\ _{(N)}\ T(y\ _{(1)}\ z) = T(x\ _{(N)}\ (y\ _{(1)}\ z)) - x\ _{(N-1)}\ (y\ _{(1)}\ z)$, и поэтому $x\ _{(N-1)}\ (y\ _{(1)}\ z) = 0$ в противоречие с минимальностью N. Прочие утверждения леммы получаются аналогичным образом. $\square$

Определим отображение $\psi : C(A) \to P$ по следующему правилу:

$$\psi(h \otimes a) = h(T)\varphi(a), \quad \psi(a \otimes b) = -\varphi(a)\ _{(1)}\ \varphi(b).$$

Второе равенство означает, что мы сначала определяем $\psi : A \otimes A \to P$, а по лемме 15 имеем $U = \mathrm{Span}\{\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle \mid a, b, c, d \in A\} \subseteq \mathrm{Ker}\,\psi$.

Выполнение соотношений $\psi(Tx) = T\psi(x)$, $\psi(x_{(n)}y) = \psi(x)_{(n)}\psi(y)$, $x, y \in C(A)$, $n \geq 0$, следует из (36), (37) и леммы 15.

Далее, пусть Σ — непустое семейство полилинейных тождеств, определяющих многообразие Var, и пусть A — некоторая Var-диалгебра. Как было показано, для любой псевдоалгебры P, удовлетворяющей условиям теоремы, существует гомоморфизм псевдоалгебр $C(\varphi) : C(A) \to P$ такой, что $C(\varphi)|_A = \varphi$. Вспомним, что $C_{\mathrm{Var}}(A) = C(A)/I$, где I — пространство, натянутое на все коэффициенты всех выражений вида $C(A)_n(t^*)(u_1, \dots, u_n) \in H^{\otimes n} \otimes_H C(A)$, $t \in \Sigma$, $n = \deg t$, $u_i \in C(A)$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, $I \subseteq \mathrm{Ker}\, C(\varphi)$, и, значит, существует гомоморфизм $C_{\mathrm{Var}}(\varphi)$ с требуемыми свойствами. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Loday J.-L.* Une version non commutative des alg‘ebres de Lie: les alg‘ebres de Leibniz // Enseign. Math. 1993. V. 39. P. 269–293.
2. *Loday J.-L., Pirashvili T.* Universal envelopping algebras of Leibniz algebras and homology // Math. Ann. 1993. V. 296. P. 139–158.
3. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer Verl., 2001. P. 7–66. (Lecture Notes in Math.; V. 1763).
4. *Liu D.* Steinberg–Leibniz algebras and superalgebras // J. Algebra. 2005. V. 283, N 1. P. 199–221.
5. *Faulkner J. R.* Barbilian planes // Geom. Dedicata. 1989. V. 30. P. 125–181.
6. *Kac V. G.* Vertex Algebras for Beginners. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Univ. Lecture Series; V. 10).
7. *Roitman M.* On free conformal and vertex algebras // J. Algebra. 1999. V. 217, N 2. P. 496–527.
8. *Kolesnikov P. S.* Identities of conformal algebras and pseudoalgebras // Comm. Algebra. 2006. V. 34, N 6. P. 1965–1979.
9. *Bakalov B., D'Andrea A., Kac V. G.* Theory of finite pseudoalgebras // Adv. Math. 2001. V. 162, N 1. P. 1–140.
10. *Chapoton F.* Un endofoncteur de la catégorie des opérades // Dialgebras and related operads. Berlin: Springer-Verl., 2001. P. 105–110. (Lecture Notes in Math.; V. 1763).

Статья поступила 16 июля 2007 г.

Колесников Павел Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
pavelsk@math.nsc.ru