Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 512.544

ИНВОЛЮТИВНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРУППЫ И СКРУЧЕННЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ИНВОЛЮЦИЙ

Д. В. Впринцев, А. Л. Мыльников

Аннотация. Подмножество K из группы C называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых элементов $x, y \in K$ элемент $xy^{-1}x$ принадлежит K. Исследуется и обобщается с помощью понятия скрученного подмножества понятие инволютивной декомпозиции группы. Говорят, что группа *допускает инволютивную декомпозицию*, если в ней существует такая инволюция, что она представима в виде произведения централизатора этой инволюции и множества инвертируемых этой инволюцией элементов. Кроме того, в работе изучаются скрученные подмножества, содержащие не более одной инволюции. Доказывается, что если конечное скрученное подмножество вообще не содержит инволюций, то оно порождает подгруппу нечетного порядка.

Ключевые слова: инволютивная декомпозиция группы, скрученное подмножество, скрученная подгруппа.

В работе [1] введено понятие инволютивной декомпозиции группы.

Определение 1. Говорят, что *группа G допускает инволютивную декомпозицию*, если существует такой инволютивный автоморфизм φ группы G, что $G = I(\varphi)C_G(\varphi)$, где $I(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g^{-1}\}$, $C_G(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g\}$.

В [1] показано (теоремы 5.1, 5.2), что любая группа G нечетного порядка, обладающая инволютивным автоморфизмом φ, допускает инволютивную декомпозицию, причем $I(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$.

Введем обозначение $D(\varphi) := \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Всегда справедливо включение $D(\varphi) \subseteq I(\varphi)$ (см. ниже лемму 2(2)). Однако обратное включение может не иметь места, как показывает следующий

Пример. Пусть $G = A \times \langle w \rangle$, где A — абелева подгруппа нечетного порядка, $|w| = 2$. Группа G обладает инволютивным автоморфизмом φ, который действует следующим образом: $\varphi(g) = g^{-1}$ для любого элемента g из G. Нетрудно видеть, что $D(\varphi) = A$ и $I(\varphi) = G$.

В силу примера 1 естественно провести разделение случаев, когда группа G допускает разложения $G = I(\varphi)C_G(\varphi)$ и $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$. В первом случае будем говорить, что *группа G допускает слабую инволютивную декомпозицию*, а во-втором — соответственно *сильную.* Понятно, что группа, допускающая сильную инволютивную декомпозицию, допускает и слабую. Таким образом, в [1] было доказано, что *группа нечетного порядка, обладающая инволютивным автоморфизмом, допускает сильную инволютивную декомпозицию.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СФУ по НМ проекту № 45.2007.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы группа, обладающая инволютивным автоморфизмом, допускала сильную инволютивную декомпозицию. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, обладающая инволютивным автоморфизмом φ, $C_G(\varphi) = \{g \in G : \varphi(g) = g\}$ и $D(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Следующие условия эквивалентны:*
(1) $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) = 1$;
(2) $D(\varphi)$ *не содержит инволюций;*
(3) $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$.

Далее, следуя [2], приведем определение скрученного подмножества.

Определение 2. Подмножество K группы G называется *скрученным подмножеством*, если $1 \in K$ и $xy^{-1}x \in K$ для любых элементов x, y из K.

Примерами скрученных подмножеств являются ранее рассмотренные множества $I(\varphi)$ и $D(\varphi)$ (см. ниже лемму 1.2(1)).

В настоящей работе с помощью понятия скрученного подмножества вводится понятие Tw-декомпозиции группы, которое обобщает понятия слабой и сильной инволютивных декомпозиций группы.

Определение 3. Будем говорить, что *группа G допускает Tw-декомпозицию*, если существует такое скрученное подмножество K из G, что $G = KC_G(w)$ для некоторой инволюции w из G.

Заметим, что если группа G допускает слабую (сильную) инволютивную декомпозицию при помощи некоторого инволютивного автоморфизма φ, то группа $G^* := G\langle\varphi\rangle$ также допускает слабую (сильную) инволютивную декомпозицию при помощи автоморфизма φ. Таким образом, вместо группы G всегда можно рассматривать группу G^*. Поскольку $D(\varphi), I(\varphi)$ — скрученные подмножества группы G, то слабая (сильная) инволютивная декомпозиция группы G^* при помощи φ является Tw-декомпозицией, где в качестве w выступает φ. Таким образом, понятие Tw-декомпозиции действительно обобщает понятие инволютивной декомпозиции.

В этой работе помимо групп, допускающих слабую, сильную декомпозиции и Tw-декомпозицию, исследуются группы, порожденные скрученными подмножествами с малым количеством инволюций. Прилагательное «малое» в данном случае означает либо полное отсутствие инволюций в порождающем группу скрученном подмножестве, либо наличие в нем лишь одной инволюции.

Получен следующий результат о группах, порожденных скрученными подмножествами без инволюций.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K\rangle$. Допустим, что K не содержит инволюций. Тогда группа G имеет нечетный порядок.*

Отметим, что общая идея доказательства данного утверждения принадлежит В. В. Беляеву, а его детальное изложение — авторам.

Далее, при наличии в порождающем группу скрученном подмножестве только одной инволюции и еще при некоторых дополнительных условиях удалось показать, что такая группа допускает Tw-декомпозицию. А если такая группа еще и проста, то показано, что она содержит подгруппу определенного вида. Но до сих пор неясно, могут ли вообще существовать такие простые группы.

Итак, приведем точную формулировку результата.

Теорема 3. *Пусть G — периодическая группа и K — скрученное подмножество из G, содержащее ровно одну инволюцию w, причем $G = \langle K \rangle$ и $G \neq K$. Допустим, что $\operatorname{Ker} K = \{x \in K : xK = K\} = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G = KC_G(w)$;*

(2) *если G — конечная простая группа, то подмножество K содержит такой элемент x нечетного порядка, что $w^x \neq w$, $w^x w = w w^x$, $w^{x^2} w = w w^{x^2}$ и $x^3 \in C_G(w)$.*

В заключение оба автора выражают глубокую благодарность профессору В. В. Беляеву, под руководством которого была выполнена эта работа.

1. Известные результаты. В данном пункте для удобства читателя приведены некоторые известные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов.

Лемма 1 [лемма 2.1]. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G. Тогда для любого x из K подгруппа $\langle x \rangle$ содержится в K.*

Следующее утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Лемма 2. *Пусть G — группа, φ — инволютивный автоморфизм группы G, $I(\varphi) = \{x \in G : \varphi(x) = x^{-1}\}$ и $D(\varphi) = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$I(\varphi)$, $D(\varphi)$ — скрученные подмножества группы G, причем $D(\varphi) \subseteq I(\varphi)$;*

(2) *$\langle D(\varphi) \rangle$ — нормальная подгруппа в G;*

(3) *если G — конечная группа, то $|D(\varphi)| = \frac{|G|}{|C_G(\varphi)|}$.*

Положим $\operatorname{Ker}(K) := \{x \in K : xK = K\}$. Леммы 3, 4 следуют из результатов, полученных в работах [3, 4].

Лемма 3. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K \rangle$. Тогда подмножество $\operatorname{Ker}(K)$ является нормальной подгруппой в G.*

Лемма 4. *Пусть G — группа и K — скрученное подмножество из G, причем $G = \langle K \rangle$ и $\operatorname{Ker}(K) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *для произвольного элемента $x \in G$ существует единственный элемент $y \in G$ такой, что $xK = Ky$;*

(2) *если подмножество K содержит элемент порядка > 2, то отображение $\varphi : x \mapsto y$ является инволютивным автоморфизмом группы G, причем $D(\varphi) \subseteq K \subseteq I(\varphi)$.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится Z^*-теорема Глаубермана. Приведем одну из эквивалентных формулировок этой теоремы.

Лемма 5. *Пусть G — конечная группа и w — некоторая инволюция из G такая, что для любого элемента g из G элемент $g^{-1}wgw$ имеет нечетный порядок. Тогда $\langle g^{-1}wgw : g \in G \rangle \leq O(G)$.*

2. Сильная инволютивная декомпозиция группы. В данном пункте приводится доказательство теоремы 1.

Покажем, что из (1) следует (2). Допустим противное, что подмножество $D(\varphi)$ содержит инволюцию w. Тогда $w = x^{-1}\varphi(x)$ для некоторого элемента x

из G, откуда $\varphi(w) = \varphi(x^{-1}\varphi(x)) = (\varphi(x))^{-1}x = w^{-1} = w$. Значит, $w \in C_G(\varphi)$, т. е. $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) \neq 1$, что противоречит условию.

Покажем, что из (2) следует (3). Так как согласно лемме 2(1) $D(\varphi)$ — скрученное подмножество, из леммы 1 вытекает, что любой элемент из $D(\varphi)$ имеет нечетный порядок.

Пусть $G^* = G\langle\varphi\rangle$ и g — произвольный элемент группы G. Тогда $|\varphi\varphi^g| = 2n+1$ для некоторого целого числа n. Значит, согласно свойствам групп диэдра, существует такой элемент h из $\langle\varphi\varphi^g\rangle$, что $\varphi^g = \varphi^{\varphi^h}$. Следовательно, $\varphi^h g^{-1} \in C_{G^*}(\varphi)$, т. е. $g^{-1} = \varphi^h c$ для некоторого элемента c из $C_{G^*}(\varphi)$.

Понятно, что $C_{G^*}(\varphi) = C_G(\varphi) \times \langle\varphi\rangle$. Так как $g^{-1} \in G$, то $c = \varphi c_1$, где c_1 — некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Следовательно, $g^{-1} = (\varphi^h\varphi)c_1$, значит, ввиду произвольности элемента g справедливо $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$.

Покажем, что из (3) следует (1).

Поскольку $G = D(\varphi)C_G(\varphi)$, то $D(\varphi)$ содержит представитель каждого левого смежного класса из $G/C_G(\varphi)$. По лемме 2(3) $|D(\varphi)| = |G : C_G(\varphi)|$. Значит, в $D(\varphi)$ содержится ровно по одному представителю от каждого левого смежного класса из $G/C_G(\varphi)$, откуда вытекает, что $C_G(\varphi) \cap D(\varphi) = 1$. Теорема 1 доказана.

3. Скрученные подмножества без инволюций. В данном пункте приводится доказательство теоремы 2.

Пусть G — минимальный контрпример. Из леммы 1 вытекает, что любой элемент из K имеет нечетный порядок.

Анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(1) $\mathrm{Ker}(K) = 1$. Допустим противное, что $\mathrm{Ker}(K) \neq 1$. По лемме 3 $\mathrm{Ker}(K)$ является нормальной подгруппой в G.

Рассмотрим $\overline{G} := G/\mathrm{Ker}(K)$. Пусть $\overline{K}$ — образ подмножества K в группе $\overline{G}$. Понятно, что $\overline{G} = \langle\overline{K}\rangle$ и для любого элемента $\bar{x}$ из $\overline{K}$ число $|\bar{x}|$ нечетно. Тогда в силу минимальности контрпримера G получаем, что $\overline{G}$ имеет нечетный порядок. Ясно, что $\mathrm{Ker}(K)$ имеет нечетный порядок. Следовательно, группа G имеет нечетный порядок, что противоречит выбору G.

(2) *Группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом φ, что для любого элемента z из K справедливо $\varphi(z) = z^{-1}$.*

Вытекает из п. (1) и леммы 4.

(3) $K = \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. Пусть $N := \{g^{-1}\varphi(g) : g \in G\}$. По лемме 4(2) $N \subseteq K$. Покажем, что $K \subseteq N$. Пусть $x \in K$. Тогда $|x| = 2t+1$ для некоторого целого числа t. Следовательно, ввиду того, что $\varphi(x) = x^{-1}$, имеем $x = x^{t+1}\varphi(x^{-(t+1)}) \in N$. Этап (3) доказан.

(4) *Группы G не существует.*

Пусть $G^* := G\langle\varphi\rangle$. Ввиду (3) нетрудно видеть, что $K = \{(g^*)^{-1}(g^*)^{\varphi} : g^* \in G^*\}$. Значит, для любого элемента g^* из G^* элемент $(g^*)^{-1}(g^*)^{\varphi}$ имеет нечетный порядок. Применяя лемму 5, получаем, что $\langle K\rangle \leq O(G^*)$. Поскольку $G = \langle K\rangle$, группа G имеет нечетный порядок; противоречие с выбором G. Этап (4), а вместе с ним и сама теорема 2 доказаны.

4. Скрученные подмножества с одной инволюцией. В данном пункте приводится доказательство теоремы 3.

Покажем справедливость (1). Анализ разбивается на ряд этапов.

(1.i) *Группа G обладает инволютивным автоморфизмом φ таким, что для любого элемента x из K справедливо $\varphi(x) = x^{-1}$.*

Заметим, что в K существует элемент z с $|z| > 2$. Действительно, в противном случае, поскольку в K содержится ровно одна инволюция w, имеем $K = \langle w \rangle$; противоречие с тем, что $K \neq \langle K \rangle$.

Поскольку $\mathrm{Ker}(K) = 1$, из леммы 4 получаем, что группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом φ, что $\varphi(x) = x^{-1}$ для любого элемента x из K.

(1.ii) $C_G(\varphi) \leq C_G(w)$.

В силу определения автоморфизма φ имеем $C_G(\varphi) = \{g \in G : gK = Kg\} = \{g \in G : g^{-1}Kg = K\}$. Так как инволюция в K единственна, получаем, что для любого элемента g из $C_G(\varphi)$ выполняется $g^{-1}wg = w$, значит, $C_G(\varphi) \leq C_G(w)$.

(1.iii) $G = KC_G(w)$.

Пусть $G^* = G\langle\varphi\rangle$ и g — произвольный элемент группы G. Тогда возможен один из следующих случаев:

(a) $|\varphi\varphi^g| = 2n$ для некоторого целого числа n;

(b) $|\varphi\varphi^g| = 2n + 1$ для некоторого целого числа n.

Рассмотрим каждый из этих случаев по отдельности.

(a) Пусть $|\varphi\varphi^g| = 2n$. В силу леммы 4(2) $\varphi\varphi^g \in K$. Тогда по лемме 1 $\langle\varphi\varphi^g\rangle \subseteq K$. Ввиду единственности инволюции w в K получаем, что $w \in \langle\varphi\varphi^g\rangle$.

Понятно, что $|\varphi^{g^{-1}}\varphi| = 2n$. Тогда для элемента $\varphi^{g^{-1}}\varphi$ аналогично элементу $\varphi\varphi^g$ показывается, что $\langle\varphi^{g^{-1}}\varphi\rangle \subseteq K$, откуда следует, что $w \in \langle\varphi^{g^{-1}}\varphi\rangle$. Таким образом, поскольку $\langle\varphi\varphi^g\rangle^{g^{-1}} = \langle\varphi^{g^{-1}}\varphi\rangle$, получаем, что $w^{g^{-1}} = w$, следовательно, $g \in C_G(w)$.

(b) Пусть $|\varphi\varphi^g| = 2n+1$ для некоторого целого числа n. Значит, согласно свойствам групп диэдра существует такой элемент h из $\langle\varphi\varphi^g\rangle$, что $\varphi^g = \varphi^{\varphi^h}$. Следовательно, $\varphi^h g^{-1} \in C_{G^*}(\varphi)$, т. е. $g^{-1} = \varphi^h c$ для некоторого элемента c из $C_{G^*}(\varphi)$.

Понятно, что $C_{G^*}(\varphi) = C_G(\varphi) \times \langle\varphi\rangle$. Так как $g^{-1} \in G$, то $c = \varphi c_1$, где c_1 — некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Следовательно, $g = (\varphi\varphi^h)^{c_1} c_1^{-1}$. В силу леммы 4(2) $\varphi\varphi^h \in K$, а ввиду п. (1.ii) c_1^{-1} — некоторый элемент из $C_G(w)$. Нетрудно видеть, что для любого элемента $t \in C_G(\varphi)$ выполняется равенство $(D(\varphi))^t = D(\varphi)$. Следовательно, $g = ds$, где d — некоторый элемент из K, а s — некоторый элемент из $C_G(w)$.

Таким образом, из (a) и (b) получаем, что $G = KC_G(w)$. Итак, п. (1.iii), а вместе с ним п. (1) доказаны.

Докажем справедливость (2). Анализ разбивается на ряд этапов.

(2.i) *В подмножестве K существует элемент x, имеющий нечетный порядок такой, что $w^x \neq w$ и $w^{x^2}w = ww^{x^2}$.*

Пусть $T := \{g^{-1}g^w : g \in G\}$. По лемме 2(1) T является скрученным подмножеством. Поскольку G — простая группа, из леммы 2(2) вытекает, что $G = \langle T \rangle$. Тогда в силу теоремы 2 и теоремы Фейта — Томпсона [5] получаем, что подмножество T содержит элемент четного порядка. Следовательно, из леммы 1 вытекает существование элемента g группы G такого, что элемент $g^{-1}g^w$ является инволюцией, т. е. для элемента g справедливы $w^g \neq w$ и $w^g w = ww^g$. Так как согласно п. (1) данной теоремы $G = KC_G(w)$, существует элемент y из K такой, что $w^y \neq w$ и $w^y w = ww^y$.

Заметим, что элемент y имеет нечетный порядок.

Действительно, в противном случае ввиду леммы 1 $\langle y\rangle \subseteq K$, откуда в силу единственности инволюции w имеем $w \in \langle y\rangle$. Следовательно, $y \in C_G(w)$, что противоречит выбору y.

Далее, в силу нечетности $|y|$ элемент $x := \sqrt{y}$ однозначно определен и удовлетворяет (2.i).

(2.ii) $w^x w = w w^x$.

Заметим, что $x^{-2}wx^2w \in x^{-2}K$. Так как ввиду леммы 1 $x^{-1} \in K$, то $x^{-2}K = x^{-1}(x^{-1}Kx^{-1})x = K^x$. Поскольку в K содержится только одна инволюция w, то в K^x содержится только одна инволюция w^x. Таким образом, $x^{-2}wx^2w = w^x$, откуда вытекает, что элемент $w^x w$ является инволюцией, а значит, $w^x w = w w^x$.

Легко видеть, что из п. (2.i) вытекает соотношение $w^{x^{-1}}w^x = w^x w^{x^{-1}}$. Таким образом, элемент $w^{x^{-1}}w^x$ является инволюцией. В силу того, что $w^{x^{-1}}w^x = xwx^{-1}x^{-1}wx$, нетрудно видеть, $w^{x^{-1}}w^x \in K$, значит, с учетом единственности инволюции в K, имеем $w = w^{x^{-1}}w^x$, откуда $ww^x = w^{x^2}$. Таким образом, ввиду (2.ii) легко видеть, что $\langle w, x\rangle = (\langle w\rangle \times \langle w^x\rangle) \leftthreetimes \langle x\rangle$, причем $\langle x^3\rangle \leq C_G(w)$.

Итак, п. (2), а вместе с ним и сама теорема 3 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Foguel T., Ungar A. A.* Involutory decomposition of groups into twisted subgroups and subgroups // J. Group Theory. 2000. V. 1, N 3. P. 27–46.
2. *Мыльников А. Л.* Конечные перекрученные группы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 369–375.
3. *Мыльников А. Л.* Конечные минимальные неперекрученные группы // Вестн. Красноярск. гос. ун-та. 2005. № 1. С. 71–76.
4. *Вепринцев Д. В.* Редуцированные симметричные подмножества в группах // Математические системы. Красноярск: Краснояр. гос. аграр. ун-т, 2005. Вып. 4. С. 13–17.
5. *Feit W., Thompson J.* Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V. 13, N 3. P. 775–1029.

Статья поступила 10 марта 2006 г., окончательный вариант — 20 сентября 2007 г.

Вепринцев Дмитрий Владимирович
Красноярский гос. аграрный университет, кафедра прикладной математики,
ул. Ленина, 117, Красноярск 660017
D_veprintsev@mail.ru

Мыльников Андрей Леонидович
Институт фундаментальной подготовки Сибирского федерального университета,
кафедра высшей математики 1,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mylnand@yandex.ru