Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2008. Том 49, № 2

УДК 510.5

ОБОБЩЕННАЯ ИЕРАРХИЯ ФЕЙНЕРА

П. Е. Алаев

Аннотация. Изучаются некоторые свойства одного обобщения иерархии Фейнера Δ^0_ω-вычислимых функций. Рассматриваются различные признаки включения одного класса этой иерархии в другой.

Ключевые слова: иерархия Фейнера, вычислимая функция, обобщенная вычислимость.

Через $\varphi_k(y)$ обозначаем стандартную универсальную частичную вычислимую функцию (ч.в.ф.), через $\varphi_k^X(y)$ — универсальную ч.в.ф. с оракулом $X \subseteq \omega$. Запись $\varphi_k(y){\downarrow}$ означает определенность функции в данной точке; $\varnothing^0 = \varnothing$, $\varnothing^1 = \varnothing'$, $\varnothing^2, \varnothing^3, \dots$ — стандартная последовательность арифметических оракулов. Положим $\omega^{<\omega} = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 0, x_i \in \omega\}$, а $2^{<\omega} = \{x_1 \dots x_n \mid n \geq 0, x_i \in \{0,1\}\}$. Длина набора $|x_1 \dots x_n|$ равна n. Считаем, что зафиксирована некоторая гёделевская нумерация $\langle \dots \rangle : \omega^{<\omega} \to \omega$, ее значение на наборе $x_1 \dots x_n$ обозначается через $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, значение на пустом наборе — через $\langle\rangle$.

Пусть $g : \omega^{<\omega} \to \omega$ — вычислимая функция, $g(\bar{x}) \geq 1$ при $\bar{x} \in \omega^{<\omega}$. В [1] определены класс функций $\Delta^0_{\omega,g}$, состоящий из всех $\alpha : \omega \to \omega$ таких, что для некоторого $k \in \omega$

$$\begin{cases} \alpha(0) = \varphi_k^{\varnothing^{g()-1}}(\langle\rangle), \\ \alpha(n+1) = \varphi_k^{\varnothing^{g(\alpha(0),\dots,\alpha(n))-1}}(\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n) \rangle) \quad \text{при } n \in \omega, \end{cases}$$

а также класс множеств $\Sigma^0_{\omega,g}$, состоящий из всех $M \subseteq \omega$ таких, что для некоторого $k \in \omega$ характеристическая функция $\chi_M(n) = \alpha(n)$ определяется схемой

$$\begin{cases} \alpha(0) = 1 \Leftrightarrow \varphi_k^{\varnothing^{g()-1}}(\langle\rangle){\downarrow}, \\ \alpha(n+1) = 1 \Leftrightarrow \varphi_k^{\varnothing^{g(\alpha(0),\dots,\alpha(n))-1}}(\langle \alpha(0), \dots, \alpha(n) \rangle){\downarrow} \quad \text{при } n \in \omega. \end{cases}$$

Классы $\Delta^0_{\omega,g}$ и $\Sigma^0_{\omega,g}$ содержатся в классах Δ^0_ω-вычислимых функций и множеств соответственно. Если g постоянна, т. е. $g(\bar{x}) = m > 0$ при любом $\bar{x} \in \omega^{<\omega}$, то $\Delta^0_{\omega,g}$ совпадает с обычным классом Δ^0_m, а $\Sigma^0_{m,g}$ расположен между Σ^0_m и Δ^0_{m+1}. Класс $\Sigma^0_{\omega,g}$ с функцией $g(x_1, \dots, x_n) = 4 + 3n + x_1 + \dots + x_n$ оказался необходимым для описания вычислимых ω-однородных булевых алгебр. Более общо, для описания Δ^0_m-вычислимых алгебр нужно рассматривать класс $\Sigma^0_{\omega,g}$ с $g(x_1, \dots, x_n) = (3 + m) + 3n + x_1 + \dots + x_n$. Если функция $g(x_1, \dots, x_n)$ зависит только от n, т. е. $g(x_1, \dots, x_n) = g'(n)$, то классы $\Delta^0_{\omega,g}$ и $\Sigma^0_{\omega,g}$ будем называть

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00819), программы «Ведущие научные школы» (грант НШ–4413.2006.1) и гранта Президента Российской Федерации МК–2101.2005.1.

фейнеровскими. Они впервые появились в [2], где использовались только функции $g'(n) = a + bn$ с $a, b \in \omega$. В случае же произвольной вычислимой функции g назовем $\Delta^0_{\omega,g}$ и $\Sigma^0_{\omega,g}$ *обобщенными фейнеровскими классами.*

Целью настоящей работы является ответ на ряд естественных вопросов, касающихся свойств этих классов. Устанавливаются некоторые необходимые и некоторые достаточные признаки включения одного класса в другой. Доказывается, что не любой обобщенный фейнеровский класс является фейнеровским. Более того, если $g(x_1, \dots, x_n) = a + bn + x_1 + \dots + x_n$, где $a, b \in \omega$, то классы $\Delta^0_{\omega,g}$ и $\Sigma^0_{\omega,g}$ не могут быть представлены как объединение или пересечение какого-либо семейства фейнеровских классов.

1. Признаки включения для классов

Определим серию необходимых для работы определений. Если $\bar{x}, \bar{y} \in \omega^{<\omega}$, то $\bar{x} \geq \bar{y}$ означает, что $\bar{y} = \bar{x}\bar{z}$ для некоторого $\bar{z} \in \omega^{<\omega}$. Пусть $E \subseteq \omega^{<\omega}$. *Бесконечным путем* в E называем последовательность $\bar{x}_0 > \bar{x}_1 > \dots$, где $\bar{x}_i \in E$ для любого $i \in \omega$. Элемент $\bar{u} \in E$ назовем *точкой ветвления* в E, если найдутся $x, y \in \omega$, $x \neq y$, и $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \omega^{<\omega}$ такие, что $\bar{u}x\bar{v}_1$, $\bar{u}y\bar{v}_2 \in E$.

Определим $(E)'_{\mathrm{br}}$ как множество $\{\bar{u} \in E \mid \bar{u}$ — точка ветвления в $E\}$. В дальнейшем будем использовать для него краткое обозначение E'. Определим $E^{(\alpha)}$ для всех ординалов α: $E^{(0)} = E$, $E^{(\alpha+1)} = (E^{(\alpha)})'$ и $E^{(\lambda)} = \bigcap\limits_{\alpha<\lambda} E^{(\alpha)}$ для предельных ординалов λ.

Назовем *рангом ветвимости* множества E (обозначаем через $r_{\mathrm{br}}(E)$) наименьший ординал α такой, что в $E^{(\alpha)}$ нет бесконечных путей. Если такого α не существует, то полагаем $r_{\mathrm{br}}(E) = \infty$. Далее будем использовать краткое обозначение $r(E)$. В качестве примера заметим, что если $\mathscr{D}_k = \{x_1 \dots x_n \in 2^{<\omega} \mid n \geq 0$, среди $x_1, \dots, x_n$ есть не более k единиц$\}$, то $\mathscr{D}'_{k+1} = \mathscr{D}_k$, $\mathscr{D}'_0 = \varnothing$, а ранг $\mathscr{D}_k$ равен $k + 1$. Доказательство этого факта является несложным упражнением.

Лемма 1. *Пусть $E \subseteq \omega^{<\omega}$. Ранг $r(E)$ равен ∞ тогда и только тогда, когда существует непустое $T \subseteq E$ со свойством $T' = T$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Индукцией по α легко показать, что $T \subseteq E^{(\alpha)}$ для любого ординала α. Кроме того, в T есть бесконечный путь: если $\bar{u} \in T$, то $\bar{u}x\bar{v} \in T$ для некоторых $x \in \omega$ и $\bar{v} \in \omega^{<\omega}$.

($\Rightarrow$) Поскольку E счетно, найдется счетный ординал α такой, что $E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)}$. Это $E^{(\alpha)}$ можно взять в качестве T. Лемма доказана.

Пусть $g, h : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ — вычислимые функции. По-видимому, свойства множества $E = \mathrm{Ex}(g, h) = \{\bar{x} \in \omega^{<\omega} \mid g(\bar{x}) > h(\bar{x})\}$ являются определяющими при решении вопроса о том, содержится ли $\Delta^0_{\omega,g}$ в $\Delta^0_{\omega,h}$. Далее при определенных дополнительных предположениях будет доказано: если ранг E достаточно мал, то $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$, а если достаточно велик, то $\Delta^0_{\omega,g} \not\subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.

Будем говорить, что $h(\bar{x})$ *стремится к бесконечности*, и использовать обозначение $h(\bar{x}) \to \infty$ при $|\bar{x}| \to \infty$, если $\forall B \in \omega\, \exists C \in \omega\, (h(\bar{x}) \geq B$ при $|\bar{x}| \geq C)$. Аналогично $h(\bar{x}) \geq B$ при $|\bar{x}| \to \infty$, если $h(\bar{x}) \geq B$ при всех $\bar{x}$ таких, что $|\bar{x}| \geq C$ для некоторого фиксированного $C \in \omega$.

Теорема 1. *Пусть $g, h : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ — вычислимые функции, $E = \mathrm{Ex}(g, h)$.*

(1) *Если $r(E) < \omega$, то $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.*

(2) *Если* $r(E) < \omega \cdot m$, *где* $m \in \omega$ *и* $m \geq 1$, *и* $h(\bar{x}) \geq 2m - 1$ *при* $|\bar{x}| \to \infty$, *то* $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.

(3) *Если* $r(E) < \omega^2$ *и* $h(\bar{x}) \to \infty$ *при* $|\bar{x}| \to \infty$, *то* $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.

Доказательство. Пп. (1) и (3), очевидно, являются следствиями (2). Докажем (2). Как известно, существует примитивно вычислимая функция $f_0(k)$ такая, что $\varphi^X_k(y) = \varphi^{X'}_{f_0(k)}(y)$ для любых $X \subseteq \omega$ и $k, y \in \omega$. Следовательно, существует примитивно вычислимая функция $f(k)$, для которой $\varphi^X_k(y) = \varphi^{X^{(t)}}_{f(k)}(\langle y, t\rangle)$ при любых $X \subseteq \omega$ и $k, y, t \in \omega$.

Предположим сначала, что $E = \varnothing$, т. е. $g(\bar{x}) \leq h(\bar{x})$ при любых $\bar{x} \in \omega^{<\omega}$. Обозначим через $\alpha(\bar{n})$ набор $\alpha(0)\dots\alpha(n)$, а через $\langle\alpha(\bar{n})\rangle$ — его номер $\langle\alpha(0), \dots, \alpha(n)\rangle$. Пусть $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g}$. Тогда для некоторого $k \in \omega$

$$\begin{cases} \alpha(0) = \varphi_k^{\varnothing^{g()-1}}(\langle\rangle), \\ \alpha(n+1) = \varphi_k^{\varnothing^{g(\alpha(\bar{n}))-1}}(\langle\alpha(\bar{n})\rangle) \quad \text{при } n \in \omega. \end{cases}$$

Получаем, что $\alpha(n+1) = \varphi_{f(k)}^{\varnothing^{h(\alpha(\bar{n}))-1}}(\langle\langle\alpha(\bar{n})\rangle, d\rangle)$, где $d = h(\alpha(\bar{n})) - g(\alpha(\bar{n}))$. Отсюда легко следует, что $\alpha \in \Delta^0_{\omega,h}$.

Рассмотрим теперь произвольный случай. Заметим сначала, что $E^{(\omega\cdot m)} \in \Pi^0_{2m}$, а $E^{(\omega\cdot m+p)} \in \Sigma^0_{2m+1}$ для любых $m, p \in \omega$, $p \geq 1$, причем Σ^0_{2m+1}-индекс $E^{(\omega\cdot m+p)}$ вычисляется равномерно по $m, p \in \omega$. При фиксированном m это утверждение легко доказывается индукцией по p, а $E^{(\omega\cdot m+\omega)} = \bigcap\limits_{p\in\omega} E^{(\omega\cdot m+p)}$. Далее, заметим: если $\bar{a} \in E$ и существуют $x, y \in \omega$, $x \neq y$, и $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ такие, что $\bar{a}x\bar{u}_1, \bar{a}y\bar{u}_2 \in E^{(\gamma)}$, то $\bar{a} \in E^{(\gamma+1)}$, для любого ординала γ. Для этого нужно индукцией по $\delta \leq \gamma + 1$ проверить принадлежность $\bar{a}$ к $E^{(\delta)}$, что является непосредственным следствием определений.

Пусть $r(E) = \gamma_0 < \omega \cdot m$ и $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g}$. Покажем, что $\alpha \in \Delta^0_{\omega,h}$. Рассмотрим наименьший ординал γ, обладающий свойством: $\exists n_0 \forall n \geq n_0\ \alpha(\bar{n}) \notin E^{(\gamma)}$. Очевидно, $\gamma \leq \gamma_0$.

Случай 1: $\gamma = \delta + 1 = \omega \cdot m_1 + p$, где $m_1 < m$. Тогда $\alpha(\bar{n}) \in E^{(\delta)}$ для бесконечного числа $n \in \omega$. Рассмотрим достаточно большое n. Если $\bar{a} = \alpha(\bar{n}) \notin E$, то $\alpha(n+1)$ вычисляется с оракулом $\varnothing^{h(\bar{a})-1}$, как указано выше. Пусть $\bar{a} \in E$. Для $x = \alpha(n+1)$ найдется $\bar{u}_1$ такой, что $\bar{a}x\bar{u}_1 \in E^{(\delta)}$, и не может существовать $y \neq x$ и $\bar{u}_2$ таких, что $\bar{a}y\bar{u}_2 \in E^{(\delta)}$ (иначе $\bar{a} \in E^{(\delta+1)}$). Находя такие x и $\bar{u}_1$ с помощью оракула $\varnothing^{2m_1}$, вычисляем $\alpha(n+1)$.

Случай 2: $\gamma = \omega \cdot m_1$ — предельный ординал, где $1 \leq m_1 < \omega$. Будем говорить, что $\bar{b}$ — *γ-глубокая точка*, если $\forall\beta < \gamma\exists\bar{u}\ \bar{b}\bar{u} \in E^{(\beta)}$. Вновь рассмотрим достаточно большое n и $\bar{a} = \alpha(\bar{n}) \notin E$. Если $x = \alpha(n+1)$, то $\alpha(\bar{n})x$ является γ-глубокой точкой, поскольку $\forall\beta < \gamma\ \alpha(\bar{l}) \in E^{(\beta)}$ при бесконечно многих $l \in \omega$. С другой стороны, из $\alpha(\bar{n}) \notin E^{(\gamma)}$ следует, что не существует $y \neq x$, для которого $\alpha(\bar{n})y$ является γ-глубокой. Поэтому с помощью $\varnothing^{2m_1}$ можно вычислить $\alpha(n+1)$.

Случай 3: $\gamma = 0$. Ситуация аналогична случаю $E = \varnothing$. Теорема доказана.

Пусть $2^\omega = \{\alpha \mid \alpha : \omega \to \{0, 1\}\}$.

Следствие 1. *В формулировке теоремы* 1 *классы* $\Delta^0_{\omega,g}$, $\Delta^0_{\omega,h}$ *и* $\mathrm{Ex}(g, h)$ *можно заменить классами*

(a) $\Sigma^0_{\omega,g}$, $\Sigma^0_{\omega,h}$ *и* $\mathrm{Ex}(g,h)\cap 2^{<\omega}$;
(b) $\Delta^0_{\omega,g}\cap 2^{\omega}$, $\Delta^0_{\omega,h}\cap 2^{\omega}$ *и* $\mathrm{Ex}(g,h)\cap 2^{<\omega}$.

Заметим, что указанные признаки вложимости достаточно далеки от необходимых условий. В частности, условие $r(E)<\omega^2$ означает, что в $E^{(\gamma)}$ для некоторого $\gamma<\omega^2$ нет бесконечных путей. Очевидно, что достаточно потребовать отсутствия только Δ^0_ω-вычислимых путей. Полное решение вопроса о критериях вложения $\Delta^0_{\omega,g}\subseteq\Delta^0_{\omega,h}$ кажется автору достаточно сложной задачей.

Теорема 2. *Пусть $g,h:\omega^{<\omega}\to\omega\setminus\{0\}$ — вычислимые функции, а $\mathrm{Ex}(g,h)$ содержит непустое в. п. подмножество T со свойством $T'=T$. Тогда $\Delta^0_{\omega,g}\not\subseteq\Delta^0_{\omega,h}$.*

Доказательство. Найдем некоторое вычислимое перечисление $T=\{\bar a_0,\bar a_1,\dots\}$. Построим функцию $\alpha\in\Delta^0_{\omega,g}\setminus\Delta^0_{\omega,h}$. На шаге n будем определять $\alpha(n-1)$ и некоторые числа $B(n),K(n)\in\omega$. При этом для $\bar u=\alpha(0)\dots\alpha(n-1)$ будет выполняться свойство: $\exists i\le B(n)\ \ \bar u\ge\bar a_i$.

Шаг 0. Функция α пока нигде не определена, $B(0)=K(0)=0$.

Шаг $n+1$. Пусть $\bar u=\alpha(0)\dots\alpha(n-1)$.

Случай 1: существует $i\le B(n)$ такой, что $\bar u=\bar a_i$. Пусть $k=K(n)$. На этом шаге обеспечим неравенство $\alpha\ne\beta_k$, где функция β_k определена по схеме

$$\begin{cases}\beta_k(0)=\varphi_k^{\varnothing^{h()-1}}(\langle\rangle),\\ \beta_k(m)=\varphi_k^{\varnothing^{h(\beta_k(0),\dots,\beta_k(m-1))-1}}(\langle\beta_k(0),\dots,\beta_k(m-1)\rangle)\quad\text{при } m\ge 1.\end{cases}$$

Из $T'=T$ следует существование $x\ne y$, $\bar v_1$ и $\bar v_2$ таких, что $\bar ux\bar v_1,\bar uy\bar v_2\in T$. Найдем наименьший $i'\ge B(n)$, для которого такие $\bar ux\bar v_1$, $\bar uy\bar v_2$ содержатся в множестве $\{\bar a_0,\dots,\bar a_{i'}\}$. По условию $g(\bar u)>h(\bar u)$. Используя оракул $\varnothing^{g(\bar u)-1}$, выберем $\alpha(n)$ из $\{x,y\}$ так, чтобы $\alpha(n)\ne\varphi_k^{\varnothing^{h(\bar u)-1}}(\langle\bar u\rangle)$. Положим $B(n+1)=i'$ и $K(n+1)=K(n)+1$.

Случай 2: не существует $i\le B(n)$, для которого $\bar u=\bar a_i$. Найдем наименьший $i\le B(n)$, при котором $\bar u\ge\bar a_i$. Пусть $\bar a_i=\bar ud_0\dots d_s$. Полагаем $\alpha(n)=d_0$, $B(n+1)=B(n)$ и $K(n+1)=K(n)$.

Построение α закончено. Поймем сначала, что $\alpha(n)\in\Delta^0_{\omega,g}$. Это не вполне очевидно, поскольку по индукции определяется не просто $\alpha(n)$, а тройка чисел $\langle\alpha(n),B(n+1),K(n+1)\rangle$. Однако из анализа конструкции легко следует, что, зная набор $\alpha(0),\dots,\alpha(n-1)$, можно вычислить все числа $B(0),\dots,B(n)$ и $K(0),\dots,K(n)$. Тем самым $\alpha(n)$ можно найти, используя только номер набора $\langle\alpha(0),\dots,\alpha(n-1)\rangle$ и соответствующий оракул.

Нетрудно проверить, что конструкция работает правильно. Ясно, что $B(n)\le B(n+1)$ и $K(n)\le K(n+1)$ при $n\in\omega$. Пусть $\bar u_0=\varnothing$, $\bar u_n=\alpha(0)\dots\alpha(n-1)$. Докажем, что существует бесконечно много n, для которых на шаге $n+1$ выполняется случай 1, т. е. $\exists i\le B(n)\ \bar u_n=\bar a_i$. Предположим, что случай 1 верен при данном n. Покажем, что он будет верен для некоторого $n'>n$. По построению найдется наименьший $j\le B(n+1)$ такой, что $\bar u_n\alpha(n)\ge\bar a_j$. Пусть $\bar a_j=\bar u_n\alpha(n)d_1\dots d_s$. Тогда нетрудно проверить, что $\alpha(n+1)=d_1,\dots,\alpha(n+s)=d_s$, и можно взять $n'=n+s+1$.

Докажем теперь, что $\alpha\ne\beta_k$ при всех $k\in\omega$. Очевидно, что $\mathrm{ran}(K)=\omega$. Рассмотрим некоторое $k\in\omega$ и наибольшее $n\in\omega$, при котором $K(n)=k$.

Тогда на шаге $n+1$ выполняется случай 1. Допустим, что $\alpha = \beta_k$. Тогда $\bar{u} = \bar{u}_n = \beta_k(0)\dots\beta_k(n-1)$ и $\varphi_k^{\varnothing^{h(\bar{u})-1}}(\langle\bar{u}\rangle) = \beta_k(n)$, а по построению $\alpha(n) \neq \beta_k(n)$. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $g, h : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ — вычислимые функции, а $\mathrm{Ex}(g,h) \cap 2^{<\omega}$ содержит непустое в.п. множество T со свойством $T' = T$. Тогда*
(1) $\Sigma^0_{\omega,g} \not\subseteq \Sigma^0_{\omega,h}$,
(2) $\Delta^0_{\omega,g} \cap 2^\omega \not\subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.

Доказательство. (1) Повторяя предыдущие рассуждения, можно заметить: существует $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g} \cap 2^\omega$ такая, что $\alpha \neq \chi_M$ для любого $M \in \Sigma^0_{\omega,h}$. Тогда, очевидно, $N = \{n \in \omega \mid \alpha(n) = 1\}$ будет лежать в $\Sigma^0_{\omega,g}$ и не лежать в $\Sigma^0_{\omega,h}$.

Утверждение (2) следует из (1), так как из $\chi_M \in \Delta^0_{\omega,h}$ вытекает $M \in \Sigma^0_{\omega,h}$. Следствие доказано.

2. Критерий включения для линейных классов

В качестве примера использования теорем 1 и 2 укажем критерий вложения для классов вида $\Sigma^0_{\omega,g}$, где $g(x_1,\dots,x_n) = f(n) + c_1x_1 + \dots + c_nx_n$, а $c_i \in \omega$ — постоянные (их можно назвать *линейными*). Вычислимость g в этом случае эквивалентна вычислимости функций $f(n)$ и $f_1(n) = c_n$.

Пусть $g'(x_1,\dots,x_n) = f'(n) + c'_1x_1 + \dots + c'_nx_n$ и $g''(x_1,\dots,x_n) = f''(n) + c''_1x_1 + \dots + c''_nx_n$. Положим $\Delta_i = c'_i - c''_i$, $\Delta_i^+ = \max\{\Delta_i, 0\}$ для $i \geq 1$, а

$$A_n = f'(n) - f''(n) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^+$$

для $n \in \omega$.

Предложение 1. *Класс $\Sigma^0_{\omega,g'}$ содержится в $\Sigma^0_{\omega,g''}$ тогда и только тогда, когда множество $\{A_n \mid n \in \omega\}$ ограничено сверху и для не более чем конечного числа $n \in \omega$ одновременно выполняются условия $A_n > 0$ и $\Delta_{n+1} = 0$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Допустим сначала, что $\{A_n \mid n \in \omega\}$ не ограничено сверху. Положим $T = \{x_1\dots x_n \in 2^{<\omega} \mid g'(x_1,\dots,x_n) > g''(x_1,\dots,x_n)\}$ и покажем, что $T' = T$. Обозначим через $\Gamma(n)$ разность $f'(n) - f''(n)$. Зафиксируем $\bar{x} = x_1\dots x_n \in T$ и положим

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{если } \Delta_i \leq 0, \\ 1, & \text{если } \Delta_i > 0, \end{cases}$$

для $i \geq 1$. Тогда

$$g'(\bar{x},0,y_1,\dots,y_t) - g''(\bar{x},0,y_1,\dots,y_t) \\ = \Gamma(n+t+1) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x_i + \sum_{i=n+2}^{n+t+1} \Delta_i^+ = M_0 + A_{n+t+1},$$

где M_0 не зависит от t. Получаем, что $\bar{x}0y_1\dots y_t \in T$ для некоторого $t \geq 1$. Аналогично показывается, что $\bar{x}1y_1\dots y_t \in T$ для подходящего t и $\bar{x} \in T'$. Те же рассуждения показывают, что $T \neq \varnothing$. По следствию 2 $\Sigma^0_{\omega,g'} \not\subseteq \Sigma^0_{\omega,g''}$. Допустим теперь, что $A_n > 0$ и $\Delta_{n+1} = 0$ для бесконечно многих $n \in \omega$. Назовем набор $x_1\dots x_n \in 2^{<\omega}$ *хорошим*, если $\forall i \leq n$ из $\Delta_i < 0$ следует $x_i = 0$, а из $\Delta_i > 0$ —

$x_i = 1$. Положим $T = \{x_1 \dots x_n \in 2^{<\omega} \mid x_1 \dots x_n$ — хороший набор, $A_n > 0$ и $\Delta_{n+1} = 0\}$. Если $\bar{x} = x_1 \dots x_n \in T$, то

$$g'(\bar{x}) - g''(\bar{x}) = f'(n) - f''(n) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i x_i = \Gamma(n) + \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^+ = A_n.$$

Следовательно, $T \subseteq \mathrm{Ex}(g', g'')$. Покажем, что $T' = T$. Если $\bar{x} \in T$, то $\bar{x}0$ и $\bar{x}1$ тоже хорошие наборы. Найдем $n' > n$ такое, что $A_{n'} > 0$ и $\Delta_{n'+1} = 0$. Тогда хорошие наборы $\bar{x}0\bar{y}$ и $\bar{x}1\bar{y}$ длины n' тоже лежат в T.

($\Leftarrow$) $g'(x_1, \dots, x_n) - g''(x_1, \dots, x_n) = \Gamma(n) + \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta_i x_i \le A_n$, поэтому при условии $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n \le 0$ множество $\mathrm{Ex}(g', g'') \cap 2^{<\omega}$ конечно. Пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = a > 0$. Предположим, что $A_n \le a$ и $(\Delta_{n+1} \ne 0 \lor A_n \le 0)$ при $n \ge n_0$, а $E = \mathrm{Ex}(g', g'') \cap 2^{<\omega}$. Покажем, что $r(E) \le a$. Определим для $x_1 \dots x_m \in 2^{<\omega}$ величину $\beta(x_1, \dots, x_m)$, показывающую, насколько $x_1 \dots x_m$ нехорош, как число элементов в множестве $I_{\bar{x}} = \{i < m \mid i \ge n_0,\ x_1 \dots x_i \in E$ и верно одно из условий: ($\Delta_{i+1} > 0$ и $x_{i+1} = 0$) или ($\Delta_{i+1} < 0$ и $x_{i+1} = 1$)$\}$.

Докажем: если $\bar{x} = x_1 \dots x_m \in E$, то $\beta(\bar{x}) < a$. Если $i \in I$, то $x_1 \dots x_i \in E$, $A_i \ge g'(x_1, \dots, x_i) - g''(x_1, \dots, x_i) > 0$ и $\Delta_{i+1} \ne 0$. Следовательно, $\Delta_{i+1} x_{i+1} < \Delta_{i+1}^+$. Получаем, что

$$0 < g'(\bar{x}) - g''(\bar{x}) = \Gamma(m) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i x_i \le \Gamma(m) + \sum_{i=1}^{m} \Delta_i^+ - \beta(\bar{x}) = A_m - \beta(\bar{x}),$$

т. е. $\beta(\bar{x}) < A_m$. Если $\beta(\bar{x}) \ne 0$, то $m > n_0$ и $A_m \le a$.

Покажем теперь, что $\beta(\bar{x}) < a - t$ при $\bar{x} \in E^{(t)}$, $|\bar{x}| \ge n_0$ и $t < a$. Для $t = 0$ это верно. Переход ($t \to t+1$): пусть $\bar{x} \in E^{(t+1)}$ и $|\bar{x}| = m \ge n_0$. Тогда существуют $\bar{u}, \bar{v}$ такие, что $\bar{x}0\bar{u}, \bar{x}1\bar{v} \in E^{(t)}$. Из $\bar{x} \in E$ следует, что $A_m > 0$ и $\Delta_{m+1} \ne 0$. Если $\Delta_{m+1} > 0$, то $\beta(\bar{x}0\bar{u}) \ge \beta(\bar{x}) + 1$, а если $\Delta_{m+1} < 0$, то $\beta(\bar{x}1\bar{v}) \ge \beta(\bar{x}) + 1$. По предположению индукции $\beta(\bar{x}0\bar{u}), \beta(\bar{x}1\bar{v}) < a - t$. Аналогичные рассуждения показывают, что элементов $\bar{x} \in E^{(a)}$ с $|\bar{x}| \ge n_0$ не существует, т. е. в $E^{(a)}$ нет бесконечных путей. Из следствия 1 получаем вложение $\Sigma^0_{\omega,g'}$ в $\Sigma^0_{\omega,g''}$. Предложение доказано.

Следствие 3. *В формулировке предложения* 1 *классы* $\Sigma^0_{\omega,g'}$ *и* $\Sigma^0_{\omega,g''}$ *можно заменить на* $\Delta^0_{\omega,g'} \cap 2^\omega$ *и* $\Delta^0_{\omega,g''} \cap 2^\omega$.

Сравним теперь с фейнеровскими классы $\Sigma^0_{\omega,g}$ и $\Delta^0_{\omega,g}$, где $g(x_1, \dots, x_n) = a + bn + x_1 + \dots + x_n$, которые использовались при работе с ω-однородными булевыми алгебрами.

Следствие 4. *Пусть* $g_{a,b}(x_1, \dots, x_n) = a + bn + x_1 + \dots + x_n$ *для некоторых* $a, b \in \omega$, $h_0(x_1, \dots, x_n) = f_0(n)$ *и* $h_1(x_1, \dots, x_n) = f_1(n)$, *где* $f_0, f_1 : \omega \to \omega \setminus \{0\}$ — *вычислимые функции. Тогда*

(1) $\Sigma^0_{\omega,h_0} \subseteq \Sigma^0_{\omega,g_{a,b}} \Leftrightarrow f_0(n) \le c + bn$ *для некоторой константы* $c \in \mathbb{Z}$;

(2) $\Sigma^0_{\omega,g_{a,b}} \subseteq \Sigma^0_{\omega,h_1} \Leftrightarrow c + (b+1)n \le f_1(n)$ *для некоторой* $c \in \mathbb{Z}$;

(3) *классы* $\Sigma^0_{\omega,*}$ *в* (1) *и* (2) *можно заменить на* $\Delta^0_{\omega,*} \cap 2^\omega$.

Доказательство. Нужно просто воспользоваться предложением 1, непосредственно вычислив A_n и Δ_i.

Заметим, что признаки вложения в следствии 4 не зависят от a. Тем самым объединение всех фейнеровских классов, лежащих в $\Sigma^0_{\omega,g_{a,b}}$, содержится уже в $\Sigma^0_{\omega,g_{0,b}}$, при этом имеют место строгие вложения $\Sigma^0_{\omega,g_{0,b}} \subset \Sigma^0_{\omega,g_{1,b}} \subset \ldots$. А фейнеровские классы, содержащие $\Sigma^0_{\omega,g_{a,b}}$, содержат в себе всю эту цепочку. Аналогичное верно для $\Delta^0_{\omega,g_{a,b}} \cap 2^\omega$.

Следствие 5. *Классы $\Sigma^0_{\omega,g}$ и $\Delta^0_{\omega,g}$ не могут, вообще говоря, быть представлены как объединение или пересечение некоторого семейства фейнеровских классов.*

3. Необходимость некоторых условий

Покажем теперь, что в п. (2) теоремы 1 оценки на ранг E не могут быть ослаблены, т. е. при любом $m \in \omega$, $m \geq 1$, условие $r(E) < \omega \cdot m$ нельзя заменить условием $r(E) \leq \omega \cdot m$. То же самое верно и для следствия 1.

Для этого построим некоторое вычислимое множество $E \subseteq 2^{<\omega}$. Σ^0_k-*условием* при $k \geq 1$ называем выражение вида $\exists x_1 \forall x_2 \ldots \mathrm{Q} x_k \varphi_n(\langle x_1, \ldots, x_k\rangle) = 1$, где $\varphi_n(y)$ всюду определена (здесь Q — один из кванторов, зависящий от четности k). *Номером* Σ^0_k-условия будем называть любое такое n. Σ^0_0-*условием* назовем условие вида $\varphi_n(0) = 1$, где $\varphi_n(0)\downarrow$, а n — его номером. Аналогично определяем и понятие Π^0_n-условий и их номеров.

Лемма 2. *Пусть $k \geq 1$. Для любого Σ^0_k-условия Φ существует его представление вида $\exists x P(x)$, где $P(x)$ — Π^0_{k-1}-условие с параметром x, из $P(x_1) \& P(x_2)$ следует $x_1 = x_2$, и Π^0_{k-1}-номер условия $P(x)$ может быть вычислен по $k, x \in \omega$ и Σ^0_k-номеру условия Φ.*

Доказательство. Пусть $k = 1$. Условие Φ представимо в виде $\exists x P_0(x)$, где $P_0(x)$ — Π^0_0-условие. Положим $P(x) = P_0(x) \& \forall x_1 < x \neg P_0(x_1)$.

Допустим, что $k = 2$. Пусть $\Phi \sim \exists x \forall y R_0(x, y)$, где $R_0(x, y)$ — Σ^0_0-условие. Определим $R(z, y)$ следующим образом. Пусть $z = \langle x, t\rangle$. Положим

$$R(z,y) \Leftrightarrow \forall i \leq y\, R_0(x,i), \quad \forall x_1 < x\, \exists i \leq t\, \neg R_0(x_1,i) \quad \text{и} \quad \exists x_1 < x\, \forall i < t\, R_0(x_1,i).$$

Условие R вычислимо и строится эффективно по R_0. Пусть $P(z) = \forall y\ R(z, y)$. Докажем, что условия Φ и $\exists z\ P(z)$ равносильны. Если $\exists z \forall y\ R(z, y)$ и $z = \langle x, t\rangle$, то $\forall i\ R_0(x, i)$. Если $\exists x \forall y\ R(x, y)$, то рассмотрим наименьшее x, при котором $\forall y\ R_0(x, y)$. Для каждого $x_1 < x$ найдется наименьшее i_{x_1} такое, что $\neg R_0(x_1, i_{x_1})$. Взяв $t = \max\{i_0, \ldots, i_{x-1}\}$, получим $\forall y\ R(\langle x, t\rangle, y)$. Единственность z, при котором истинно $P(z)$, легко проверяется.

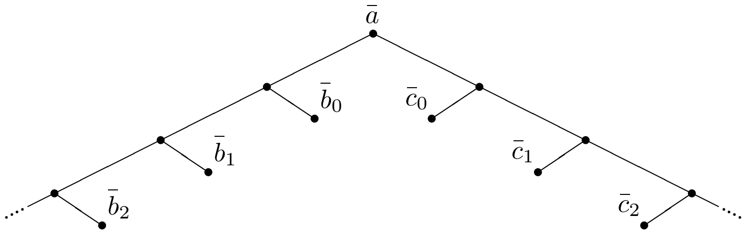
Доказательство для $k > 2$ — релятивизация случая $k = 2$ относительно оракула $\varnothing^{k-2}$: если Φ — Σ^0_k-условие, то Φ представимо как $\exists x \forall y R(x, y)$, где $R(x, y)$ — $\Sigma^0_0(\varnothing^{k-2})$-условие. Лемма доказана.

Пусть $\bar{x} \in 2^{<\omega}$. Назовем $\bar{x}$ *простым набором*, если $\bar{x} = \underbrace{0\ldots0}_{n}1$ или $\bar{x} = \underbrace{1\ldots1}_{n}0$, где $n > 0$, и *полупростым*, если $\bar{x}$ простой, $\bar{x} = \underbrace{0\ldots0}_{n}$ или $\bar{x} = \underbrace{1\ldots1}_{n}$ для некоторого $n > 0$. Легко проверить, что для любого непустого $\bar{x} \in 2^{<\omega}$ существует единственное разложение $\bar{x} = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_m$, где $\bar{x}_i$ — простые наборы для $i < m$, а $\bar{x}_m$ полупростой. Назовем это m *уровнем* элемента $\bar{x}$, обозначив его как $l(\bar{x})$. Считаем, что уровень пустого набора равен 0.

Построим теперь $E \subseteq 2^{<\omega}$. Оно будет деревом, т. е. из $\bar{u} \in E$ и $\bar{v} \geq \bar{u}$ будет следовать $\bar{v} \in E$. Будем строить его индукцией по $l(\bar{x})$: на шаге $n \in \omega$

определим $E_n = \{\bar{x} \in E \mid l(\bar{x}) \leq n\}$ и затем положим $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$. Множество E_0 одноэлементно.

Чтобы упростить понимание конструкции, сначала изложим общую схему перехода от E_n к E_{n+1}, которая не зависит от n, и докажем некоторые ее свойства, а затем уточним детали. Шаг конструкции: допустим, что E_n уже определено, $\bar{x} \in 2^{<\omega}$ и $l(\bar{x}) = n+1$. Пусть $\bar{x} = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n+1}$ — соответствующее разложение и $\bar{a} = \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$. Если $\bar{a}$ фиксировано, то все такие $\bar{x}$ можно изобразить так:



здесь $\bar{b}_i = \bar{a}\underbrace{0\ldots0}_{i+1}1$ и $\bar{c}_i = \bar{a}\underbrace{1\ldots1}_{i+1}0$. Если $\bar{a} \notin E_n$, то все $\bar{x}$ не лежат в E_{n+1}. Если же $\bar{a} \in E_n$, то все такие $\bar{x}$ либо будут одновременно лежать в E_{n+1}, либо нет.

Считаем, что вершине $\bar{a}$ некоторым образом переданы условия $\overline{\Phi}^* = (\Phi_0^*, \ldots, \Phi_l^*)$ и матрица условий

$$\overline{\Phi} = \begin{cases} \Phi_0^{(0)}, \Phi_1^{(0)}, \ldots, \\ \ldots, \\ \Phi_0^{(r)}, \Phi_1^{(r)}, \ldots, \end{cases}$$

при этом Φ_i^* — Σ_0^0-условия, а $\Phi_i^{(t)}$ — $\Sigma_{\gamma_t}^0$-условия для некоторых $\gamma_t \in \omega$. Более того, считаем, что этот набор условий эффективно задан, т. е. номер $\Sigma_{\gamma_t}^0$-условия $\Phi_i^{(t)}$ может быть вычислен по $\bar{a}$, i и t. Для построения E_{n+1} используются только условия $\Phi_0^*, \ldots, \Phi_l^*$ и $\Phi_0^{(0)}, \ldots, \Phi_0^{(r)}$, остальные просто передаются следующим точкам $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$. Для простоты обозначений предположим, что $\Phi_0^{(0)}, \ldots, \Phi_0^{(q)}$ — Σ_γ^0-условия для некоторых $\gamma \geq 2$, $\Phi_0^{(q+1)}, \ldots, \Phi_0^{(p)}$ — Σ_1^0-условия и $\Phi_0^{(p+1)}, \ldots, \Phi_0^{(r)}$ — Σ_0^0-условия.

Если среди $\Phi_0^*, \ldots, \Phi_l^*$ или $\Phi_0^{(p+1)}, \ldots, \Phi_0^{(r)}$ есть ложные, то $\bar{a}$ — концевая вершина в E. Предположим, что это не так. Тогда помещаем в E_{n+1} все элементы $\bar{x}$, о которых шла речь выше (т. е. строим под $\bar{a}$ указанную выше картинку). Осталось описать условия, которые передаются $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$. Зафиксируем $i \in \omega$. Во-первых, положим

$$\overline{\Phi}_1 = \begin{cases} \Phi_1^{(0)}, \Phi_2^{(0)}, \ldots, \\ \ldots, \\ \Phi_1^{(r)}, \Phi_2^{(r)}, \ldots \end{cases} \quad \text{(это } \overline{\Phi} \text{ без первого столбца).}$$

Далее, распишем $\Phi_0^{(t)}$ как $\exists x\ P_t(x)$, а $P_t(x)$ — как $\forall y\ R_t(x,y)$ для $0 \leq t \leq q$, где $R_t(x,y)$ — $\Sigma_{\gamma_t-2}^0$-условие с параметрами $x, y \in \omega$, и $\Phi_0^{(s)}$ — как $\exists x\ Q_s(x)$ для $q+1 \leq s \leq p$, где $Q_s(x)$ — Σ_0^0-условие. При этом в силу леммы 2 можно считать, что для $P_t(x)$ и $Q_s(x)$ существует не более одного x, при котором они истинны.

Пусть $i = \langle i_0, \dots, i_p \rangle$ (последняя запись обозначает здесь стандартную вычислимую биекцию $\langle \dots \rangle : \omega^{p+1} \to \omega$, где p фиксировано). Положим

$$\overline{\Phi}_2 = \begin{cases} R_0(i_0, 0), R_0(i_0, 1), R_0(i_0, 2), \dots, \\ \dots, \\ R_q(i_q, 0), R_q(i_q, 1), R_q(i_q, 2), \dots \end{cases}$$

и $\overline{\Phi}_3^* = (Q_{q+1}(i_{q+1}), \dots, Q_p(i_p))$. Передаем элементам $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$ объединение матриц $\overline{\Phi}_1$ и $\overline{\Phi}_2$ в качестве $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}_3^*$ в качестве $\overline{\Phi}^*$. Далее будут описаны дополнительные условия, передаваемые $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$, которые не внесут существенных изменений в работу конструкции.

Докажем следующий факт: если среди условий, переданных вершине $\bar{a}$, есть ложные, то это ограничивает ранг той части E, которая находится под $\bar{a}$. Для любого ординала α через $\bar{a}^{(\alpha)}$ обозначим $E_{\bar{a}}^{(\alpha)}$, где $E_{\bar{a}} = \{\bar{x} \in E \mid \bar{a} \geq \bar{x}\}$. Индукцией по α нетрудно показать, что $\bar{a}^{(\alpha)} = E_{\bar{a}} \cap E^{(\alpha)}$.

Лемма 3. *Пусть вершине $\bar{a}$ на шаге конструкции переданы наборы условий $\overline{\Phi}^*$ и $\overline{\Phi}$ и $\bar{a} \in E_n$. Тогда*

(1) *если среди $\Phi_0^*, \dots, \Phi_l^*$ есть ложные, то $|\bar{a}^{(0)}| = 1$;*

(2) *если $\Phi_0^{(t)}, \Phi_1^{(t)}, \dots$ — Σ_0^0-условия и $\Phi_j^{(t)}$ ложно, то $|\bar{a}^{(2j)}| \leq 1$;*

(3) *если это Σ_1^0-условия и $\Phi_j^{(t)}$ ложно, то $|\bar{a}^{(2j+2)}| \leq 1$;*

(4) *если это Σ_γ^0-условия для $\gamma \geq 2$ и $\Phi_j^{(t)}$ ложно, а $\gamma' = [\gamma/2]$, то $|\bar{a}^{(\omega \cdot \gamma' + 2j)}| \leq 1$.*

Доказательство. (1) Очевидно по построению. (2) Индукция по j. Случай $j = 0$: ложность $\Phi_0^{(t)}$ влечет $|\bar{a}^{(0)}| = 1$. Индуктивный переход ($j \Rightarrow j+1$): если $|\bar{a}^{(0)}| > 1$, то в E лежат все $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$ и они получают условие $\Phi_{j+1}^{(t)}$ с номером j. По предположению индукции $\left|\bar{b}_i^{(2j)}\right| \leq 1$ и $\left|\bar{c}_i^{(2j)}\right| \leq 1$. Заметим, что $\bar{b}_i^{(2j)} = E_{\bar{b}_i} \cap E^{(2j)} = E_{\bar{b}_i} \cap E_{\bar{a}} \cap E^{(2j)} = E_{\bar{b}_i} \cap \bar{a}^{(2j)}$. Следовательно, $\bar{a}^{(2j)} \subseteq \mathscr{D}_{\bar{a}} = \{\bar{a}\bar{x} \mid \bar{x}$ — полупростой набор$\} \cup \{\bar{a}\}$, а $\bar{a}^{(2j+2)} \subseteq \mathscr{D}''_{\bar{a}} = \{\bar{a}\}$.

Далее предполагаем, что $|\bar{a}^{(0)}| > 1$.

(3) Пусть $j = 0$, $\Phi_0^{(t)} \Leftrightarrow \exists x\ Q_t(x)$. Тогда каждый элемент $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$ получит ложное Σ_0^0-условие $Q_t(i_t)$, следовательно, $\left|\bar{b}_i^{(0)}\right| = \left|\bar{c}_i^{(0)}\right| = 1$. Отсюда $\bar{a}^{(0)} = \mathscr{D}_{\bar{a}}$ и $\bar{a}^{(2)} = \{\bar{a}\}$. Переход ($j \Rightarrow j+1$) аналогичен предыдущему случаю.

(4) Доказываем индукцией по γ. Пусть γ фиксировано. Рассмотрим $j = 0$, $\Phi_0^{(t)} \Leftrightarrow \exists x \forall y\ R_t(x, y)$. Тогда каждый элемент $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$ получит набор $\Sigma_{\gamma-2}^0$-условий $R_t(i_t, 0), R_t(i_t, 1), \dots$, одно из которых окажется ложным. Следовательно, для любого i будет $\bar{b}_i^{(\omega \cdot (\gamma'-1)+m)} = \varnothing$ при подходящем $m \in \omega$, и то же самое верно для $\bar{c}_i$. Это следует либо из (2), (3) при $\gamma = 2, 3$, либо из предположения индукции. Отсюда легко вывести, что $\bar{a}^{(\omega \cdot \gamma')} = \bigcap\limits_{m \in \omega} \bar{a}^{(\omega \cdot (\gamma'-1)+m)} \subseteq \{\bar{a}\}$.

Переход ($j \Rightarrow j+1$) аналогичен предыдущим случаям. Лемма доказана.

Завершим теперь построение E, доказав

Предложение 2. *Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$ и $h(\bar{x}) = 2m - 1$ при всех $\bar{x} \in \omega^{<\omega}$. Тогда существует вычислимая функция $g : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ такая, что $\Delta_{\omega,g}^0 \cap 2^\omega \not\subseteq \Delta_{\omega,h}^0$ и $r(E) = \omega \cdot m$, где $E = \mathrm{Ex}(g, h)$.*

Доказательство. Сначала построим вычислимое $E \subseteq 2^{<\omega}$ по описанной выше схеме, добавляя вершинам дополнительные условия. Считаем, что наименьшему элементу в E передается некоторый фиктивный набор истинных Σ^0_1-условий $\overline{\Phi} = \left(\Phi^{(0)}_0, \Phi^{(0)}_1, \dots\right)$, а $\overline{\Phi}^* = \varnothing$. Одновременно построим в E некоторую последовательность $\bar{d}_0 > \bar{d}_1 > \dots$, где $l(\bar{d}_n) = n$, $\bar{d}_0$ — пустой набор. Рассмотрим сначала случай, когда $m \geq 2$.

Рассмотрим шаг конструкции для фиксированных n и $\bar{a}$. Условие

$$\varphi_n^{\varnothing^{2m-2}}(\langle \bar{a} \rangle)\downarrow = 0 \tag{$*$}$$

является Σ^0_{2m-1}-условием. Приведем его к виду $\exists x P(x)$, где $P(x) \Leftrightarrow \forall y R(x, y)$, $R(x, y)$ — Σ^0_{2m-3}-условие с параметрами $x, y \in \omega$ и существует не более одного x, при котором верно $P(x)$. В дополнение к условиям $\overline{\Phi}_1 + \overline{\Phi}_2$ и $\overline{\Phi}^*_3$, определенным выше, передадим каждому $\bar{b}_i$ строку Σ^0_{2m-2}-условий $\exists y \neg R(0, y), \exists y \neg R(1, y), \dots$.

Для элементов $\bar{c}_i$ немного скорректируем прошлую схему. Представим i как $\langle i_0, \dots, i_p, i_{p+1} \rangle$, повторим предыдущее определение $\overline{\Phi}_2$ и $\overline{\Phi}^*_3$, но к $\overline{\Phi}_2$ добавим бесконечную строку Σ^0_{2m-3}-условий $R(i_{p+1}, 0), R(i_{p+1}, 1), \dots$.

Кроме того, если $\bar{d}_n = \bar{a}$, то определим $\bar{d}_{n+1}$ следующим образом. Одновременно с определением $\bar{d}_n$ индукцией по n нужно проверять, что все условия, передаваемые $\bar{a} = \bar{d}_n$, верны. При $n = 0$ это так. По предположению индукции считаем, что $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}^*$ состоят только из истинных условий. Это означает, что для любого t, $0 \leq t \leq q$, существует i_t такой, что $P_t(i_t)$, а для любого s, $q+1 \leq s \leq p$, существует i_s такое, что $Q_s(i_s)$. Предположим, что $(*)$ верно. Тогда существует i_{p+1} такое, что $P(i_{p+1})$. Положим $\bar{d}_{n+1} = \bar{c}_i$, где $i = \langle i_0, \dots, i_p, i_{p+1} \rangle$.

Если же $(*)$ ложно, то $\bar{d}_{n+1} = \bar{b}_i$, где $i = \langle i_0, \dots, i_p \rangle$. Нетрудно проверить, что в любом случае все условия для $\bar{d}_{n+1}$ истинны.

Пусть теперь $m = 1$. Условие $(*)$ эквивалентно $\exists x\ P(x)$, где $P(x)$ — Σ^0_0-условие, всегда истинное на не более чем одном x. Каждому $\bar{b}_i$ дополнительно передаем последовательность Σ^0_0-условий $\neg P(0), \neg P(1), \dots$. Для $\bar{c}_i$ представляем i как $\langle i_0, \dots, i_p, i_{p+1} \rangle$ и добавляем в $\overline{\Phi}^*_3$ условие $P(i_{p+1})$.

Если $\bar{d}_n = \bar{a}$, то определяем $i_0, \dots, i_p$, как выше, при истинности $(*)$ полагаем $\bar{d}_{n+1} = \bar{c}_i$, где $i = \langle i_0, \dots, i_p, i_{p+1} \rangle$ и $P(i_{p+1})$, а при ложности — $\bar{d}_{n+1} = \bar{b}_i$, где $i = \langle i_0, \dots, i_p \rangle$. Построение E закончено.

Докажем, что $E^{(\omega \cdot m)} = \varnothing$ (и тем самым $r(E) \leq \omega \cdot m$). Пусть $m \geq 2$. Рассмотрим произвольный шаг конструкции с фиксированными n и $\bar{a}$. Очевидно, что сложность условий в $\overline{\Phi}$ не превосходит Σ^0_{2m-2}. Предположим, что $(*)$ истинно, т. е. $P(i_{p+1})$ истинно при некотором $i_{p+1} \in \omega$. Каждый $\bar{b}_i$ получит ложное Σ^0_{2m-2}-условие $\exists y\ \neg R(i_{p+1}, y)$, поэтому в силу леммы 3 $\bar{b}_i^{(\omega \cdot (m-1)+j)} = \varnothing$, где j — число, не зависящее от i. Следовательно, никакие вершины вида $\bar{a}\underbrace{0 \dots 0}_{k}$, $k \geq 1$, не будут лежать в $E^{(\omega \cdot (m-1)+j+1)}$, и $\bar{a} \notin E^{(\omega \cdot (m-1)+j+2)}$.

Допустим, что все условия $\Phi^*_0, \dots, \Phi^*_l, \Phi^{(0)}_0, \dots, \Phi^{(r)}_0$ истинны, $P_t(i_t)$ истинно при $0 \leq t \leq q$, $Q_s(i_s)$ истинно при $q+1 \leq s \leq p$ и $i = \langle i_0, \dots, i_{p+1} \rangle$. Тогда при $j \neq i$ элемент $\bar{c}_j$ получит ложное условие вида $R_s(x, y)$, $Q_s(x)$ или $R(x, y)$, сложность которого не превосходит Σ^0_{2m-3}. Следовательно, $\bar{c}_j^{(\omega \cdot (m-2)+t)} = \varnothing$ для некоторого $t \in \omega$. Из этого легко следует, что элементы вида $\bar{a}1\dots$, входящие в $\bar{a}^{(\omega \cdot (m-1)+1)}$, лежат в $\bar{c}_i^{(\omega \cdot (m-1)+1)}$. Тем самым $\bar{a}^{(\omega \cdot m)} \subseteq \{\bar{x} \mid \bar{c}_i \geq \bar{x}\}$.

Предположим, что $(*)$ ложно. Здесь ситуация меняется на симметричную — каждый $\bar{c}_i$ получает ложное Σ^0_{2m-3}-условие $R(x, y)$, поэтому элементы вида $\bar{a}1\dots$ не лежат в $\bar{a}^{(\omega \cdot (m-1)+1)}$. Последовательность $\exists y\ \neg R(0, y), \exists y\ \neg R(1, y), \dots$

будет истинной для каждого $\bar{b}_i$. Поскольку набор $\overline{\Phi}$ всегда непуст, найдется $i \in \omega$ такое, что при $j \neq i$ элемент $\bar{b}_j$ получит ложное условие вида $R_s(x, y)$ или $Q_s(y)$. Получаем, что $\bar{a}^{(\omega \cdot m)} \subseteq \{\bar{x} \mid \bar{b}_i \geq \bar{x}\}$.

Если же среди условий $\Phi_0^*, \ldots, \Phi_l^*, \Phi_0^{(0)}, \ldots, \Phi_0^{(r)}$ есть ложные, то $\bar{a}^{(\omega \cdot m)} = \varnothing$ в силу леммы 3.

Поскольку $\bar{a}$ выбиралось произвольно, отсюда следует, что $E^{(\omega \cdot m)} = \varnothing$. Рассуждения для случая $m = 1$ аналогичны.

Нетрудно проверить, что последовательность $\{\bar{d}_n\}_{n \in \omega}$ вычислима с оракулом $\varnothing^{2m-1}$. Положим

$$g(\bar{x}) = \begin{cases} 2m, & \text{если } \bar{x} \in E, \\ 2m-1, & \text{если } \bar{x} \in \omega^{<\omega} \setminus E. \end{cases}$$

Легко построить $\varnothing^{2m-1}$-вычислимую функцию $\alpha : \omega \to \{0, 1\}$ так, что $\{\bar{d}_n\}$ — подпоследовательность в $\{\alpha(0) \ldots \alpha(t)\}_{t \in \omega}$: если $\alpha(0), \ldots, \alpha(t)$ уже определены, то находим n такое, что $|\bar{d}_n| \leq t + 1 < |\bar{d}_{n+1}|$, и выбираем $\alpha(t+1)$ из $\bar{d}_{n+1}$. Поскольку $\{\bar{d}_n\}_{n \in \omega}$ — путь в E и E — дерево, то $\alpha(0) \ldots \alpha(t) \in E$ для любого t и $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g}$. Покажем, что $\alpha \notin \Delta^0_{\omega,h}$. Допустим, что $\alpha(t) = \varphi_n^{\varnothing^{2m-2}}(\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(t-1) \rangle)$ для некоторого $n \in \omega$. Найдем t, для которого $\alpha(0) \ldots \alpha(t) = \bar{d}_n$, и рассмотрим шаг конструкции, на котором $\bar{d}_n = \bar{a}$. Если $\alpha(t+1) = 0$, то $\varphi_n^{\varnothing^{2m-2}}(\langle \bar{a} \rangle)\!\downarrow = 0$ и $\alpha(t+1) = 1$ по выбору $\bar{d}_{n+1}$; противоречие. Случай $\alpha(t+1) = 1$ аналогичен. Предложение доказано.

Следствие 6. *Пусть $m \in \omega \setminus \{0\}$ и $h(\bar{x}) = 2m - 1$ при всех $\bar{x} \in \omega^{<\omega}$. Тогда существует вычислимая функция $g : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ такая, что $\Sigma^0_{\omega,g} \not\subseteq \Sigma^0_{\omega,h}$ и $r(E) = \omega \cdot m$, где $E = \mathrm{Ex}(g, h) \cap 2^{<\omega}$.*

Доказательство. В доказательстве предложения 2 нужно заменить условие $(*)$ на $\varphi_n^{\varnothing^{2m-2}}(\langle \bar{a} \rangle)\!\downarrow$. В итоге будет построено некоторое вычислимое дерево $E \subseteq 2^{<\omega}$. Определяя g точно так же, получим функцию $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g} \cap 2^\omega$ со свойством: если $M = \{t \in \omega \mid \alpha(t) = 1\}$, то $M \notin \Sigma^0_{\omega,h}$. Следствие доказано.

Заметим, что оценка на ранг E точна и в п. (3) теоремы 1.

Следствие 7. *Пусть $h : \omega^{<\omega} \to \omega$ и $h(x_1, \ldots, x_t) = t + 1$. Тогда существует вычислимая функция $g : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ такая, что $\Delta^0_{\omega,g} \cap 2^\omega \not\subseteq \Delta^0_{\omega,h}$ и $r(E) = \omega^2$, где $E = \mathrm{Ex}(g, h)$.*

Доказательство. Вновь нужно повторить доказательство предложения 2, заменив условие $(*)$ на $\varphi_n^{\varnothing^{|\bar{a}|}}(\langle \bar{a} \rangle)\!\downarrow = 0$. Теперь сложность условий в наборе $\overline{\Phi}$ будет расти по мере роста $|\bar{a}|$, однако для каждой конкретной вершины $\bar{a}$ эта сложность будет ограничена. Последовательность $\bar{d}_n$ выбирается аналогично — так, чтобы все условия, передаваемые $\bar{a} = \bar{d}_n$, были истинны. Для превращения доказательства того, что $E^{(\omega \cdot m)} = \varnothing$, в доказательство равенства $E^{(\omega^2)} = \varnothing$ нужно произвести следующие изменения.

Пусть n и $\bar{a}$ фиксированы. Если $(*)$ истинно, то каждая $\bar{b}_i$ получит ложное Σ^0_γ-условие $\exists y \; \neg R(i_{p+1}, y)$, где γ не зависит от i. Кроме того, найдется $i \in \omega$ такой, что при $j \neq i$ $\bar{c}_j$ получит некоторое ложное Σ^0_γ-условие. Тем самым $\bar{a}^{(\omega^2)} \subseteq \{\bar{x} \mid \bar{c}_i \geq \bar{x}\}$. Рассуждения для случая ложного $(*)$ аналогичны.

Условие $(*)$ является $\Sigma^0_{|\bar{a}|+1}$-условием, т. е. $\bar{a}$ в дополнение к условиям из $\overline{\Phi}$ передаст вершинам $\bar{b}_i$ и $\bar{c}_i$ некоторые $\Sigma^0_{|\bar{a}|}$-условия. Следовательно, сама вершина $\bar{a}$ получит в Φ какие-то Σ^0_γ-условия с $\gamma \le |\bar{a}|$ (при $|\bar{a}| = 0$ это будут Σ^0_1-условия). Поэтому, зная $\bar{d}_n$, набор $\bar{d}_{n+1}$ можно вычислить с помощью оракула $\varnothing^{|\bar{d}_n|+1}$. Пусть

$$g(x_1, \ldots, x_t) = \begin{cases} t+1, & \text{если } x_1 \ldots x_t \notin E, \\ t+2, & \text{если } x_1 \ldots x_t \in E. \end{cases}$$

Тогда найдется функция $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g}$ такая, что $\{\bar{d}_n\}_{n\in\omega}$ — подпоследовательность в $\{\alpha(0)\ldots\alpha(t)\}_{t\in\omega}$. Докажем это. Пусть $\alpha(0), \ldots, \alpha(t)$ уже определены. Для вычисления $\alpha(t+1)$ можно использовать оракул $\varnothing^{t+2}$. Последовательно вычисляя с его помощью $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \ldots$, можно найти $n \in \omega$ такое, что $|\bar{d}_n| \le t+1 < |\bar{d}_{n+1}|$, и вычислить $\bar{d}_{n+1}$. Теперь в качестве $\alpha(t+1)$ нужно выбрать соответствующий элемент из $\bar{d}_{n+1}$. Доказательство того, что $\alpha \notin \Delta^0_{\omega,h}$, аналогично. Следствие доказано.

Построим еще один пример, показывающий, что условие вычислимой перечислимости в формулировке теоремы 2 существенно.

Предложение 3. *Существуют вычислимые функции $g, h : \omega^{<\omega} \to \omega \setminus \{0\}$ такие, что $\mathrm{Ex}(g,h) \cap 2^{<\omega}$ содержит непустое Π^0_2-подмножество T со свойством $T' = T$, но $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{k,t}(m)$ обозначает результат вычисления $\varphi_k(m)$ после t шагов работы машины Тьюринга. Нетрудно найти вычислимую функцию $\gamma(k,m,t)$ (см. [3]) со свойствами:

(a) если $\varphi^{\varnothing'}_k(m)\downarrow = x$, то $\exists t_0 \forall t \ge t_0\ \gamma(k,m,t) = x$;

(b) если $\varphi^{\varnothing'}_k(m)\uparrow$, то $\exists^\infty t\ \gamma(k,m,t) \ne \gamma(k,m,t+1)$.

Обозначим $\gamma(k,m,t)$ через $\varphi'_{k,t}(m)$. Тогда $\varphi^{\varnothing'}_k(m) = \lim\limits_{t\to\infty} \varphi'_{k,t}(m)$.

Построим некоторое вычислимое множество $E \subseteq 2^{<\omega}$ по шагам, на шаге s определим $E_s = \{\bar{u} \in E \mid |\bar{u}| \le 2s\}$. Затем положим $E = \bigcup\limits_{s\in\omega} E_s$, $h(\bar{u}) = 1$ для всех $\bar{u} \in \omega^{<\omega}$, а

$$g(\bar{u}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar{u} \in \omega^{<\omega} \setminus E, \\ 2, & \text{если } \bar{u} \in E. \end{cases}$$

Шаг 0. Множество E_0 состоит из пустого набора.

Шаг $s+1$. Пусть E_s уже построено. Рассмотрим некоторый $\bar{u} = u_1 \ldots u_{2s} \in 2^{<\omega}$. Обозначим через $A = A(\bar{u}, s)$ число элементов в множестве $\{i \le 2s \mid u_1 \ldots u_i \in E_s\}$. Зафиксируем k такое, что $0 \le k \le s-1$. Пусть B_k равно числу элементов в $\{t \le s \mid \varphi'_{k,t}(\langle u_1, \ldots, u_{2k+1}\rangle) \ne u_{2k+2}\}$ в случае, когда $u_1 \ldots u_{2k+1} \in E_s$, и

$$B_k = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi_{k,s}(\langle u_1, \ldots, u_{2k+2}\rangle)\downarrow = u_{2k+2}, \\ \infty & \text{иначе} \end{cases}$$

в случае $u_1 \ldots u_{2k+1} \notin E_s$.

Если $\forall k \le s-1\ (k + B_k) > A$, то помещаем элементы $\bar{u}0, \bar{u}1, \bar{u}00, \bar{u}01, \bar{u}10, \bar{u}11$ в E_{s+1}. В противном случае все эти элементы в E_{s+1} не лежат.

Построение E закончено. Докажем сначала, что $\Delta^0_{\omega,g} \subseteq \Delta^0_{\omega,h}$. Пусть $\alpha \in \Delta^0_{\omega,g}$. Покажем, что α вычислима. Пусть

$$\begin{cases} \alpha(0) = \varphi_k^{\varnothing^{g()-1}}(\langle\rangle), \\ \alpha(n+1) = \varphi_k^{\varnothing^{g(\alpha(0),\ldots,\alpha(n))-1}}(\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n)\rangle) \end{cases}$$

для некоторого $k \in \omega$.

Положим $u_1 = \alpha(0), \ldots, u_{2k+2} = \alpha(2k+1)$. Рассмотрим произвольный $\bar{u} \in 2^{<\omega}$ вида $\bar{u} = u_1 \ldots u_{2k+2}\bar{v}$, где $|\bar{u}| = 2s$ и $s \geq k+1$, и работу с ним на шаге $s+1$. Возможны следующие случаи.

(1) $u_1 \ldots u_{2k+1} \in E_s$. Тогда

$$u_{2k+2} = \alpha(2k+1) = \varphi_k^{\varnothing'}(\langle u_1, \ldots, u_{2k+1}\rangle) = \lim_{t\to\infty} \varphi'_{k,t}(\langle u_1, \ldots, u_{2k+2}\rangle).$$

Следовательно, B_k ограничена для всех $\bar{u}$ указанного вида. Поэтому лишь конечное число начальных сегментов последовательности $\alpha(0)\alpha(1)\ldots$ будет лежать в E, в противном случае, рассматривая $\bar{u}$ вдоль этой последовательности, получим бесконечный рост A. Отсюда следует, что $\alpha(n+1) = \varphi_k(\langle \alpha(0), \ldots, \alpha(n)\rangle)$ при достаточно больших n.

(2) $u_1 \ldots u_{2k+1} \notin E_s$. Тогда $B_k = 0$ при достаточно больших s, дальнейшие рассуждения аналогичны.

Определим теперь

$$\begin{aligned} T_0 = \{u_1u_2\ldots u_{2p-1}u_{2p} \mid p \geq 0 \text{ и } \forall k \leq p-1 \\ u_{2k+2} \neq \varphi_k^{\varnothing'}(\langle u_1, \ldots, u_{2k+1}\rangle) \text{ при } u_1 \ldots u_{2k+1} \in E, \\ u_{2k+2} \neq \varphi_k(\langle u_1, \ldots, u_{2k+1}\rangle) \text{ при } u_1 \ldots u_{2k+1} \notin E\} \end{aligned}$$

и положим $T = T_0 \cap E$. Легко проверить, что наборы 00 и 01 лежат в E и один из них попадет в T, поэтому $T \neq \varnothing$. Докажем, что $T' = T$. Пусть $\bar{v}_0 \in T$. Покажем, что существует $\bar{v}$ такой, что $\bar{v}_0 0\bar{v} \in T$. Пусть $|\bar{v}_0| = 2p$. Рассмотрим $s > p$ и выберем $\bar{u}^s$ вида $\bar{v}_0 0u_{2p+2}0u_{2p+4}\ldots 0u_{2s}$ из T_0 (это всегда можно сделать). Более того, можно считать, что $\bar{u}^{p+1} \geq \bar{u}^{p+2} \geq \ldots$. Предположим, что $\bar{v}_0 0\bar{v} \notin T$ ни для какого $\bar{v}$. Рассмотрим работу с $\bar{u}^s$ на шаге $s+1$. Из нашего предположения следует, что $A \leq A^*$ для всех s, где $A^* \in \omega$. При этом для любого k имеем $B_k \to \infty$ при $s \to \infty$. Если $k > A^*$, то $(k + B_k) > A$, а для $k = 0, \ldots, A^*$ будет $k + B_k$ больше A при достаточно больших s. Для таких s $\bar{u}^s xy$ будут помещены в E_{s+1} для всех $x, y \in \{0, 1\}$; противоречие.

Аналогично доказывается, что $\bar{v}_0 1\bar{v} \in T$ для некоторого $\bar{v}$. Ясно, что $T_0 \in \Pi_2^0$. Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 133–158.
2. *Feiner L.* Hierarchies of boolean algebras // J. Symbolic Logic. 1970. V. 35, N 3. P. 365–374.
3. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 9 октября 2006 г.

Алаев Павел Евгеньевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
alaev@math.nsc.ru