*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1*

*УДК 514.76+515.165.7*

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ДВИЖЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**Ю. В. Ершов, Е. И. Яковлев**

**Аннотация.** С помощью групп гомологий пространств путей на произвольном римановом многообразии определяются аналоги функции расстояния, исследуются их основные свойства. Для натуральных систем с гироскопическими силами доказывается теорема существования решений двухточечной краевой задачи, дополняющая результаты работы [1]. Используется метод геодезического моделирования [1, 2] с применением обобщенных функций расстояния.

**Ключевые слова:** риманово многообразие, пространство путей, обобщенная функция расстояния, гироскопическая система, многозначный функционал, экстремаль.

## 1. Введение

Пусть $(B, h)$ — риманово многообразие, $F$ и $u$ — замкнутая 2-форма и гладкая функция на $B$ соответственно. Четверку $\Gamma = (B, h, F, u)$ принято называть *натуральной механической системой с гироскопическими силами* или, короче, *гироскопической системой.* При этом $B$ — конфигурационное многообразие системы, $h/2$ — форма кинетической энергии, $F$ — форма гироскопических сил, $u$ — потенциальная энергия. Если интеграл от формы $F$ хотя бы по одному двумерному сфероиду многообразия $B$ отличен от нуля, то функционал действия $S$ системы $\Gamma$ многозначен.

Как известно, в задаче с закрепленными концами для многозначного функционала $S$ стандартные методы и результаты вариационного исчисления неприменимы [3]. Поэтому для ее изучения потребовалась разработка новых подходов. На этом пути было показано, что с каждой гироскопической системой $\Gamma$ ассоциирован ряд конструкций топологического и геометрического характера, включающий расслоения над конфигурационным многообразием $B$, $G$-связности, римановы метрики $g$, слоения и их связности Эресмана на тотальных пространствах $E$. Перечисленные объекты определены неоднозначно. Тем не менее их свойства характеризуют соответствующую гироскопическую систему, а сами они позволяют осуществить редукцию исходной проблемы к задачам с фиксированным началом и, вообще говоря, подвижным концом для функционала длины риманова многообразия $(E, g)$ [1, 2].

С помощью указанной редукции, в частности, удалось получить условия на систему $\Gamma$, точки $a$ и $b$ многообразия $B$ и гомотопический класс $D$ соединяющих $a$ и $b$ путей, при выполнении которых существует семейство принадлежащих $D$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00331–а).

экстремалей, зависящих от параметра $e$, принимающего почти любое наперед заданное значение из интервала $J_0 = (\alpha_0, \beta_0)$, где $\sqrt{2\alpha_0}$ — точная нижняя грань длин путей из $D$. При этом было установлено, что если функционал $S$ однозначен, то $\beta_0 = +\infty$, в противном случае $\beta_0 < +\infty$.

Но отмеченный результат выглядел неполным. Поэтому автором статей [1, 2] была высказана гипотеза, согласно которой для многозначных функционалов область определения параметра $e$ должна не сжиматься до одного конечного интервала, а распадаться на бесконечную последовательность попарно не пересекающихся промежутков. Ее проверке и посвящена данная работа.

Основное утверждение получено в теореме 5. При доказательстве использованы как упомянутая выше редукция к задаче о геодезических расслоенного риманова многообразия $(E, g)$, так и новая конструкция — семейство функций $H_k$-расстояния на $(E, g)$, определяемых с помощью групп гомологий пространств путей. Последняя изучается в разд. 2–4.

## 2. Построение функций $H_k$-расстояния

Всюду в работе $I = [0, 1]$ и для произвольного топологического пространства $X$ символ $H_k(X)$ обозначает $k$-мерную группу сингулярных гомологий с целыми коэффициентами. Гладкость многообразий и отображений означает их дифференцируемость класса $C^\infty$.

Также везде предполагается, что $(M, g)$ — полное риманово многообразие. Если $v, w \in M$, то $\Omega(M, v, w)$ — множество кусочно гладких путей $x : I \to M$ с началом $x(0) = v$ и концом $x(1) = w$, а $\mathscr{L} : \Omega(M, v, w) \to \mathbb{R}$ — функционал длины. При этом формулы

$$d(v, w) = \inf_{x\in\Omega(M,v,w)} \mathscr{L}(x), \quad d_\Omega(x, y) = \max_{t\in I} d(x(t), y(t)) + |\mathscr{L}(x) - \mathscr{L}(y)|$$

определяют функции расстояния $d : M\times M \to \mathbb{R}$ и $d_\Omega : \Omega(M, v, w)\times\Omega(M, v, w) \to \mathbb{R}$. Мы будем полагать, что топология пространства $\Omega(M, v, w)$ индуцирована расстоянием $d_\Omega$. Любая геодезическая $x \in \Omega(M, v, w)$ многообразия $(M, g)$ параметризована, причем ее параметр $t \in I$ пропорционален длине дуги.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $\mathbb{N}^* = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Обозначим символом $\mathbb{N}^*(M)$ множество таких $k \in \mathbb{N}^*$, что $H_k(\Omega(M, v, w)) \neq 0$. Так как гомотопический тип пространства $\Omega(M, v, w)$ от точек $v$ и $w$ не зависит, обозначение корректно.

Выберем число $k \in \mathbb{N}^*(M)$ и положим

$$H^*_k(\Omega(M, v, w)) = H_k(\Omega(M, v, w)) \setminus \{0\}.$$

Согласно принципу минимакса Биркгофа (см., например, [4]) каждому гомологическому классу $\sigma \in H^*_k(\Omega(M, v, w))$ соответствует критическое значение

$$L_\sigma = \inf_{c\in\sigma} \sup_{x\in|c|} \mathscr{L}(x) \tag{1}$$

функционала длины $\mathscr{L}$, где $|c|$ — носитель сингулярного цикла $c$.

Определим отображение $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$ формулой

$$d_k(v, w) = \inf_{\sigma\in H^*_k(\Omega(M,v,w))} L_\sigma. \tag{2}$$

Заметим, что при $k = 0$ любой цикл $c \in Z_k(\Omega(M, v, w))$, состоящий из единственного пути $x \in \Omega(M, v, w)$, не гомологичен нулю. Поэтому $d_0(v, w) = d(v, w)$ — обычное расстояние между точками $v$ и $w$.

**Лемма 1.** *Для произвольного $k \in \mathbb{N}^*(M)$ и любых точек $v, w \in M$, не сопряженных ни на одной геодезической, их соединяющей, существует гомологический класс $\sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))$ такой, что $d_k(v, w) = L_\sigma$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{L}(M, v, w) = \{L_\sigma \mid \sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))\}$. Так как $k \in \mathbb{N}^*(M)$, то $\mathscr{L}(M, v, w) \neq \varnothing$. Выберем положительное число $\lambda \in \mathbb{R}$ так, чтобы и пересечение $\mathscr{L}(M, v, w) \cap (-\infty, \lambda]$ было непустым. В силу несопряженности точек $v$ и $w$ интервал $(-\infty, \lambda]$ содержит лишь конечное множество критических значений функционала $\mathscr{L} : \Omega(M, v, w) \to \mathbb{R}$. Следовательно, $\mathscr{L}(M, v, w) \cap (-\infty, \lambda] = \{L_{\sigma_1}, \ldots, L_{\sigma_m}\}$, где $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — некоторые нетривиальные элементы группы $H_k(\Omega(M, v, w))$. При этом

$$d_k(v, w) = \inf \mathscr{L}(M, v, w) = \inf(\mathscr{L}(M, v, w) \cap (-\infty, \lambda]) = L_{\sigma_i}$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$. Для завершения доказательства осталось положить $\sigma = \sigma_i$.

Рассмотрим в $M$ произвольные точки $v, v', w, w'$ и кратчайшие геодезические $\gamma_{v'v} \in \Omega(M, v', v)$ и $\gamma_{ww'} \in \Omega(M, w, w')$. Тогда для любого пути $x \in \Omega(M, v, w)$ произведение $\gamma_{v'v} x \gamma_{ww'}$ принадлежит пространству $\Omega(M, v', w')$. При этом формула

$$\alpha(x) = \gamma_{v'v} x \gamma_{ww'} \tag{3}$$

определяет отображение $\alpha : \Omega(M, v, w) \to \Omega(M, v', w')$, являющееся гомотопической эквивалентностью [5, гл. 9, п. 1]. Назовем $\alpha$ *сдвигом концевых точек*. Символом $\alpha_*$ обозначим индуцированные им гомоморфизмы групп цепей и гомологий.

**Лемма 2.** *Для любого элемента $\sigma \in H_k(\Omega(M, v, w))$, $\sigma \neq 0$, и его образа $\sigma' = \alpha_*(\sigma) \in H_k(\Omega(M, v', w'))$ имеет место неравенство*

$$L_{\sigma'} \leq d_0(v', v) + L_\sigma + d_0(w, w').$$

Доказательство. Для каждого цикла $c \in Z_k(\Omega(M, v, w))$ справедливо равенство $|\alpha_*(c)| = \alpha(|c|)$. Поэтому

$$\sup_{y \in |\alpha_*(c)|} \mathscr{L}(y) = \sup_{y \in \alpha(|c|)} \mathscr{L}(y) = \sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(\alpha(x)). \tag{4}$$

В силу (3) $\mathscr{L}(\alpha(x)) = \mathscr{L}(\gamma_{v'v}) + \mathscr{L}(x) + \mathscr{L}(\gamma_{ww'})$. Так как первое и третье слагаемые в этой сумме фиксированы и равны расстояниям $d_0(v', v)$ и $d_0(w, w')$ соответственно, то

$$\sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(\alpha(x)) = d_0(v', v) + \sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(x) + d_0(w, w'). \tag{5}$$

С другой стороны, $\{\alpha_*(c) \mid c \in \sigma\} \subset \alpha_*(\sigma) = \sigma'$ и потому $\{|\alpha_*(c)| \mid c \in \sigma\} \subset \{|c'| \mid c' \in \sigma'\}$. Следовательно,

$$\{\sup_{y \in |\alpha_*(c)|} \mathscr{L}(y) \mid c \in \sigma\} \subset \{\sup_{x' \in |c'|} \mathscr{L}(x') \mid c' \in \sigma'\}. \tag{6}$$

Согласно определению числа $L_{\sigma'}$ и формулам (6) и (4)

$$L_{\sigma'} = \inf\{\sup_{x' \in |c'|} \mathscr{L}(x') \mid c' \in \sigma'\} \leq \inf\{\sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(\alpha(x)) \mid c \in \sigma\}.$$

В силу (5) и определения числа $L_\sigma$ отсюда немедленно следует доказываемое утверждение.

**Лемма 3.** *Пусть* $(v, w) \in M \times M$, *а* $\{(v_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — *последовательность в* $M \times M$ *такая, что*

1) *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *точка* $v_n$ *не сопряжена с точкой* $w_n$ *ни на одной геодезической многообразия* $(M, g)$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n, w_n) = (v, w)$,

3) *последовательность* $\{d_k(v_n, w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится к некоторому числу* $\mu \in \mathbb{R}$.

*Тогда* $\mu = d_k(v, w)$.

Доказательство. Покажем сначала, что $\mu$ — нижняя грань множества $\mathscr{L}(M, v, w) = \{L_\sigma \mid \sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))\}$. Допустим, что это неверно, т. е. существует такой класс $\sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))$, что $\mu > L_\sigma$.

Положим $\varepsilon = \mu - L_\sigma$ и $U = \mathscr{D}_{\varepsilon/4}(v) \times \mathscr{D}_{\varepsilon/4}(w)$, где $\mathscr{D}_{\varepsilon/4}(v)$ и $\mathscr{D}_{\varepsilon/4}(w)$ — шары метрического пространства $(M, d) = (M, d_0)$ радиуса $\varepsilon/4$ с центрами в точках $v$ и $w$ соответственно. Тогда в силу условий 2 и 3 леммы найдется такой номер $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных $n > n_0$

$$(v_n, w_n) \in U \quad \text{и} \quad |\mu - d_k(v_n, w_n)| < \varepsilon/2. \tag{7}$$

Выберем и зафиксируем некоторое $n > n_0$. Рассмотрим сдвиг концевых точек $\alpha : \Omega(M, v, w) \to \Omega(M, v_n, w_n)$ и положим $\sigma_n = \alpha_*(\sigma)$. Тогда по лемме 2

$$L_{\sigma_n} \le d_0(v_n, v) + L_\sigma + d_0(w, w_n). \tag{8}$$

По выбору номера $n$ имеют место формулы (7). Таким образом, $d_0(v_n, v) < \varepsilon/4$, $d_0(w, w_n) < \varepsilon/4$ и $\mu < d_k(v_n, w_n) + \varepsilon/2$. Кроме того, $L_\sigma = \mu - \varepsilon$ по определению числа $\varepsilon$. Учитывая эти факты, мы из (8) немедленно получим неравенства

$$L_{\sigma_n} < \frac{\varepsilon}{4} + \mu - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} < d_k(v_n, w_n).$$

Последнее противоречит определению числа $d_k(v_n, w_n)$. Следовательно, наше допущение неверно, и на самом деле $\mu \le L_\sigma$ для всех ненулевых элементов $\sigma$ группы $H_k(\Omega(M, v, w))$.

Теперь убедимся в том, что $\mu$ — точная нижняя грань множества $\mathscr{L}(M, v, w)$. Для этого рассмотрим произвольное действительное число $\varepsilon > 0$ и построим окрестность $U$ точки $(v, w) \in M \times M$ тем же способом, что и выше. При этом в силу условий 2 и 3 найдется такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_1$ справедливы формулы (7).

Выберем и зафиксируем $n > n_1$. Согласно условию 1 и лемме 1 существует гомологический класс $\sigma_n \in H_k^*(\Omega(M, v_n, w_n))$, удовлетворяющий равенству

$$L_{\sigma_n} = d_k(v_n, w_n). \tag{9}$$

Положим $\sigma = \alpha'_*(\sigma_n)$, где $\alpha' : \Omega(M, v_n, w_n) \to \Omega(M, v, w)$ — сдвиг концевых точек, гомотопически обратный для $\alpha$.

По лемме 2

$$L_\sigma \le d_0(v, v_n) + L_{\sigma_n} + d_0(w_n, w). \tag{10}$$

В силу (7) расстояния $d_0(v, v_n)$ и $d_0(w_n, w)$ меньше числа $\varepsilon/4$, кроме того, $d_k(v_n, w_n) < \varepsilon/2 + \mu$. Поэтому из (10) и (9) следует, что

$$L_\sigma < \frac{\varepsilon}{4} + d_k(v_n, w_n) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \mu + \frac{\varepsilon}{4} = \mu + \varepsilon.$$

Итак, для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $L_\sigma \in \mathscr{L}(M, v, w)$, удовлетворяющее неравенству $L_\sigma < \mu + \varepsilon$. Следовательно, $\mu = \inf \mathscr{L}(M, v, w)$, и лемма доказана.

**Теорема 1.** *Пусть $k \in \mathbb{N}^*(M)$ и функция $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$ определена формулами* (1) *и* (2). *Тогда для всех $v, w, w' \in M$ имеют место соотношения*

1) $d_k(v,w) \geq d_0(v,w)$ (*неотрицательность*);

2) $d_k(v,w) = d_k(w,v)$ (*симметрия*);

3) $d_k(v,w') \leq d_k(v,w) + d_0(w,w')$ (*сильное неравенство треугольника*).

*Кроме того, функция $d_k$ непрерывна.*

Доказательство. Для любых $\sigma \in H_k^*(\Omega(M,v,w))$ и $c \in \sigma$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(x) \geq d(v,w) = d_0(v,w).$$

Поэтому $L_\sigma \geq d_0(v,w)$ и $d_k(v,w) \geq d_0(v,w)$. Формула $\beta(x) = x^{-1}$ определяет гомеоморфизм $\beta : \Omega(M,v,w) \to \Omega(M,w,v)$, сохраняющий длины. Отсюда следует свойство 2.

При доказательстве свойства 3 сначала предположим, что точка $w$ не сопряжена с $v$ ни на одной геодезической, их соединяющей. В такой ситуации согласно лемме 1 имеется ненулевой гомологический класс $\sigma \in H_k(M,v,w)$, отвечающий критическому значению $d_k(v,w)$. Рассмотрим сдвиг концевых точек $\alpha' : \Omega(M,v,w) \to \Omega(M,v,w')$ и положим $\sigma' = \alpha'_*(\sigma)$. Так как точка $v$ при этом не сдвигается, в силу леммы 2

$$L_{\sigma'} \leq L_\sigma + d_0(w,w). \tag{11}$$

Но $d_k(v,w') \leq L_{\sigma'}$ по определению функции $d_k$, а $L_\sigma = d_k(v,w)$ по выбору гомологического класса $\sigma$. Поэтому (11) влечет за собой доказываемое неравенство.

Пусть далее $v, w, w'$ — произвольные точки многообразия $M$. Тогда найдется сходящаяся к $w$ последовательность $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, состоящая из точек, не сопряженных с $v$ на геодезических многообразия $(M,g)$. При этом согласно доказанному выше

$$d_k(v,w') \leq d_k(v,w_n) + d_0(w_n,w'), \tag{12}$$

а в силу непрерывности функции $d_0$

$$\lim_{n\to\infty} d_0(w_n,w') = d_0(w,w'). \tag{13}$$

Рассмотрим любое $\varepsilon > 0$. Сходимость последовательности $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ к точке $w$ влечет за собой существование такого $n_0 \in \mathbb{N}$, что $d_0(w_m,w_n) < \varepsilon$ для всех $m, n > n_0$. Применив свойство 3 к тройкам $v, w_m, w_n$ и $v, w_n, w_m$, отсюда получим неравенства

$$|d_k(v,w_m) - d_k(v,w_n)| \leq d_0(w_m,w_n) < \varepsilon.$$

В силу полноты риманова многообразия $(M,g)$ это значит, что последовательность $\{d_k(v,w_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится. По лемме 3 в такой ситуации

$$\lim_{n\to\infty} d_k(v,w_n) = d_k(v,w). \tag{14}$$

Согласно (14) и (13) в (12) можно перейти к пределу. При этом получим свойство 3 для точек $v, w$ и $w'$.

Для доказательства непрерывности функции $d_k$ рассмотрим произвольную точку $(v,w) \in M \times M$ и сходящуюся к ней последовательность $\{(v_n,w_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M \times M$. В силу доказанных свойств 2 и 3

$$|d_k(v_n,w_m) - d_k(v,w)| \leq d_0(v,v_n) + d_0(w,w_n). \tag{15}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} v_n = v$ и $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, из (15) немедленно следует сходимость последовательности $d_k(v_n, w_n)$ к числу $d_k(v, w)$. Теорема доказана.

Согласно доказанной теореме имеет смысл следующее

Определение 1. Для каждого $k \in \mathbb{N}^*(M)$ построенное посредством формулы (2) отображение $d_k : M \times M \to \mathbb{R}$ назовем *обобщенной функцией расстояния* или *функцией $H_k$-расстояния* на $(M, g)$.

Замечание 1. Из свойств 1 и 3 очевидно следует и обычное неравенство треугольника $d_k(v, w') \le d_k(v, w) + d_k(w, w')$.

## 3. Связь с геодезическими

**Теорема 2.** *Для любого $k \in \mathbb{N}^*(M)$ и любой точки $(v, w) \in M \times M$ обобщенное расстояние $d_k(v, w)$ является критическим значением функционала длины $\mathscr{L} : \Omega(M, v, w) \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Согласно формуле (2) $d_k(v, w)$ — точка прикосновения множества $\mathscr{L}(M, v, w) = \{L_\sigma \mid \sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))\}$. Поэтому существует сходящаяся к $d_k(v, w)$ последовательность $\{L_{\sigma_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}(M, v, w)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется геодезическая $x_n \in \Omega(M, v, w)$ риманова многообразия $(M, g)$, удовлетворяющая равенству $\mathscr{L}(x_n) = L_{\sigma_n}$. При этом $\lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(x_n) = d_k(v, w)$ и потому найдется такое действительное число $\lambda$, что

$$\{\mathscr{L}(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_k(v, w)\} \subset (-\infty, \lambda).$$

Рассмотрим функционал $\mathscr{E} : \Omega(M, v, w) \to \mathbb{R}$, определенный формулой

$$\mathscr{E}(x) = \int_0^1 \left|\frac{dx}{dt}\right|^2 dt.$$

Тогда $\mathscr{E}(x_n) = \mathscr{L}(x_n)^2$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и потому

$$\{\mathscr{E}(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{d_k(v, w)^2\} \subset (-\infty, \lambda^2). \tag{16}$$

Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{E}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{L}(x_n)^2 = d_k(v, w)^2.$$

Согласно теореме редукции [6, гл. III, п. 16] подпространство

$$\mathscr{E}^{-1}((-\infty, \lambda^2)) \subset \Omega(M, v, w)$$

содержит подмножество $M'$, обладающее структурой гладкого многообразия. При этом сужение $\mathscr{E}' = \mathscr{E}|_{M'}$ является гладкой функцией на $M'$, для любого действительного $\varepsilon < \lambda^2$ прообраз $(\mathscr{E}')^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ компактен, наконец, множество критических точек функции $\mathscr{E}'$ совпадает с набором всех геодезических риманова многообразия $(M, g)$, длины которых меньше числа $\lambda$. В частности, $x_n$ — критическая точка функции $\mathscr{E}'$ при любом $n \in \mathbb{N}$.

В силу (16) найдется такое $\varepsilon \in \mathbb{R}$, что $\varepsilon < \lambda^2$ и $\mathscr{E}(x_n) \in (-\infty, \varepsilon]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ лежит в компактном подмножестве многообразия $M'$ и потому имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пусть $x = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$. Тогда $x$ — критическая точка функции $\mathscr{E}'$ и

$$\mathscr{E}(x) = \mathscr{E}'(x) = \lim_{i\to\infty} \mathscr{E}'(x_{n_i}) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{E}'(x_n) = d_k(v, w)^2.$$

Отсюда следует, что $x$ — геодезическая многообразия $(M, g)$ и $\mathscr{L}(x) = d_k(v, w)$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть точки $v, w \in M$ не сопряжены ни на одной геодезической, их соединяющей. Тогда для любого номера $k \in \mathbb{N}^*(M)$ существует геодезическая индекса $k$, длина которой равна обобщенному расстоянию $d_k(v, w)$.*

Доказательство. Действительно, в этих условиях по лемме 1 имеется гомологический класс $\sigma \in H_k^*(\Omega(M, v, w))$, для которого $d_k(v, w) = L_\sigma$. С другой стороны, поверхность уровня $\mathscr{L}^{-1}(L_\sigma)$ содержит критическую точку индекса $k$ функционала $\mathscr{L}$ (см., например, [7, гл. 1, п. I]).

### 4. Зависимость от номера $k$

**Теорема 4.** *Пусть $\pi : \widehat{M} \to M$ — универсальное накрытие и $H_j(\widehat{M}) \neq 0$ для некоторого $j > 1$. Тогда множество $\mathbb{N}^*(M)$ бесконечно и для произвольных $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, и $v, w \in M$ найдется строго монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, обладающая свойствами:*

1) $k_0 = 0$ *и* $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{N}^*(M)$;

2) $d_{k_{n+1}}(v, w) > d_{k_n}(v, w) + \mu$ *для всех* $n \in \mathbb{N}^*$.

Доказательство. Предположим сначала, что точки $v$ и $w$ не сопряжены на соединяющих их геодезических многообразия $(M, g)$.

По лемме из [8, гл. III, п. 3] из неравенства $H_j(\widehat{M}) \neq 0$ следует существование поля $K$ и натурального числа $l > 1$ таких, что $H_l(\widehat{M}, K) \neq 0$.

Выберем точки $\hat{v} \in \pi^{-1}(v)$ и $\widehat{w} \in \pi^{-1}(w)$. Тогда в силу следствия из предложения 11 той же главы в [8] группы гомологий пространства $\Omega(\widehat{M}, \hat{v}, \widehat{w})$ с коэффициентами из поля $K$ отличны от нуля для бесконечного набора размерностей. Воспользовавшись формулой универсальных коэффициентов для гомологий, отсюда получим вывод о бесконечности множества $\mathbb{N}^*(\widehat{M})$.

Согласно теории накрытий пространство путей $\Omega(\widehat{M}, \hat{v}, \widehat{w})$ многообразия $\widehat{M}$ гомеоморфно одной из компонент линейной связности пространства $\Omega(M, v, w)$. Поэтому множество $\mathbb{N}^*(M)$ также бесконечно.

Допустим, что последовательность $\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$, где $n \geq 0$ и $k_0 = 0$, монотонно возрастает и лежит в $\mathbb{N}^*(M)$, а $d_{k_{i+1}}(v, w) > d_{k_i}(v, w) + \mu$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Положим $r = d_{k_n}(v, w) + 2\mu$ и рассмотрим подпространство

$$\Omega^r = \{x \in \Omega(M, v, w) \mid \mathscr{L}(x) \leq r\} \subset \Omega(M, v, w).$$

По уже упоминавшейся теореме редукции оно гомотопически эквивалентно некоторому конечномерному гладкому многообразию $M'$.

По определению функции $d_{k_n}$ найдется негомологичный нулю цикл $c \in Z_{k_n}(\Omega(M, v, w))$, для которого

$$\sup_{x \in |c|} \mathscr{L}(x) < d_{k_n}(v, w) + \mu.$$

Но это неравенство означает, что $|c| \subset \Omega^r$, т. е. $c$ — цикл подпространства $\Omega^r$. Очевидно, он не может быть гомологичным нулю и в $\Omega^r$. Следовательно, $H_{k_n}(\Omega^r) \neq 0$, и потому $m = \dim M' > k_n$.

Согласно доказанному свойству множества $\mathbb{N}^*(M)$ в нем найдется число $k_{n+1} > m$. При этом определено обобщенное расстояние $d_{k_{n+1}}(v, w)$ и существует не гомологичный нулю цикл $c' \in Z_{k_{n+1}}(\Omega(M, v, w))$, для которого

$$\sup_{x \in |c'|} \mathscr{L}(x) < d_{k_{n+1}}(v, w) + \mu. \tag{17}$$

Предположим, что $d_{k_{n+1}}(v,w) \leq d_{k_n}(v,w) + \mu$. Тогда в силу (17)

$$\sup_{x \in |c'|} \mathscr{L}(x) < d_{k_n}(v,w) + 2\mu = r$$

и потому $c' \in Z_{k_{n+1}}(\Omega^r)$. Но $H_{k_{n+1}}(\Omega^r) = 0$, поскольку $k_{n+1} > m = \dim M'$ и $\Omega^r \sim M'$. Таким образом, $\sigma' = 0$, и мы получили противоречие с выбором цикла $c'$. Следовательно, допущение неверно, и на самом деле $d_{k_{n+1}}(v,w) > d_{k_n}(v,w) + \mu$.

Итак, при любом $n \in \mathbb{N}^*$ к последовательности $\{k_0, k_1, \ldots, k_n\}$ можно добавить следующий элемент $k_{n+1}$ с сохранением всех ее свойств. Этим для несопряженных $v$ и $w$ утверждение теоремы доказано.

Рассмотрим теперь произвольные $v, w \in M$. В шаре $\mathscr{D}_\mu(w)$ метрического пространства $(M,d) = (M,d_0)$ радиуса $\mu$ с центром $w$ выберем точку $w_0$, не сопряженную с $v$ на геодезических многообразия $(M,g)$, а также сходящуюся к $w$ последовательность $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Для точек $v$ и $w_0$ построим такую монотонно возрастающую последовательность $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{N}^*(M)$, что $k_0 = 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}^*$

$$d_{k_{n+1}}(v,w_0) > d_{k_n}(v,w_0) + 6\mu. \tag{18}$$

По теореме 1 и построению последовательности $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$ и $i \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$d_{k_n}(v,w_i) < d_{k_n}(v,w_0) + d_0(w_0,w_i) < d_{k_n}(v,w_0) + 2\mu, \tag{19}$$

$$d_{k_{n+1}}(v,w_0) < d_{k_{n+1}}(v,w_i) + d_0(w_i,w_0) < d_{k_{n+1}}(v,w_i) + 2\mu. \tag{20}$$

В силу (18)–(20)

$$d_{k_{n+1}}(v,w_i) > d_{k_n}(v,w_i) + 2\mu. \tag{21}$$

Поскольку функции $d_{k_n}$ и $d_{k_{n+1}}$ непрерывны, мы можем в (21) перейти к пределу при $i \to \infty$. В результате получим неравенства

$$d_{k_{n+1}}(v,w) \geq d_{k_n}(v,w) + 2\mu > d_{k_n}(v,w) + \mu.$$

## 5. Движения гироскопических систем

Пусть $\Gamma = (B,h,F,u)$ — гироскопическая система с конфигурационным многообразием $B$, формой кинетической энергии $h/2$, формой гироскопических сил $F$ и потенциальной энергией $u$. В рамках данной статьи мы будем предполагать, что риманово многообразие $(B,h)$ полно, функция $u$ всюду положительна, а $F$ имеет представление $F = \theta\Phi$, где $\theta \in \mathbb{R}$ и $\Phi$ — замкнутая 2-форма, интегралы от которой по всем двумерным кусочно гладким сфероидам многообразия $B$ целочисленны.

Рассмотрим гомоморфизм Гуревича $\chi : \pi_2(B) \to H_2(B)$ и определим гомоморфизм $I_{[\Phi]} : H_2(B) \to \mathbb{R}$ формулой

$$I_{[\Phi]}(\sigma) = \int_c \Phi,$$

где $[\Phi]$ — когомологический класс формы $\Phi$, а $c$ – произвольный двумерный кусочно гладкий цикл многообразия $B$. Положим $J_{[\Phi]} = I_{[\Phi]} \circ \chi$. Тогда найдется такое $m \in \mathbb{N}^*$, что $\operatorname{im} J_{[\Phi]} = m\mathbb{Z}$.

Выберем точки $a, b \in B$. В каждом гомотопическом классе $D \in \pi_0(\Omega(B, a, b))$ зафиксируем опорный путь $x_D$. Для произвольного пути $x \in D$, числа $\delta \in \mathbb{R}$ и связывающей пути $x_D$ и $x$ кусочно гладкой гомотопии $c : I^2 \to B$ положим

$$S_\delta(x, c) = \int\limits_0^1 \left( \frac{1}{2} h \left( \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) - \delta^2 u(x) \right) ds + \delta \int\limits_c F.$$

Тогда формула $S_\delta(x) = S_\delta(x, c) + \delta\theta\mathbb{Z}$ определяет функционал $S_\delta$ на $\Omega(B, a, b)$ со значениями в группе $\mathbb{R}/\delta\theta\mathbb{Z} \cong T^1 \cong U(1)$.

Если $x$ — экстремаль функционала $S_\delta$ и $\delta > 0$, то формула $x_\delta(t) = x(t/\delta)$ определяет движение $x_\delta : [0, \delta] \to B$ системы $\Gamma$ из положения $a$ в положение $b$ за время $\delta$. При $\delta$ отрицательном $x_\delta$ также движение системы $\Gamma$, но за время $|\delta| = -\delta$ и из $b$ в $a$. Поэтому далее нас будут интересовать пары $(\delta, x)$, где $\delta \neq 0$, а $x$ — экстремаль функционала $S_\delta$.

Пусть $\nu : \widehat{B} \to B$ — универсальное накрытие. Тогда $\operatorname{im} I_{[\nu^*\Phi]} = \operatorname{im} J_{[\Phi]} = m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ и потому существует главное расслоение $\xi = (E, q, \widehat{B})$ с проекцией $q : E \to \widehat{B}$, структурной группой $T^1 \cong U(1)$ и характеристическим классом $[\nu^*\Phi] \in H^2(\widehat{B}, \mathbb{R})$. Композиция $p = \nu \circ q$ является проекцией почти главного $G|0$-расслоения $\rho = (E, p, B)$, где $G = \Pi \times T^1$, а $\Pi = \pi_1(B)$ — фундаментальная группа многообразия $B$ [9].

На пространстве $E$ расслоения $\rho$ существует $G$-связность $H$ с формой связности $\omega$ и формой кривизны $d\omega = p^*\Phi$. Равенства $u^* = u \circ p$, $\omega^* = \omega/2u^*$ и

$$g = (\theta^2/2u^*)\omega \otimes \omega + p^*h \tag{22}$$

определяют 1-форму $\omega^*$ и риманову метрику $g$ на $E$. Форма $\omega^*$ является первым интегралом уравнения геодезических метрики $g$. Из полноты $(B, h)$ следует, что и $(E, g)$ — полное риманово многообразие.

**Лемма 4.** *Если $J_{[\Phi]} \neq 0$, то найдется такое натуральное $k > 1$, что $H_k(E) \neq 0$. При этом для риманова многообразия $(E, g)$ справедливы утверждения теоремы* 5.

Доказательство. Как отмечалось выше, форма $\Phi$ удовлетворяет равенству $\operatorname{im} J_{[\Phi]} = m\mathbb{Z}$, где $m \in \mathbb{N}^*$. Допустим, что $m > 0$, но $H_k(E) = 0$ для всех $k > 1$.

Покажем, что в такой ситуации для любого натурального $n > 1$ из тривиальности групп $H_{n+l}(\widehat{B})$ при всех $l \in \mathbb{N}$ следует равенство $H_n(\widehat{B}) = 0$. Для этого рассмотрим спектральную последовательность $\{E^r\}$ гомологически простого расслоения $\xi = (E, q, \widehat{B})$.

Так как стандартный слой расслоения совпадает со структурной группой $T^1 \cong U(1)$, то

$$E^2_{n,1} \cong H_n(\widehat{B}, H_1(T^1)) \cong H_n(\widehat{B}) \quad \text{и} \quad E^2_{i,j} = H_i(\widehat{B}, H_j(T^1)) = 0$$

при всех $i, j \in \mathbb{N}^*$, $j > 1$. В такой ситуации

$$E^3_{i,j} = E^2_{i,j} = 0 \quad \text{для } i, j \in \mathbb{N}^*,\ j > 1 \text{ и } E^3 = E^\infty. \tag{23}$$

Если дополнительно $H_{n+l}(\widehat{B}) = 0$ при всех $l$, то

$$E^2_{n+l,j} = H_{n+l}(\widehat{B}, H_j(T^1)) = 0$$

для $l \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}^*$. Отсюда следует, что

$$E^3_{n,1} = E^2_{n,1} \cong H_n(\widehat{B}) \quad \text{и} \quad E^3_{n+l,j} = E^2_{n+l,j} = 0 \tag{24}$$

для тех же $l$ и $j$. В силу (23) и (24) $H_n(\widehat{B}) = E^3_{n,1} = E^\infty_{n,1} = H_{n+1}(E) = 0$.

Пусть теперь $\mu = \dim \widehat{B}$. Тогда $H_{\mu+l}(\widehat{B}) = 0$ при всех $l \in \mathbb{N}$. Применим доказанное утверждение последовательно к $n = \mu, \mu - 1, \ldots, 2$. В результате придем к равенству $H_2(\widehat{B}) = 0$.

Далее воспользуемся коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} \pi_2(\widehat{B}) \arrow[r, "\hat{\chi}"] \arrow[d, "\nu_*"'] & H_2(\widehat{B}) \arrow[r, "I_{[\nu^*\Phi]}"] \arrow[d, "\nu_*"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \pi_2(B) \arrow[r, "\chi"] & H_2(B) \arrow[r, "I_{[\Phi]}"] & \mathbb{R}, \end{tikzcd} \tag{25}$$

в которой $\hat{\chi}$ — гомоморфизм Гуревича, а $\nu_*$ — индуцированные гомоморфизмы. Поскольку $\nu_* : \pi_2(\widehat{B}) \to \pi_2(B)$ — изоморфизм, то из (25) и тривиальности группы $H_2(\widehat{B})$ следует, что $J_{[\Phi]} = 0$.

Полученное противоречие означает, что наше допущение неверно и на самом деле $H_k(E) \neq 0$ для некоторого $k > 1$.

Положим, наконец, $\Phi' = (1/m)\Phi$ и рассмотрим главное расслоение $\xi' = (E', q', \widehat{B})$ с проекцией $q' : E' \to \widehat{B}$, структурной группой $T^1$ и характеристическим классом $[\nu^*\Phi']$. Тогда определено регулярное накрытие $\nu' : E' \to E$, коммутативно замыкающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "\nu'"'] & \widehat{B} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ E \arrow[r, "q"] & \widehat{B}. \end{tikzcd}$$

Так как $\operatorname{im} I_{[\nu^*\Phi']} = \mathbb{Z}$, то $\pi_1(E') = 0$ [1]. Таким образом, $\nu' : E' \to E$ — универсальное накрытие.

Поскольку доказательство первого утверждения не зависит от параметра $m$, оно верно и для расслоения $\xi'$. Поэтому группа $H_{k'}(E')$ также отлична от нуля для некоторого $k' > 1$ и, следовательно, для многообразия $(E, g)$ справедливы все утверждения теоремы 4.

Далее будем считать, что $\operatorname{im} J_{[\Phi]} = \mathbb{Z}$. Для произвольного гомотопического класса $D \in \pi_0(\Omega(B, a, b))$ и пути $x \in D$ положим

$$\Delta_D(x) = \int_{c_x} \Phi + \mathbb{Z}.$$

Этим определен функционал $\Delta_D : D \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Символом $Kr(D)$ обозначим множество критических значений функционала длины $\mathscr{L}_D : D \to \mathbb{R}$ риманова многообразия $(B, h)$, а символом $K(D, l)$ — множество геодезических из $D$ длины $l \in Kr(D)$.

**Теорема 5.** *Пусть $a, b \in B$, $D \in \pi_0(\Omega(B, a, b))$ и для любого $l \in Kr(D)$ справедливо неравенство $\Delta_D(K(D, l)) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Тогда существуют последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ и $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, обладающие свойствами:*

*1)* $\alpha_n \le \beta_n < \alpha_{n+1}$ *для всех* $n \in \mathbb{N}^*$*;*

*2)* $\alpha_n, \beta_n \to +\infty$*;*

*3) каждому номеру* $n \in \mathbb{N}^*$ *соответствует континуум пар* $(\delta, x) \in \mathbb{R} \times D$ *таких, что* $\delta \ne 0$, $x$ *— экстремаль функционала* $S_\delta$ *и*

$$\delta^2 u(x) + \frac{h(dx/ds, dx/ds)}{2} \in [\alpha_n, \beta_n]. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим построенное выше почти главное $G|0$-расслоение $\rho = (E, p, B)$, где $G = \Pi \times T^1$, и определенную формулой (22) риманову метрику $g$. В слое $G_a = p^{-1}(a)$ зафиксируем произвольную точку $v$. Символом $T^1_D$ обозначим компоненту связности $T^1_D$ слоя $G_b = p^{-1}(b)$, для которой пространство $\Omega\big(E, v, T^1_D\big)$ идущих из $v$ в $T^1_D$ кусочно гладких путей многообразия $E$ отображается проекцией $p : E \to B$ в гомотопический класс $D$. Также выберем некоторую точку $w_0 \in T^1_D$, а символом $\delta_D$ обозначим диаметр компоненты $T^1_D$ в $(E, g)$.

Пусть $d^E_k : E \times E \to \mathbb{R}$ — функции $H_k$-расстояния многообразия $(E, g)$, $k \in \mathbb{N}^*(E)$. По лемме 4 и теореме 4 множество $\mathbb{N}^*(E)$ бесконечно и содержит такую последовательность $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, $k_0 = 0$, что

$$d^E_{k_{n+1}}(v, w_0) > d^E_{k_n}(v, w_0) + 2\delta_D \tag{27}$$

для всех $n \in \mathbb{N}^*$.

Так как функции $d_{k_n}$ непрерывны, а подмногообразие $T^1_D \subset E$ компактно, то найдутся точки $w_{*n} \in T^1_D$ и $w^*_n \in T^1_D$, удовлетворяющие равенствам

$$d^E_{k_n}(v, w_{*n}) = \min_{w \in T^1_D} d^E_{k_n}(v, w), \quad d^E_{k_n}(v, w^*_n) = \max_{w \in T^1_D} d^E_{k_n}(v, w).$$

Из неравенств треугольника для $d^E_{k_n}$ и $d^E_{k_{n+1}}$ и формулы (27) следует, что

$$d^E_{k_n}(v, w^*_n) \le d^E_{k_n}(v, w_0) + \delta_D < d^E_{k_{n+1}}(v, w_0) - \delta_D \le d^E_{k_{n+1}}(v, w_{*n+1}).$$

Поэтому, полагая $\alpha_n = d^E_{k_n}(v, w_{*n})^2/2$ и $\beta_n = d^E_{k_n}(v, w^*_n)^2/2$ для всех $n \in \mathbb{N}^*$, получим последовательности $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ и $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, обладающие свойством 1 доказываемой теоремы.

В силу (27) $d^E_{k_n}(v, w_0) \to +\infty$. Так как $\alpha_{n+1} > \beta_n \ge d^E_{k_n}(v, w_0)^2/2$, отсюда следует, что построенные последовательности обладают и свойством 2.

Рассмотрим произвольную точку $w \in T^1_D$ и число $l = d^E_{k_n}(v, w)$. По теореме 2 существует геодезическая $y : I \to E$ риманова многообразия $(E, g)$, принадлежащая пространству $\Omega(E, v, w)$ и имеющая длину $l$. При этом

$$\mathscr{E}(y) = \int_0^1 g\left(\frac{dy}{ds}, \frac{dy}{ds}\right) ds = l^2$$

и потому

$$\alpha_n \le \mathscr{E}(y)/2 \le \beta_n.$$

Положим $\delta \equiv \omega^*(dy/ds)$ и $x = p \circ y$. Как показано в [1], в такой ситуации $x$ — экстремаль функционала $S_\delta$ и

$$\frac{\mathscr{E}(y)}{2} = \delta^2 u(x) + \frac{h(dx/ds, dx/ds)}{2}.$$

Отсюда и из предыдущих неравенств немедленно следует (26).

Докажем, что множество точек $w$ из $T_D^1$, для которых $\delta \neq 0$, имеет мощность континуума. Для этого отметим, что для произвольной геодезической $y : [0,1] \to E$ многообразия $(E,g)$ тождество $\omega^*(dy/ds) \equiv 0$ равносильно тому, что путь $y$ является экстремалью функционала длины $\mathscr{L}_D^v : \Omega\big(E, v, T_D^1\big) \to \mathbb{R}$. Согласно [1] множество критических значений $Kr\big(v, T_D^1\big)$ функционала $\mathscr{L}_D^v$ совпадает с $Kr(D)$, а последнее замкнуто и имеет меру нуль в $\mathbb{R}$.

Если теперь $\alpha_n < \beta_n$, то отрезок

$$J = \big[d_{k_n}^E(v, w_{*n}), d_{k_n}^E(v, w_n^*)\big]$$

имеет положительную длину и почти каждое число $l \in J$ не лежит в $Kr\big(v, T_D^1\big)$. При этом для точки $w \in T_D^1$, удовлетворяющей равенству $d_{k_n}^E(v,w) = l$, и геодезической $y \in \Omega(E,v,w)$ длины $l$ число $\delta \equiv \omega^*(dy/ds)$ отлично от нуля.

Пусть $\alpha_n = \beta_n$ и $l = \sqrt{2\alpha_n}$. Обозначим символом $T_D^0$ множество точек $w$ из $T_D^1$, для которых хотя бы одна геодезическая из $\Omega(E,v,w)$ длины $l$ является экстремалью функционала $\mathscr{L}_D^v$.

В силу результатов работы [1] совпадение множеств $T_D^0$ и $T_D^1$ эквивалентно равенству $\Delta_D(K(D,l)) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Так как последнее исключено условием теоремы, то $T_D^0 \neq T_D^1$.

Если $w'$ — точка прикосновения множества $T_D^0$, то найдется сходящаяся к ней последовательность $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset T_D^0$. Рассмотрим соответствующие экстремали $y_i \in \Omega(E,v,w_i)$ функционала $\mathscr{L}_D$ и их векторы скорости $Y_i = (dy_i/ds)(0) \in T_vE$. Поскольку все элементы последовательности $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ лежат на сфере радиуса $l$ в касательном пространстве $T_vE$, она содержит сходящуюся подпоследовательность $\{Y_{i_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$. Положим $Y' = \lim\limits_{m\to\infty} Y_{i_m}$ и $y'(s) = \exp_v(sY')$ для $s \in [0,1]$. Тогда в силу непрерывности экспоненциального отображения $\exp_v : T_vE \to E$ верно включение $y' \in \Omega(E,v,w')$, а ввиду линейности формы $\omega^*$ — равенство $\omega^*(Y') = 0$. При этом $y'$ — геодезическая риманова многообразия $(E,g)$ и $\omega^*(dy'/ds) \equiv 0$. Следовательно, $y'$ — экстремаль функционала $\mathscr{L}_D^v$ и $w' \in T_D^0$.

Итак, $T_D^0$ — собственное и замкнутое подмножество одномерного многообразия $T_D^1$, а $T_D^1 \backslash T_D^0$ — его непустое открытое подмножество. Если $w \in T_D^1 \backslash T_D^0$, а $y$ — геодезическая из $\Omega(E,v,w)$ длины $l$, то по построению множества $T_D^0$ число $\delta \equiv \omega^*(dy/ds)$ также отлично от нуля.

Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что совпадение пар $(\delta_1, x_1)$ и $(\delta_2, x_2)$, построенных указанным выше способом с помощью геодезических из пространств $\Omega(E,v,w_1)$ и $\Omega(E,v,w_2)$, где $w_1, w_2 \in T_D^1$, возможно только при $w_1 = w_2$ [1].

Замечание 2. Условия теоремы 5 заведомо выполнены в случае, когда точки $a, b \in B$ не сопряжены ни на одной геодезической, их соединяющей.

## 6. Примеры

Пример 1. Рассмотрим сферу $S_r^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса $r$ с индуцированной из $\mathbb{R}^{n+1}$ римановой метрикой $h$. Выберем и зафиксируем произвольные точки $a, b \in S^n$.

Группы гомологий пространства петель $\Omega(S_r^n)$ суть

$$H_k\big(\Omega(S_r^n)\big) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } k = m(n-1),\ m \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{при всех других значениях } k \end{cases}$$

[8, гл. IV, п. 9]. Поэтому $\mathbb{N}^*\big(S_r^n\big) = \{m(n-1) \mid m \in \mathbb{N}^*\}$.

**Предложение 1.** *Для всех* $k \in \mathbb{N}^*\big(S^n_r\big)$ *имеют место равенства*

$$d_k(a,b) = \begin{cases} 2\pi r q + d_0(a,b), & \text{если } k = 2q(n-1), \\ 2\pi r(q+1) - d_0(a,b), & \text{если } k = (2q+1)(n-1). \end{cases} \tag{28}$$

Доказательство. Допустим сначала, что точки $a$ и $b$ не являются диаметрально противоположными точками сферы $S^n$. По теореме 3 значение функции $d_k(a,b)$ совпадает с длиной некоторой геодезической индекса $k$, соединяющей $a$ и $b$. Для сферы такая геодезическая единственна и имеет длину, описываемую правой частью формулы (28) [6, гл. III, п. 17].

Если $a$ и $b$ — противоположные точки сферы, то рассмотрим произвольную последовательность $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset S^n$, сходящуюся к $b$. Тогда $H_k$-расстояния $d_k(a,b_i)$ вычисляются согласно (28). Поскольку функции $d_k$ непрерывны, устремляя в полученных соотношениях $i$ к бесконечности, докажем справедливость утверждения и в этом случае.

Замечание 3. Функции $d_k$ удовлетворяют рекуррентному соотношению $d_k(a,b) = d_{k-2(n-1)}(a,b) + 2\pi r$ при $k \geq 2(n-1)$.

Пример 2. Предположим теперь, что $B$ — единичная двумерная сфера трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и $a_0 \in \mathbb{R}^3$. Она является краем замкнутого шара $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^3$. Предположим, что в точках $a_i \in \mathscr{D} \setminus B$ расположены неподвижные магнитные заряды $q_i$, $i = 1,\dots,m$. Заряд $q_i$ создает магнитное поле, напряженность которого в точке $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{a_1,\dots,a_m\}$ равна

$$\overline{H}_i(a) = q_i \frac{\overline{a_i a}}{|\overline{a_i a}|^3}.$$

Допустим также, что в $\mathbb{R}^3$ задано постоянное магнитное поле без монополей $\overline{H}_0$, и положим $\overline{H} = \sum\limits_{i=0}^{m} \overline{H}_i$. Рассмотрим заряженную пробную частицу $\chi$, которая может двигаться только по поверхности $B$. Выберем систему единиц измерения, в которой скорость света в вакууме $c$ равна 1. Предположим, что в этой системе единиц отношение электрического заряда частицы $\chi$ к ее массе также равно единице, а магнитного заряда у $\chi$ нет. Тогда если $x : [0,\delta] \to B$ — движение частицы $\chi$ и $\bar{x}(t) = \overline{a_0 x(t)}$, то в момент времени $t$ на $\chi$ действует сила

$$\overline{F}(x(t)) = [\bar{x}'(t), \overline{H}^{\perp}(x(t))],$$

где $\overline{H}^{\perp}(x(t))$ — ортогональная к $B$ составляющая вектора $\overline{H}(x(t))$, а квадратные скобки обозначают векторное умножение.

Как и выше, буквой $h$ обозначим риманову метрику на $B$, индуцированную евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^3$. Для индекса $i \in \{0,1,\dots,m\}$, точки $a \in B$ и касательных векторов $\overline{X}, \overline{Y} \in T_a B$ положим

$$F_i(\overline{X},\overline{Y}) = h([\overline{X}, \overline{H}_i^{\perp}(a)], \overline{Y}) \quad \text{и} \quad F = \sum_{i=0}^{m} F_i.$$

Этим определены 2-формы $F_0, F_1, \dots, F_m$ и $F$ на $B$. Пусть $u \equiv 1/2$ и $\Gamma = (B,h,F,u)$. Тогда $\Gamma$ — гироскопическая система, описывающая динамику частицы $\chi$ на поверхности $B$ под действием магнитного поля $\overline{H}$. Очевидно, что риманово многообразие $(B,h)$ полно, $u > 0$ и $F = \theta\Phi$, где $\theta = 4\pi \sum\limits_{i=1}^{m} |q_i|$, а $\Phi = F/\theta$.

Рассмотрим точки $a, b \in B$. Поскольку многообразие $B$ односвязно, имеется единственный гомотопический класс $D = \Omega(B, a, b)$. При этом можно положить $\mathscr{L}_D = \mathscr{L}$. Если $a$ и $b$ не являются диаметрально противоположными точками, то для любого $l \in Kr(D)$ множество $K(D, l)$ состоит из одного элемента. В такой ситуации $\Delta_D(K(D,l)) \neq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Поэтому из теоремы 5 вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пусть $a, b$ — не диаметрально противоположные точки сферы $B$. Тогда найдутся последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ и $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ такие, что $\alpha_n \leq \beta_n < \alpha_{n+1}$; $\alpha_n, \beta_n \to +\infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}^*$ существует континуум движений $x_\delta : [0, \delta] \to B$ частицы $\chi$, соединяющих точки $a$ и $b$ и удовлетворяющих условию $\delta^2 + \mathscr{L}(x_\delta)^2 \in [\alpha_n, \beta_n]$.*

Замечание 4. Для диаметрально противоположных точек $a$ и $b$ при любом $l \in Kr(D)$ геодезические из $K(D,l)$ заполняют всю сферу $B$ и $\Delta_D(K(D,l)) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Известны случаи, когда эти точки не могут быть соединены ни одним движением частицы $\chi$ (см., например, [1]).

Замечание 5. Предположим, что магнитное поле $\overline{H}$ создается одним зарядом, расположенным в центре сферы $B$. Тогда $(E, g)$ — стандартная трехмерная сфера радиуса 2, а $\rho = (E, p, B)$ — расслоение Хопфа [10]. При этом $\alpha_n = d_{2n}^2(a,b)/2$ и $\beta_n = d_{2n+1}^2(a,b)/2$. Для $n = 0$ это следует из того, что длины горизонтальных лифтов геодезических из $\Omega(B, a, b)$, реализующих расстояния $d_0(a,b)$ и $d_1(a,b)$, совпадают с $\min\limits_{w\in G_b} d_0^E(v,w)$ и $\max\limits_{w\in G_b} d_0^E(v,w)$ соответственно. Для произвольного номера $n$ указанные значения $\alpha_n$ и $\beta_n$ получаются из периодичности геодезических сфер и замечания 3.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Яковлев Е. И.* Двуконцевая задача для некоторого класса многозначных функционалов // Функцион. анализ и его прил. 1990. Т. 24, № 4. С. 63–73.
2. *Яковлев Е. И.* Геодезическое моделирование и условия разрешимости двухконцевой задачи для многозначных функционалов // Функцион. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 1. С. 89–92.
3. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 3–49.
4. *Люстерник Л. А.* Топология и вариационное исчисление // Успехи мат. наук. 1946. Т. 1, № 1. С. 30–56.
5. *Постников М. М.* Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
6. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
7. *Тайманов И. А.* Замкнутые экстремали на двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 2. С. 143–185.
8. *Серр Ж.-П.* Сингулярные гомологии расслоенных пространств. Расслоенные пространства. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
9. *Яковлев Е. И.* Почти главные расслоения // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 9. С. 151–176.
10. *Яковлев Е. И.* Секционные кривизны многообразий типа Калуцы — Клейна // Изв. вузов. Математика. 1997. № 9. С. 75–82.


*Статья поступила 25 октября 2006 г.*

Ершов Юрий Валерьевич, Яковлев Евгений Иванович
Нижегородский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра геометрии и высшей алгебры,
пр. Гагарина, 23, корп. 6, Нижний Новгород 603950
`eryv@yandex.ru`, `yei@uic.nnov.ru`