*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1*

*УДК 519.21*

# ТОЧНОСТЬ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ТЕОРЕМЕ ПУАССОНА В ТЕРМИНАХ РАССТОЯНИЯ $\chi^2$

**И. С. Борисов, И. С. Ворожейкин**

**Аннотация.** Исследуется асимптотика расстояния $\chi^2$ между распределением суммы независимых не обязательно одинаково распределенных бернуллиевских случайных величин и сопровождающим пуассоновским законом. В качестве следствия уточняется мультипликативная постоянная в известных оценках скорости сходимости в теореме Пуассона в случае одинаково распределенных слагаемых.

**Ключевые слова:** обобщенное биномиальное распределение, биномиальное распределение, пуассоновское распределение, теорема Пуассона, информационное расстояние Кульбака — Лейблера, расстояние по вариации, расстояние $\chi^2$.

## § 1. Введение

Аппроксимация распределений сумм независимых бернуллиевских случайных величин (в случае различных вероятностей успеха бернуллиевских испытаний речь идет о так называемых *обобщенных биномиальных распределениях*) сопровождающим пуассоновским законом или близким к таковому представляет собой одну из классических задач теории вероятностей. Исследование этой проблемы имеет богатую полувековую историю, отсчет которой начинается с работы Ю. В. Прохорова 1953 г. [1]. Мы не будем здесь делать развернутый обзор всех работ в данном направлении, что весьма затруднительно по причине значительного числа публикаций в этой области. Остановимся только на результатах, вплотную примыкающих к теме настоящей работы.

Прежде всего отметим, что подавляющее число работ в данной области посвящено оцениванию расстояния по вариации между указанными выше распределениями (см., например, [2–4]), где уточнены и обобщены соответствующие результаты из [1]. Отметим также недавнюю работу [5], в которой исследовалась точность пуассоновской аппроксимации в терминах более сильного, чем расстояние по вариации, информационного расстояния и, в частности, с помощью неравенства Пинскера (см. § 2) получено некоторое уточнение отмеченных выше результатов для расстояния по вариации.

В настоящей работе исследуется так называемое расстояние $\chi^2$ («хи-квадрат») между обобщенным (или классическим) биномиальным распределением и сопровождающим пуассоновским законом. В качестве следствия теоремы 4.1 настоящей работы получены усиление соответствующего результата в [5] и тем самым новые оценки для расстояния по вариации между распределениями в теореме Пуассона.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00810 и 06–01–00738), а также гранта INTAS (03–51–5018).

Настоящая работа организована следующим образом. В § 2 даны определения и приведены некоторые свойства трех основных расстояний, в терминах которых и будет изучаться точность пуассоновской аппроксимации. В § 3 исследована асимптотика соответствующего расстояния $\chi^2$ для обобщенного биномиального распределения (теорема 3.1). В § 4 получены асимптотические разложения и двусторонние оценки указанного расстояния для классического биномиального распределения (теорема 4.1). В § 5 сравниваются полученные оценки с аналогичными результатами предшественников для классического биномиального распределения.

## § 2. Основные определения и обозначения

Пусть $P$ и $Q$ — некоторые распределения на множестве $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2 \dots\}$. Введем следующие расстояния в пространстве таких распределений.

1. *Расстояние по вариации* между $P$ и $Q$ (см. [1, 2]):

$$\|P - Q\| := \sum_{i=0}^{\infty} |P(i) - Q(i)|.$$

Иногда расстоянием по вариации называют (см. [3, 4]) величину $\sup\limits_{A \subset \mathbb{Z}_+} |P(A) - Q(A)|$, которая, как известно, вдвое меньше величины $\|P - Q\|$ — полной вариации знакопеременной конечной меры $P - Q$.

2. *Информационное расстояние* или *расстояние Кульбака — Лейблера* между $P$ и $Q$:

$$D(P, Q) := \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \log \frac{P(i)}{Q(i)}.$$

3. *Расстояние* $\chi^2$ между $P$ и $Q$:

$$\chi^2(P, Q) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(P(i) - Q(i))^2}{Q(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} Q(i) \left( \frac{P(i)}{Q(i)} - 1 \right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} P(i) \frac{P(i)}{Q(i)} - 1.$$

При этом в случае, когда носители распределений $P$ и $Q$ не совпадают с $\mathbb{Z}_+$, мы полагаем в пп. 2 и 3, что $0/0 = 0$, $a/0 = \infty$ при $a > 0$, $0 \cdot \log(0) = 0$ и $\log(\infty) = \infty$, тем самым доопределяя значения введенных расстояний на расширенной в положительном направлении числовой прямой. Отметим, что если носитель распределения $P(\cdot)$ конечен и включен в носитель $Q(\cdot)$, то при вышеприведенных соглашениях касательно арифметических операций расстояния $\chi^2(P, Q)$ и Кульбака — Лейблера будут собственными. Отметим также, что расстояния $\chi^2$ и Кульбака — Лейблера в отличие от $\|\cdot\|$ не являются *метрическими* расстояниями. Они не обладают симметрией относительно перестановки аргументов и, вообще говоря, не удовлетворяют неравенству треугольника.

Введенные три расстояния связаны следующими неравенствами:

(a) неравенство Коши — Буняковского

$$\|P - Q\|^2 \le \chi^2(P, Q);$$

(b) неравенство Пинскера (см. [5, 6])

$$\|P - Q\|^2 \le 2D(P, Q);$$

(c) неравенство

$$D(P, Q) \le \chi^2(P, Q),$$

которое следует из очевидной оценки $\log x \le x - 1$ при любом $x > 0$.

Таким образом, расстояние $\chi^2$ является самым сильным из перечисленных, и, казалось бы, логичнее оценивать расстояние по вариации через информационное расстояние (что и делается в [5]), нежели через $\chi^2$. Однако $\chi^2$-расстояние имеет более простую и удобную для анализа структуру, чем расстояние $D(P, Q)$. Кроме того, несмотря на совпадение главных частей асимптотик правых частей в неравенствах (a) и (b) (скажем, в условиях классической теоремы Пуассона), поведение следующих по порядку членов, как оказалось, качественно отличается в пользу расстояния $\chi^2$ (см. § 5), что в конечном итоге и привело к улучшению верхних оценок для расстояния полной вариации, полученных в [5] с помощью неравенства Пинскера.

На протяжении всей статьи будут использоваться следующие обозначения:

1) $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые бернуллиевские случайные величины с вероятностями успеха $p_1, \dots, p_n$ соответственно;

2) $\eta$ — пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda := \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$;

3) $P$ — распределение суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, и $Q$ — распределение $\eta$ (сопровождающее пуассоновское распределение);

4) $p := \sum\limits_{i=0}^{n} p_i^2/\lambda$, в частности, в случае одинаково распределенных бернуллиевских слагаемых величина $p$ совпадает с их общей вероятностью успеха;

5) $\tilde{p}_i := \frac{p_i}{1-p_i}$, $\tilde{\lambda} := \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i$, $\tilde{p} := \sum\limits_{i=0}^{n} \tilde{p}_i^2/\tilde{\lambda}$.

Условимся также, что всюду в дальнейшем все предельные соотношения (т. е. соотношения, описываемые символами $\to$, $\sim$, $o$, $O$, $\lim$) понимаются при $n \to \infty$. При этом запись типа $\varphi_n = O(f(\lambda, p))$ для положительных $\varphi_n$ и $f(\cdot)$ будет означать, что верхний предел соответствующего отношения может быть оценен сверху некоторой абсолютной положительной постоянной. Такие постоянные в работе будут обозначаться символами $c$ и $c_i$. Зависимость постоянных от тех или иных параметров задачи будет фиксироваться соответствующими аргументами в записи вида $c(\cdot)$.

## § 3. Аппроксимация обобщенного биномиального распределения

Основная цель этого параграфа — доказательство следующего утверждения.

**Теорема 3.1.** *Пусть $\lambda^7 p \to 0$. Тогда*

$$\frac{\chi^2(P, Q)}{p^2} \to \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Для того чтобы исследовать асимптотику расстояния $\chi^2(P, Q)$, построим для функции $\Delta(k) := \frac{(P(k)-Q(k))^2}{Q(k)^2}$ двустороннюю оценку вида

$$A(k) + C(k) \le \Delta(k) \le A(k) + B(k),$$

для которой средние $\mathbf{E}(C(\eta))$ и $\mathbf{E}(B(\eta))$ имели бы бо́льший порядок малости по сравнению со средним $\mathbf{E}(A(\eta))$, которое, в свою очередь, вычислялось бы достаточно просто. Тогда мы получим асимптотическое представление

$$\chi^2(P, Q) = \mathbf{E}(\Delta(\eta)) \sim \mathbf{E}(A(\eta)).$$

Построение указанной двусторонней оценки разобьем на несколько этапов.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $\lambda p/2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i{}^3/3 \le 1$. *Тогда для всех целых* $k \in [0, n]$ *справедливо следующее двустороннее неравенство:*

$$R_1 R_2 \le \frac{P(k)}{Q(k)} \le R_1^* R_2^*,$$

*где* $R_1 := 1 - \lambda p/2 - \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i^3/3$, $R_1^* := 1 - \lambda p/2 + (\lambda p)^2/8$, $R_2 := (\tilde{\lambda}/\lambda)^k (1 - \tilde{\lambda}^{-1} C_k^2 \tilde{p})$,

$$R_2^* := R_2 + \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k \left(C_k^4 + 3C_k^3\right) \max\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i{}^3}{\tilde{\lambda}^3}, (\tilde{p}/\tilde{\lambda})^2\right),$$

*при этом биномиальный коэффициент* $C_k^m := k(k-1)\dots(k-m+1)/m!$ *полагается по определению равным нулю при* $k < m$.

Доказательство. Для любого натурального $k \le n$ справедливо тождество

$$\frac{P(k)}{Q(k)} = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k \le n} \lambda^{-k} \tilde{p}_{i_1} \tilde{p}_{i_2} \dots \tilde{p}_{i_k} (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n) e^{\lambda} = F_1 F_2, \quad (1)$$

где $F_1 := (1 - p_1)(1 - p_2) \dots (1 - p_n) e^{\lambda}$, $F_2(k) := \lambda^{-k} \sum\limits_{i_1 \ne \dots \ne i_k \le n} \tilde{p}_{i_1} \tilde{p}_{i_2} \dots \tilde{p}_{i_k}$. Если дополнительно положить $F_2(0) := 1$, то тождество (1) будет справедливым при всех $0 \le k \le n$.

Оценим сначала $F_1$. С помощью формулы Тейлора получаем

$$\log(F_1) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log(1 - p_i) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^3}{3} \frac{1}{(1 - \theta_i p_i)^3},$$

где $0 < \theta_i < 1$ при всех $i$. Стало быть,

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{p}_i^3}{3} \le \log(F_1) \le -\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2}.$$

Используя элементарное двустороннее неравенство $1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + x^2/2$ при $x \ge 0$, отсюда получаем

$$1 - \frac{\lambda p}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{p}_i^3}{3} \le F_1 \le 1 - \frac{\lambda p}{2} + \frac{1}{8} (\lambda p)^2.$$

Теперь построим верхнюю и нижнюю оценки для $F_2(k)$ в (1) при всех $k \le n$. Поскольку $F_2(0) = 1$ и $F_2(1) = \tilde{\lambda}/\lambda$, т. е. при $k = 0, 1$ сформулированные в лемме оценки, очевидно, имеют место, достаточно разобрать только случай $2 \le k \le n$. Обозначим через $S := \{1, 2, \dots, n\}^k$ множество мультииндексов $(i_1, i_2, \dots, i_k)$, каждая координата которых меняется от 1 до $n$. Введем конечную меру $\mu$ на подмножествах $S$ по формуле

$$\mu(S') := \sum_{s \in S'} \tilde{p}(s),$$

где $S' \subseteq S$, $\tilde p(s) := \tilde p_{i_1}\tilde p_{i_2}\ldots\tilde p_{i_k}$, если $s = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$, при этом $\mu(\varnothing) = 0$ по определению. Тогда $F_2(k) = \lambda^{-k}\mu(S^*)$, где $S^* = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S : i_1 \neq i_2 \cdots \neq i_k\}$. Положим $S_{l,m} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S,\ i_l = i_m\}$ при $0 < l < m \leq k$ и $S_{l,m} = \varnothing$ иначе. Очевидно, $S^* = S \backslash \cup_{l,m} S_{l,m}$. Стало быть, в силу аддитивности $\mu$ справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\mu(S^*) \geq \mu(S) - \sum_{l,m}\mu(S_{l,m}) = \tilde\lambda^k - C_k^2\mu(S_{1,2}),\\ \mu(S^*) \leq \mu(S) - \sum_{l,m}\mu(S_{l,m}) + \frac{1}{2}\sum_{(l,m)\neq(i,j)}\mu(S_{l,m}\cap S_{i,j}) =: \mu^*.\end{gathered} \tag{2}$$

Отметим, что при $k = 2$ эти два неравенства превращаются в равенства, если в этом случае сумму $\sum\limits_{(l,m)\neq(i,j)}$ положить равной нулю (как сумму по пустому множеству индексов). Пусть $l < m$. Тогда

$$\mu(S_{l,m}) = \mu(S_{1,2}) = \sum_{i=1}^n \tilde p_i^2\left(\sum_{i=1}^n \tilde p_i\right)^{k-2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \tilde p_i^2}{\tilde\lambda^2}\tilde\lambda^k.$$

Поэтому нижняя оценка для $F_2(k)$ имеет вид

$$F_2(k) = \mu(S^*)\lambda^{-k} \geq R_2.$$

В случае $k \geq 3$ для оценки величины $\mu^*$ в (2) при вычислении меры $\mu$ всевозможных парных пересечений подмножеств $S_{i,j}$ отметим, что в соответствующей сумме указанные меры различимы лишь в двух случаях, когда пары $(i,j)$ и $(l,m)$ имеют либо одну общую координату, либо ни одной (при $k \geq 4$). Соответственно в первом из этих случаев будет

$$\begin{aligned}\mu(S_{l,m}\cap S_{i,j}) &= \mu(S_{1,2}\cap S_{2,3}) = \mu(S_{1,2}\cap S_{1,3}) = \mu(S_{1,3}\cap S_{2,3})\\ &= \sum_{i=1}^n \tilde p_i^3\left(\sum_{i=1}^n \tilde p_i\right)^{k-3} = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \tilde p_i^3}{\tilde\lambda^3}\tilde\lambda^k,\end{aligned} \tag{3}$$

при этом число таких слагаемых в соответствующей сумме равно $6C_k^3$, а во втором случае —

$$\mu(S_{l,m}\cap S_{i,j}) = \mu(S_{1,2}\cap S_{3,4}) = \left(\sum_{i=1}^n \tilde p_i^2\right)^2\left(\sum_{i=1}^n \tilde p_i\right)^{k-4} = \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^n \tilde p_i^2}{\tilde\lambda^2}\right)^2\tilde\lambda^k \tag{4}$$

и число таких слагаемых в указанной выше сумме равно $2C_k^4$.

Обозначим $\alpha := \max\left(\tilde\lambda^{-3}\sum\limits_{i=1}^n \tilde p_i^3, (\tilde\lambda^{-1}\tilde p)^2\right)$. Тогда из (2)–(4) окончательно получаем

$$F_2(k) \leq \lambda^{-k}\mu^* = R_2 + 2^{-1}\lambda^{-k}\sum_{(l,m)\neq(i,j)}\mu(S_{l,m}\cap S_{i,j}) \leq R_2 + (\tilde\lambda/\lambda)^k\big(C_k^4 + 3C_k^3\big)\alpha = R_2^*.$$

В условиях леммы имеем $R_1 \geq 0$, $R_1^* \geq 0$, $R_2^* \geq 0$. Несмотря на то, что при этом величина $R_2$ может быть отрицательной, двустороннее неравенство $R_1R_2 \leq F_1F_2 \leq R_1^*R_2^*$ все же будет иметь место. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *Пусть $\lambda p \to 0$. Тогда справедливы следующие асимптотические соотношения:*

1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i^m/p = O((\lambda p)^{(m-2)/2})$ *при всех* $m > 2$;
2) $\tilde{\lambda} \sim \lambda$, $\tilde{p} \sim p$;
3) $\sum \frac{p_i^2}{1-p_i} = \lambda p(1 + O((\lambda p)^{1/2}))$;
4) $\tilde{\lambda}\tilde{p} = \lambda p + O((\lambda p)^{3/2})$;
5) $\tilde{\lambda}^m - \lambda^m = m\lambda^m p(1 + O(m2^m(\lambda p)^{1/2}))$ *при любом* $m \geq 1$.

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы $\max\limits_{i \leq n} p_i \leq (\lambda p)^{1/2} \to 0$, после чего утверждения 1–4 выводятся элементарно.

Для доказательства соотношения 5 отметим, что в силу 3

$$\tilde{\lambda} - \lambda = \sum_{i=1}^{n}(\tilde{p}_i - p_i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^2}{1-p_i}\right) = \lambda p(1 + O((\lambda p)^{1/2})) =: \delta.$$

Поэтому при любом фиксированном $m \geq 2$

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}^m - \lambda^m = (\lambda + \delta)^m - \lambda^m = \sum_{i=1}^{m} C_m^i \lambda^{m-i}\delta^i \\ = \lambda^m \sum_{i=1}^{m} C_m^i p^i (1 + O(m(\lambda p)^{1/2})) = m\lambda^m p(1 + O(m2^m(\lambda p)^{1/2})),\end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{i=2}^{m} C_m^i p^i \leq C_m^2 p^2 \sum_{i=2}^{m} C_{m-2}^{i-2} p^{i-2} = C_m^2 p^2 (1+p)^{m-2}$$

и в силу очевидных оценок $p \leq \lambda$ и $p \leq 1$ с необходимостью вытекает, что правая часть последнего неравенства в условиях леммы имеет порядок $O(pm^2 2^m (\lambda p)^{1/2})$. Лемма доказана.

Далее нам понадобятся следующие соотношения, которые непосредственно вытекают из определения пуассоновских законов.

**Лемма 3.3.** *Пусть $\zeta_1$ и $\zeta_2$ — пуассоновские случайные величины с произвольными параметрами $\mu_1$ и $\mu_2$ соответственно. Тогда для любой функции $f(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, растущей по модулю на бесконечности не быстрее показательной, справедливо равенство*

$$\mathbf{E}(\mu_2/\mu_1)^{\zeta_1} f(\zeta_1) = e^{\mu_2 - \mu_1}\mathbf{E}f(\zeta_2).$$

*Кроме того, для любого натурального $m$*

$$\mathbf{E}C_{\zeta_2}^m = \frac{\mu_2^m}{m!}, \quad \mathbf{E}(C_{\zeta_2}^m)^2 = \frac{\mu_2^m}{(m!)^2}\mathbf{E}(\zeta_2 + 1)\ldots(\zeta_2 + m) \leq c(m)\mu_2^m(1 + \mu_2^m).$$

Выделим отдельно еще один фрагмент в схеме доказательства теоремы 3.1.

**Лемма 3.4.** *Пусть функции $A(k)$, $C(k)$, $S(k)$, $B(k)$, заданные на $\mathbb{Z}_+$, удовлетворяют следующим условиям:*

$$A(k) + C(k) \leq S(k) \leq A(k) + B(k),$$

$$\mathbf{E}(B(\eta))^2 = o(p^2),\ \mathbf{E}(C(\eta))^2 = o(p^2),\ \mathbf{E}|B(\eta)A(\eta)| = o(p^2),\ \mathbf{E}|C(\eta)A(\eta)| = o(p^2)$$

*при* $p \to 0$. *Тогда* $\mathbf{E}(S(\eta))^2 = \mathbf{E}(A(\eta))^2 + o(p^2)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $D(k) := S(k) - A(k)$. Очевидно,

$$\mathbf{E}(S(\eta))^2 = \mathbf{E}(A(\eta))^2 + 2\mathbf{E}D(\eta)A(\eta) + \mathbf{E}(D(\eta))^2.$$

Остается только воспользоваться оценкой

$$|D(k)| \le |C(k)| + |B(k)|$$

и условиями леммы. Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3.1. Сначала отметим, что из неравенств $p \le \lambda$ и $\lambda^7 p \ge \lambda^b I(\lambda \ge 1)p$ для любого $b \in [0, 7]$, где $I(\cdot)$ — индикаторная функция, следуют соотношения $\lambda^b p \to 0$ для всех $b$ из указанного промежутка. В частности, условие теоремы влечет за собой выполнение условия леммы 3.2. Кроме того, поскольку $\max\limits_{i \le n} p_i \le (\lambda p)^{1/2}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i^3 \le (\lambda p)^{3/2}$. Стало быть, если произведение $\lambda p$ достаточно мало́, то будет выполнено и условие леммы 3.1.

Введем следующие обозначения:

$$S(k) := \frac{P(k)}{Q(k)} - 1, \quad A(k) := \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda p}{2} - \tilde{\lambda}^{-1} C_k^2 \tilde{p}\right) - 1, \tag{5}$$

$$B(k) := R_1^* R_2^* - 1 - A(k), \quad C(k) := R_1 R_2 - 1 - A(k),$$

где $R_1$, $R_2$, $R_1^*$, $R_2^*$ определены в лемме 3.1. Отметим, что в новых обозначениях

$$\chi^2(P, Q) = \mathbf{E}(S(\eta))^2.$$

Кроме того, в силу леммы 3.1 при достаточно малом $\lambda p$ имеет место двусторонняя оценка

$$A(k) + C(k) \le S(k) \le A(k) + B(k).$$

Положим $\tilde{\alpha} := \max\left(\tilde{\lambda}^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i^3, \tilde{p}^2\right)$. Отметим, что в силу леммы 3.2 и условий теоремы $\tilde{\alpha} = o(p)$. Нетрудно показать, что при достаточно малом $\lambda p$ имеем

$$B(k)^2 \le \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{2k} c_0\big((\lambda p)^4 + \big(C_k^2 \tilde{\lambda}^{-1} p\big)^2 (\lambda p)^2 + \big(C_k^4 + C_k^3\big)^2 \tilde{\lambda}^{-4} \tilde{\alpha}^2\big) =: \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{2k} f(k).$$

В условиях леммы 3.3 положим $\zeta_1 := \eta$ (т. е. $\mu_1 := \lambda$) и $\mu_2 := \tilde{\lambda}^2/\lambda$. Тогда

$$\mathbf{E}B(\eta)^2 \le \mathbf{E}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^{2\eta} f(\eta) = \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} - \lambda\right) \mathbf{E}f(\zeta_2). \tag{6}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}^{-2}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^2\big)^2 &\le c_1(\tilde{\lambda}/\lambda)^2(1 + (\tilde{\lambda}/\lambda)^4\lambda^2), \\ \tilde{\lambda}^{-4}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^3\big)^2 &\le c_1(\tilde{\lambda}/\lambda)^2(1 + (\tilde{\lambda}/\lambda)^6\lambda^3)/\lambda, \\ \tilde{\lambda}^{-4}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^4\big)^2 &\le c_1(\tilde{\lambda}/\lambda)^4(1 + (\tilde{\lambda}/\lambda)^8\lambda^4). \end{aligned} \tag{7}$$

Отметим также, что из очевидного соотношения $\tilde{\alpha} = O(p \max\limits_i p_i)$ и оценки $\max\limits_i p_i \le (\lambda p)^{1/2}$ следует, что $\tilde{\alpha}^2 = O(\lambda p^3)$. Стало быть, в условиях теоремы

$$\begin{gathered} \tilde{\alpha}^2\tilde{\lambda}^{-4}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^3\big)^2 = O((\lambda p)^3) = o(p^2), \quad \tilde{\alpha}^2\tilde{\lambda}^{-4}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^4\big)^2 = O(\lambda^5 p^3) = o(p^2), \\ \tilde{\lambda}^{-2}\mathbf{E}\big(C_{\zeta_2}^2\big)^2 p^2 (\lambda p)^2 = O(p^2((\lambda p)^2 + \lambda^4 p^2)) = o(p^2). \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\mathbf{E}B(\eta)^2 = o(p^2). \tag{9}$$

Из вышеприведенных оценок при достаточно малом $\lambda p$ вытекает неравенство (напомним, что $\tilde{\lambda} > \lambda$)

$$|B(k)A(k)| \le \left(\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k - 1 + \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k \left(\frac{\lambda p}{2} + C_k^2 \tilde{p}/\tilde{\lambda}\right)\right)\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^k \sqrt{f(k)}$$
$$= B_1(k) + B_2(k) + B_3(k),$$

где

$$B_1(k) = (\lambda p/2)(\tilde{\lambda}/\lambda)^{2k}\sqrt{f(k)}, \quad B_2(k) = \tilde{p}(\tilde{\lambda}/\lambda)^{2k}\tilde{\lambda}^{-1}C_k^2\sqrt{f(k)},$$
$$B_3(k) = ((\tilde{\lambda}/\lambda)^k - 1)(\tilde{\lambda}/\lambda)^k\sqrt{f(k)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{E}|B(\eta)A(\eta)| \le \mathbf{E}B_1(\eta) + \mathbf{E}B_2(\eta) + \mathbf{E}B_3(\eta). \tag{10}$$

Оценка всех трех математических ожиданий в правой части (10) проводится однотипно с помощью леммы 3.3. Для оценки первого слагаемого правой части (10) воспользуемся неравенством (6), где вместо $f$ нужно подставить $\sqrt{f}$, а затем применить неравенство Коши — Буняковского. В результате получаем

$$\mathbf{E}B_1(\eta) \le \frac{\lambda p}{2}\exp\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} - \lambda\right)(\mathbf{E}f(\zeta_2))^{1/2}. \tag{11}$$

Используя асимптотические формулы (8) (в терминах $O(\cdot)$) для компонент момента $\mathbf{E}f(\zeta_2)$, окончательно получаем

$$\mathbf{E}B_1(\eta) = O((\lambda p)^{5/2} + \lambda^{7/2}p^{5/2} + \lambda^2 p^3) = O(p^2(\sqrt{\lambda^7 p} + \sqrt{\lambda^5 p} + \lambda^2 p)) = o(p^2). \tag{12}$$

Совершенно аналогично проводится оценка второго слагаемого правой части (10). Для этого надо воспользоваться неравенством (6), в котором вместо $f(k)$ нужно поставить $C_k^2\sqrt{f(k)}$, вновь применить неравенство Коши — Буняковского и асимптотические представления (7) и (8) для моментов соответствующих компонент.

Для оценки последнего слагаемого правой части (10) прежде всего заметим, что в силу леммы 3.3 и неравенства Коши — Буняковского имеем

$$\mathbf{E}B_3(\eta) \le (\mathbf{E}((\tilde{\lambda}/\lambda)^\eta - 1)^2)^{1/2}(\mathbf{E}(\tilde{\lambda}/\lambda)^{2\eta}f(\eta))^{1/2}$$
$$= (\exp\{\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda\} - 2\exp\{\tilde{\lambda} - \lambda\} + 1)^{1/2}(\mathbf{E}f(\zeta_2))^{1/2}\exp\{(1/2)(\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda)\}. \tag{13}$$

Рассмотрим отдельно первый множитель в правой части (13). Раскладывая обе экспоненты в окрестности нуля до членов второго порядка малости и замечая, что в силу леммы 3.2

$$\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda - 2(\tilde{\lambda} - \lambda) = (\tilde{\lambda} - \lambda)^2/\lambda = \lambda p^2(1 + o(1)),$$

получаем следующее асимптотическое представление:

$$(\exp\{\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda\} - 2\exp\{\tilde{\lambda} - \lambda\} + 1)^{1/2} = O(\lambda^{1/2}p + \lambda p).$$

Иными словами, оценка (13) свелась к (11) и (12).

Итак, $\mathbf{E}B_i(\eta) = o(p^2)$ для всех $i = 1, 2, 3$, а стало быть,

$$\mathbf{E}|B(\eta)A(\eta)| = o(p^2). \tag{14}$$

Аналогично предыдущему доказываются соотношения

$$\mathbf{E}C(\eta)^2 = o(p^2), \quad \mathbf{E}|C(\eta)A(\eta)| = o(p^2),$$

что вместе с (9) и (14) в силу леммы 3.4 означает

$$\lim \frac{\chi^2(P,Q)}{p^2} = \lim \frac{\mathbf{E}S(\eta)^2}{p^2} = \lim \frac{\mathbf{E}A(\eta)^2}{p^2}.$$

Осталось показать, что $\lim \mathbf{E}A(\eta)^2/p^2 = 1/2$. Для доказательства этого факта, как и прежде, вновь применяются леммы 3.2 и 3.3, а также уже подробно описанные выше элементы асимптотического анализа. При этом в отличие от предшествующих вычислений здесь, по существу, будут использованы оценки остаточных членов в соответствующих утверждениях леммы 3.2, так как нас интересует точная асимптотика момента $\mathbf{E}A(\eta)^2$. Для удобства читателя выделим нужные нам для дальнейшего анализа утверждения лемм 3.2 и 3.3:

$$\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} - \lambda = 2\lambda p(1 + O((\lambda p)^{1/2})), \quad \tilde{\lambda} - \lambda = \lambda p(1 + O((\lambda p)^{1/2})), \tag{15}$$
$$\tilde{\lambda}\tilde{p} = \lambda p(1 + O((\lambda p)^{1/2})), \quad \mathbf{E}\zeta(\zeta-1) = \mu^2, \quad \mathbf{E}(\zeta(\zeta-1))^2 = \mu^4 + 4\mu^3 + 2\mu^2,$$

где $\zeta$ — пуассоновская случайная величина с параметром $\mu$. При этом две последние формулы в (15) будут применены ниже в двух случаях: для $\zeta = \zeta_2$ (т. е. при $\mu = \tilde{\lambda}^2/\lambda$) и для $\zeta = \tilde{\eta}$ (т. е. при $\mu = \tilde{\lambda}$).

Сначала с помощью леммы 3.3 представим интересующий нас второй момент следующим образом:

$$\mathbf{E}A(\eta)^2 = A_1 + A_2 + A_3,$$

где

$$A_1 := \exp(\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda) - 2\exp(\tilde{\lambda} - \lambda) + 1,$$
$$A_2 := \exp(\tilde{\lambda} - \lambda)(p\lambda + \tilde{\lambda}\tilde{p}) - \exp(\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda)(p\lambda + (\tilde{\lambda}^2/\lambda^2)\tilde{\lambda}\tilde{p}),$$
$$A_3 := \exp(\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda)\mathbf{E}\bigl(\lambda p/2 + \tilde{\lambda}^{-1}\tilde{p}C^2_{\zeta_2}\bigr)^2.$$

Для оценки $A_1$ разложим обе экспоненты в окрестности нуля до членов третьего порядка малости и используем соотношения (15). В результате получим

$$A_1 = (\tilde{\lambda} - \lambda)^2/\lambda + (1/2)(\tilde{\lambda}^2/\lambda - \lambda) - (\tilde{\lambda} - \lambda)^2 = \lambda p^2 + (\lambda p)^2 + o(p^2).$$

Аналогично (но раскладывая экспоненты до членов второго порядка малости) получаем асимптотическое представление для $A_2$:

$$A_2 = -2(\lambda p^2 + (\lambda p)^2) + o(p^2).$$

Оценим $A_3$. С помощью (15) имеем

$$A_3 = \exp\left(\frac{\tilde{\lambda}^2}{\lambda} - \lambda\right)\left(\frac{(\lambda p)^2}{4} + \frac{1}{2}\lambda p\tilde{\lambda}\tilde{p}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^4(\tilde{\lambda}\tilde{p})^2 + \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^3\tilde{\lambda}\tilde{p}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2\tilde{p}^2\right)$$
$$= (\lambda p)^2 + \lambda p^2 + p^2/2 + o(p^2).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\mathbf{E}A(\eta)^2 = p^2/2 + o(p^2).$$

Теорема 3.1 доказана.

## § 4. Двусторонние оценки аппроксимации классического биномиального распределения

Всюду в дальнейшем полагаем $p_i = p$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае $\lambda = np$ и

$$P(k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}(1-p)^{n-k}p^k, \quad Q(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

**Теорема 4.1.** *Для любых $p$ и $n$ имеет место следующая двухсторонняя оценка:*

$$\frac{p^2}{2} + \frac{2p^3}{3n} \le \chi^2(P,Q) \le \frac{p^2}{2} + \frac{2p^3}{3n} + \frac{p^4}{1-p} + \frac{p^8(23-20p)}{(1-p)^2}. \tag{16}$$

Доказательство. Для построения оценок (16) сначала приведем расстояние $\chi^2(P,Q)$ к виду $\sum\limits_{m\ge 0} B_m p^m$, а затем будем оценивать коэффициенты $B_m$.

**Лемма 4.1.** *Справедливо следующее представление:*

$$\chi^2(P,Q) + 1 = \sum_{m\ge 0} \frac{m!}{n^m} A_m^2 p^m, \tag{17}$$

где $A_m := \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{n^i(-1)^{m-i}}{i!} C_n^{m-i}$.

Доказательство. Условимся, что если для того или иного индекса суммирования не указана область изменения, то суммирование ведется по множеству $\mathbb{Z}$ — всем целым числам. При этом в нижеследующих формулах нам будет удобно полагать $(-k)! = \infty$ при всех натуральных $k$, что равносильно уже упомянутому в § 3 соглашению о равенстве $C_k^m = 0$ при всех натуральных $k < m$ (разумеется, если принять во внимание очевидное соглашение об арифметических операциях на расширенной числовой прямой). Отметим, что подобное расширенное толкование биномиальных коэффициентов можно найти, например, в [7].

Используя соответствующее представление для $\chi^2$ из § 2, получаем

$$\chi^2(P,Q) + 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2 p^k}{((n-k)!)^2 k! n^k}(1-p)^{n-k}(1-p)^{n-k}e^{np}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2 p^k}{((n-k)!)^2 k! n^k} \sum_{i,j,l} \left((-1)^i p^i \frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!}\right)\left((-1)^j p^j \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!j!}\right)\frac{n^l p^l}{l!}$$
$$= \sum_{k}\sum_{i,j,l} \frac{(n!)^2(-1)^{i+j}p^{i+j+l+k}n^l}{k!n^k(n-k-i)!i!(n-k-j)!j!l!} =: R_1.$$

В последней кратной сумме сделаем замену четырех переменных суммирования по формулам $i = d + r - q$, $j = d$, $k = m - r - d$ и $l = q - d$. Нетрудно убедиться в том, что данное линейное преобразование переменных — биекция из $\mathbb{Z}^4$ в $\mathbb{Z}^4$. Тогда

$$R_1 = \sum_{m,r,q,d} \frac{(n!)^2(-1)^{2d+r-q}p^m n^{r+q-m}}{(m-r-d)!(n-m+q)!(d+r-q)!(n-m+r)!d!(q-d)!}.$$

В кратной сумме последнего представления для $R_1$ переменные $r$ и $q$ можно считать не превосходящими $m$, поскольку в противном случае по меньшей мере один из факториалов в знаменателе дроби будет равен $-\infty$.

Стало быть, $R_1$ допускает следующее уточнение:

$$R_1 = \sum_{m\ge 0}\sum_{r,q=0}^{m}\sum_{d}\frac{(n!)^2(-1)^{2d+r-q}p^m n^{r+q-m}}{(m-r-d)!(n-m+q)!(a+r-q)!(n-m+r)!d!(q-d)!}$$
$$= \sum_{m\ge 0}\sum_{r,q=0}^{m}\left(\frac{(n!)^2(-1)^{2d+r-q}p^m n^{r+q-m}m!}{(n-m+q)!(n-m+r)!r!q!(m-r)!(m-q)!}\sum_{d}\frac{C_q^d C_{m-q}^{m-r-d}}{C_m^r}\right),$$

причем в силу определения гипергеометрического распределения

$$\sum_{d}\frac{C_q^d C_{m-q}^{m-r-d}}{C_m^r} = 1.$$

Таким образом,

$$\chi^2(P,Q)+1 = \sum_{m\ge 0} p^m\frac{m!}{n^m}\sum_{r,q=0}^{m}\frac{(n!)^2(-1)^{r+q}n^{r+q}}{(n-m+q)!(n-m+r)!r!q!(m-r)!(m-q)!}$$
$$= \sum_{m\ge 0} p^m\frac{m!}{n^m}\left(\sum_{r=0}^{m}\frac{n!(-1)^r n^r}{(n-m+r)!r!(m-r)!}\right)\left(\sum_{q=0}^{m}\frac{n!(-1)^q n^q}{(n-m+q)!j!(m-q)!}\right)$$
$$= \sum_{m\ge 0} p^m\frac{m!}{n^m}A_m^2,$$

где коэффициенты $A_m$ определены в (17). Утверждение доказано.

Следующая лемма дает относительно простой способ нахождения коэффициентов $A_m$.

**Лемма 4.2.** *Для коэффициентов $A_m$ в (17) при любом натуральном n выполнено рекуррентное соотношение*

$$A_{m+2} = -\frac{n}{m+2}\sum_{i=0}^{m}A_i \quad \textit{для всех } m\ge 0.$$

Доказательство. Прежде всего вычислим производящую функцию для последовательности чисел $\{A_m;\ m\ge 0\}$, определенных в (17) по формуле

$$A_m = \sum_{i=0}^{m}\frac{n^i}{i!}(-1)^{m-i}C_n^{m-i}.$$

Меняя порядок суммирования, из этой формулы легко получаем при всех $p\in(0,1)$ тождество

$$\sum_{m=0}^{\infty}p^m A_m = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(np)^i}{i!}\sum_{m=i}^{n+i}(-p)^{m-i}C_n^{m-i} = (1-p)^n e^{np}. \tag{18}$$

Продифференцируем по $p$ обе части этого равенства (почленное дифференцирование ряда в (18) законно в окрестности любой точки из интервала $(0,1)$). В результате получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} p^m A_{m+1}(m+1) = n(1-p)^n e^{np} - n(1-p)^{n-1} e^{np} = -n(1-p)^n e^{np} \frac{p}{1-p}$$
$$= -\sum_{m=0}^{\infty} p^m A_m \frac{np}{1-p} = -n \sum_{m=0}^{\infty} p^{m+1} A_m \frac{1}{1-p} = -n \sum_{m=1}^{\infty} p^m \left( \sum_{i=0}^{m-1} A_i \right),$$

откуда и следует требуемое равенство

$$A_{m+1}(m+1) = -n \sum_{i=0}^{m-1} A_i.$$

Лемма доказана.

Приведем значения нескольких первых коэффициентов $A_i$:

$$\begin{gathered} A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = -\frac{n}{2}, \quad A_3 = -\frac{n}{3}, \quad A_4 = -\frac{n}{4} + \frac{n^2}{8}, \\ A_5 = -\frac{n}{5} + \frac{n^2}{6}, \quad A_6 = -\frac{n}{6} + \frac{13n^2}{72} - \frac{n^3}{48}, \quad A_7 = -\frac{n}{7} + \frac{11n^2}{60} - \frac{n^3}{24}. \end{gathered} \tag{19}$$

В частности, отсюда с помощью (17) получаем следующее асимптотическое разложение:

$$\chi^2(P,Q) = \frac{p^2}{2} + \frac{2p^3}{3n} + \sum_{m \geq 4} \frac{m!}{n^m} A_m^2 p^m. \tag{20}$$

Отсюда немедленно следует нижняя оценка в (16). Для верхней оценки остаточной суммы в правой части (20) нам понадобится следующее утверждение.

**Лемма 4.3.** *Для любых натуральных $n$ и $k > 1$ выполнено неравенство*

$$B_k := \frac{k!}{n^k} A_k^2 < 3k.$$

Доказательство. В силу леммы 4.1 с учетом того, что $B_0 = 1$ и $B_1 = 0$, имеем

$$\sum_{i \geq 2} B_i p^i = \chi^2(P,Q).$$

Так как $B_i \geq 0$ для любого натурального $i$, то

$$B_k \leq \chi^2(P,Q) p^{-k} \leq p^{-k} (\sup_{0 \leq i \leq n} (P(i)/Q(i)) - 1).$$

В [8] доказано следующее неравенство:

$$\sup_{0 \leq i \leq n} (P(i)/Q(i)) \leq \frac{1}{1-p}.$$

Поэтому

$$B_k \leq \frac{p}{p^k(1-p)}. \tag{21}$$

Так как $B_k$ не зависит от $p$, то, подставляя в (21) $p = 1 - 1/k$ (т. е. точку минимума правой части (21)), окончательно получаем

$$B_k \leq \frac{k-1}{\left(1 - \frac{1}{k}\right)^k} \leq \frac{k-1}{1 - \frac{k}{k} + \frac{k(k-1)}{2k^2} - \frac{k(k-1)(k-2)}{6k^3}} = \frac{3k^2}{k+1} < 3k.$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем легко вывести верхнюю оценку в (16). Принимая во внимание представление коэффициентов $A_i$ в (19), нетрудно убедиться в справедливости оценок $\frac{m!}{n^m}A_m^2 \le 1$ при $m = 4, 5, 6, 7$, что с учетом леммы 4.3 позволяет получить с помощью (20) следующее неравенство:

$$\chi^2(P,Q) \le \frac{p^2}{2} + \frac{2p^3}{3n} + p^4 + p^5 + p^6 + p^7 + \sum_{k\ge 8} 3kp^k. \tag{22}$$

Далее, нетрудно убедиться в справедливости тождества

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge 8} 3kp^k &= p^8 \sum_{k\ge 0} p^k(3(k+1)+21) = p^8\left(\frac{3}{(1-p)^2} + \frac{21}{1-p}\right)\\ &= \frac{p^8(23-20p)}{(1-p)^2} + \frac{p^8}{1-p} = \frac{p^8(23-20p)}{(1-p)^2} + \frac{p^4}{1-p} - p^4 - p^5 - p^6 - p^7.\end{aligned}$$

Используя это представление, из (22) извлекаем требуемую верхнюю оценку в (16). Теорема доказана.

**Следствие.** *Для расстояния полной вариации между распределениями $P$ и $Q$ справедлива оценка*

$$\|P-Q\| \le p\left(\frac{1}{2} + \frac{2p}{3n} + \frac{p^2}{1-p} + \frac{p^6(23-20p)}{(1-p)^2}\right)^{1/2}. \tag{23}$$

## § 5. Сравнение оценок для расстояния по вариации

Наиболее известная оценка для расстояния по вариации между биномиальным распределением и сопровождающим пуассоновским законом имеет вид (см. [2–4])

$$\|P-Q\| \le \min(2p, 2np^2), \tag{24}$$

при этом на параметры $n$ и $p$ не накладывается никаких ограничений. Как показывает теорема 4.1 (нижняя оценка), $\chi^2$-расстояние слишком грубое для получения оценок типа $O(np^2)$ для расстояния полной вариации во всем спектре изменения $n$ и $p$. Поэтому далее мы будем рассматривать только случай $\lambda = np \ge 1$. В этом случае правая часть (24) принимает вид $\min(2p, 2np^2) = 2p$.

Оценив информационное расстояние в [5], авторы в качестве следствия показали с помощью неравенства Пинскера, что

$$\|P-Q\| \le p\left(-\frac{\log(1-p)+p}{p^2} + \frac{1+p}{2n(1-p)^3}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Обозначим через $R_1^0$ и $R_2^0$ правые части в неравенствах (23) и (25) соответственно.

Заметим, что при $p \to 0$ равномерно по всем $\lambda \ge 1$ имеют место следующие асимптотические представления:

$$R_1^0 = p\left(\frac{1}{2} + p^2\left(\frac{2}{3\lambda}+1\right) + O(p^3)\right)^{1/2}, \quad R_2^0 = p\left(\frac{1}{2} + p\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{3}\right) + O(p^2)\right)^{1/2}.$$

Так что при малых $p$ оценка (23) выгодно отличается от (25), хотя при $p \to 0$ обе величины $R_1^0$ и $R_2^0$ эквивалентны и ведут себя как $p/\sqrt{2}$. В связи с этим стоит отметить, что постоянная $1/\sqrt{2}$ незначительно превышает точную нижнюю границу $3/2e = 0,5518\ldots$ из [9] для постоянных $c$ в оценках вида $cp$ для рассматриваемого расстояния по вариации в зоне $\lambda \geq 1$ и $p \leq 1/4$.

Отметим также, что при тех или иных ограничениях на параметры $p$ и $n$ можно получать более сильные по сравнению с (24) оценки. Например, в [2] при $p \leq 1/4$ и $\lambda \geq 3$ доказано следующее неравенство:

$$\|P - Q\| \leq 1,64p.$$

Для сравнения в более широкой зоне изменения параметров $p$ и $\lambda$, а именно $p \leq 1/4$ и $\lambda \geq 1$, нетрудно показать (в этом случае правые части в (23) и (25), очевидно, достигают своего максимума при $p = 1/4$ и $\lambda = 1$), что $R_2^0 < 0,987p$, а правая часть (23) допускает еще лучшую оценку $R_1^0 < 0,796p$. Заметим также, что для этих оценок ограничение снизу на $\lambda$ эквивалентно ограничению снизу на $n$. Точнее, если рассматривать ограничения типа $p \leq p^*$, $\lambda \geq \lambda^*$, то максимумы коэффициентов при $p$ в (23) и (25) будут такими же, как и при ограничениях $p \leq p^*, n \geq \lambda^*/p^*$, и достигаются в соответствующих крайних точках. Приведем равномерные оценки для $R_1^0$ и $R_2^0$ в некоторых типичных зонах изменения параметров $n$ и $p$:

1) в зоне $p \leq 1/4$ и $n \geq 10$ будет $R_1^0 < 0,780p$ и $R_2^0 < 0,867p$;

2) в зоне $p \leq 1/4, n \geq 100$ справедливы оценки $R_1^0 < 0,770p$ и $R_2^0 < 0,786p$.

Начиная со следующих по порядку $n \geq 1000$ равномерные по $p \leq 1/4$ оценки для рассматриваемых величин становятся практически неизменными (с указанной выше точностью). Можно считать, что в этой и следующих зонах $R_1^0 < 0,769p$ и $R_2^0 < 0,778p$.

Замечание. В [10] для рассматриваемого расстояния полной вариации получена оценка

$$\|P - Q\| \leq p\left(\frac{3}{2e} + \frac{14\sqrt{p}(3 - 2\sqrt{p})}{6(1 - \sqrt{p})^2}\right). \tag{26}$$

Понятно, что выражение $C(p) := 3/2e + O(\sqrt{p})$, стоящее в скобках в правой части (26), при достаточно малых $p$ будет несколько меньше, нежели величина

$$C_0(p, n) := \left(\frac{1}{2} + \frac{2p}{3n} + O(p^2)\right)^{1/2}$$

из (23). Поскольку функция $C(p)$ возрастает на интервале $(0, 1/4)$, то для получения соответствующих равномерных оценок нам достаточно вычислить значения этой функции в крайних правых точках рассматриваемых зон. Скажем, $C(1/4) = 9,885\ldots$, $C(0,1) = 4,288\ldots$, $C(0,01) = 1,358\ldots$, $C(0,001) = 0,782\ldots$ и, наконец, $C(0,0001) = 0,622\ldots$.

Но, как отмечено выше,

$$\max_{p \leq 1/4,\, n \geq 10} C_0(p, n) = 0,780\ldots, \qquad \max_{p \leq 1/4,\, n \geq 100} C_0(p, n) = 0,770\ldots.$$

Таким образом, некоторое улучшение оценок (26) по сравнению с (23) начинает проявляться лишь при значениях $p$ порядка $10^{-4}$. Но для таких $p$ задача уточнения константы в оценках вида $cp$ для рассматриваемого расстояния по вариации с точки зрения возможных приложений представляется малосодержательной.

## *ЛИТЕРАТУРА*


**1.** *Прохоров Ю. В.* Асимптотическое поведение биномиального распределения // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 3. С. 135–142.

**2.** *Le Cam L.* An approximation theorem for the Poisson binomial distribution // Pacific J. Math. 1960. V. 10, N 4. P. 1181–1197.

**3.** *Barbour A. D., Hall P.* On the rate of Poisson approximation // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 198. V. 95. P. 473–480.

**4.** *Barbour A. D., Holst L., Janson S.* Poisson approximation. New York: The Clarendon Press; Oxford Univ. Press, 1992. (Oxford Stud. Probab.; 2).

**5.** *Harremoës P., Ruzankin P. S.* Rate of convergence to Poisson law in terms of information divergence // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. V. 50, N 9. P. 2145–2149.

**6.** *Pinsker M. S.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. М.: Изд-во Академии наук, 1960.

**7.** *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964. Т. 1.

**8.** *Borisov I. S., Ruzankin P. S.* Poisson approximation for expectations of unbounded function of independent random variables // Ann. Probab. 2002. V. 30, N 4. P. 1657–1680.

**9.** *Deheuvels P., Pfeifer D.* A semigroup approach to Poisson approximation // Ann. Probab. 1986. V. 14, N 2. P. 663–676.

**10.** *Roos B.* Sharp constants in the Poisson approximation // Statist. Probab. Lett. 2001. V. 52, N 2. P. 155–168.


*Статья поступила 18 июня 2006 г., окончательный вариант — 25 июля 2007 г.*

Борисов Игорь Семенович,
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sibam@math.nsc.ru

Ворожейкин Иван Сергеевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090