Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 512.552.4

О ТОЖДЕСТВАХ В АЛГЕБРАХ КЛИФФОРДА

А. С. Гордиенко

Аннотация. Получены оценки на коразмерности и PI-экспоненту тождеств алгебр Клиффорда, построенных по квадратичной форме заданного ранга, указан крюк, в котором лежат кохарактеры алгебр Клиффорда, предъявлено тождество, которое выполнено в алгебрах Клиффорда заданного ранга, найдены полилинейные тождества минимальной степени для алгебр Клиффорда ранга 1.

Ключевые слова: алгебра Клиффорда, полиномиальное тождество, коразмерность, кохарактер, PI-экспонента.

Алгебры Клиффорда применяются во многих областях математики и теоретической физики. Так, например, в 1997 г. вышла книга А. А. Кецариса [1], в которой он предложил свой вариант единой теории взаимодействия. Действие стало векторной величиной — элементом алгебры действия. Там определялись волновая функция элементарной частицы, ее импульс и из законов умножения в алгебре действия путем дифференцирования выводились основные уравнения квантовой механики — уравнения Шредингера и Дирака. Кроме того, введена структура алгебры на пространстве-времени. В качестве алгебр действия и пространства-времени для электронов и других лептонов предложены алгебры Клиффорда.

Отсюда большой интерес вызывают тождества в алгебрах Клиффорда, так как, зная их, можно получить другие уравнения квантовой механики и попытаться их проинтерпретировать в рамках создаваемых теорий.

Ранее были исследованы тождества в алгебре Грассмана [2], которая является алгеброй Клиффорда нулевой квадратичной формы, и в алгебрах Клиффорда полного ранга (в более общем случае полупростых алгебр) [3–6].

В этой статье мы найдем полилинейные тождества минимальной степени для алгебр ранга 1, укажем крюк, в котором лежат кохарактеры алгебры Клиффорда заданного ранга r (и тем самым предъявим тождество, которое выполнено во всех алгебрах Клиффорда ранга r), получим оценки на коразмерности.

Определение. Алгебра $F\langle X\rangle$ всех многочленов от счетного набора некоммутирующих переменных $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ называется *свободной ассоциативной алгеброй* над полем F. Многочлен $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X\rangle$, $n \in \mathbb{N}$, называется *тождеством* для F-алгебры A, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_1, \dots, a_n \in A$.

Совокупность $\mathrm{Id}(A)$ тождеств алгебры A является T-идеалом в $F\langle X\rangle$. Известно [7], что в случае $\mathrm{char}\ F = 0$ всякое тождество эквивалентно конечному набору полилинейных тождеств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00485).

Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем F. Число

$$c_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$$

называется *n-й коразмерностью* алгебры A. Число

$$PI\exp(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$$

называется *PI-экспонентой алгебры* A. Согласно теореме Зайцева — Джамбруно [8] этот предел существует для любой ассоциативной алгебры и является целым числом. На $P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$ определена естественная структура FS_n-модуля. В силу теоремы Машке он раскладывается в прямую сумму неприводимых. Характер $\chi_n(A)$ представления группы S_n на пространстве $P_n/(P_n\cap\mathrm{Id}(A))$ называется *n-м кохарактером* алгебры A. Как известно, есть взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями S_n и разбиениями $\lambda \vdash n$ числа n на положительные слагаемые. По каждому разбиению λ можно построить диаграмму Юнга D_λ. Диаграмма, заполненная числами, называется *таблицей Юнга* T_λ. Ей отвечает квазиидемпотент $e_{T_\lambda} = \sum\limits_{\sigma\in C_{T_\lambda}, \rho\in R_{T_\lambda}} (-1)^\sigma \rho\sigma$.

Пусть $[x_1, x_2, \dots, x_k] = [\dots[[x_1, x_2], x_3], \dots, x_n]$. Многочлен вида $[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \times [x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_l}] \dots [x_{i_p}, \dots, x_{i_n}]$ называется *собственным.* Обозначим пространство собственных многочленов через B_n. Для всякого многочлена $f \in P_n$ существуют $f_{j_1,\dots,j_k}$ такие, что $f = \sum x_{j_1} \dots x_{j_k} f_{j_1,\dots,j_k}$, где $0 \le k \le n$, $j_1 < \dots < j_k$.

Понятно, что если A — алгебра с 1, то при подстановке 1 на место одной из переменных собственного многочлена последний обращается в нуль, поэтому если для всякого набора $x_{j_1}, \dots, x_{j_k}$ положить $x_{j_1} = \dots = x_{j_k} = 1$, а вместо остальных переменных взять произвольные элементы, то получим, что $f \in \mathrm{Id}(A)$, если и только если все $f_{j_1,\dots,j_k}$ принадлежат $\mathrm{Id}(A)$.

Положим

$$\mathrm{mindeg}\, A = \min\{n \mid P_n \cap \mathrm{Id}(A) \neq 0\}.$$

Пусть M — векторное пространство над полем F, $\dim M = m$, $Q(x)$ — квадратичная форма на M, $B(x, y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ — соответствующая ей билинейная форма, $\mathrm{rank}\, B = r$.

Пусть T — тензорная (свободная) алгебра с 1, построенная на M, I — ее идеал, порожденный элементами $x \otimes x - Q(x) \cdot 1$, $x \in M$.

Определение. Фактор-алгебра $C(m, r) = T/I$ называется *алгеброй Клиффорда* формы $Q(x)$.

Замечание 1. Понятно, что в $C(m, r)$ выполнено соотношение $xy + yx = B(x, y) \cdot 1$ для x, $y \in M$.

Замечание 2. Если $\mathrm{char}\, F \neq 2$, то квадратичную форму $Q(x)$ можно привести к диагональному виду, т. е. можно полагать, что $u_i^2 = \lambda_i \cdot 1 \neq 0$ при $1 \le i \le r$, $u_i^2 = 0$ при $r < i \le m$ и $u_i u_j = -u_i u_j$ при $i \neq j$. Более того, если поле F алгебраически замкнуто, то можно считать, что $\lambda_i = 1$ при $1 \le i \le r$.

Обозначим

$$C(\infty, r) = \mathrm{alg}\{1, u_1, \dots, u_r, v_{r+1}, \dots, v_n, \dots \mid u_i^2 = \alpha_i \cdot 1, v_k^2 = 0, u_i u_j = -u_j u_i, \\ v_k v_l = -v_l v_k, v_k u_i = -u_i v_k\},$$

все α_i принадлежат $F\backslash\{0\}$. Базис алгебры $C(\infty, r)$ состоит из элементов 1, $u_{i_1} \dots u_{i_s} v_{j_1} \dots v_{j_t}$, где $1 \le i_1 < \dots < i_s \le r$, $r + 1 \le j_1 < \dots < j_t$.

В силу замечания 2 существует естественное вложение $C(m, r) \subseteq C(\infty, r)$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $r \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда* $\operatorname{mindeg} C(2,1) = \operatorname{mindeg} C(3,1) = 4$, $\operatorname{mindeg} C(m,1) = 5$ *при* $m \geq 4$. *Кроме того, в* $C(\infty,1)$ *и, следовательно, в* $C(m,1)$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$ *выполнено тождество* $[[x_1,x_2],[x_3,x_4],x_5] \equiv 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{char} F = 0$ *и*

$$\chi_n(C(\infty,r)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda.$$

Тогда для всякого $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_s) \vdash n$ *такого, что* $m_\lambda \neq 0$, *выполнены условия:*
1) $\lambda_j \leq 2^{2r} + 2^r$ *при* $j > 2^r$;
2) $\lambda_j \leq 2^r$ *при* $j > 2^{2r} + 2^r$.

Следствие. *Для всякого* $\lambda \vdash n$, *не удовлетворяющего условиям* 1, 2 *теоремы* 2, *всякой таблицы* T_λ *и* $f \in P_n$ *многочлен* $e_{T_\lambda} f$ *принадлежит* $\operatorname{Id}(C(m,r))$, *где* $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Теорема 3. *Пусть* $\operatorname{char} F \neq 2$. *Тогда* $c_n(C(\infty,r)) \leq 2^{n(r+1)}$, *в том числе* $PI\exp(C(\infty,r)) \leq 2^{r+1}$.

Следствие. *Для всякого* $r \in \mathbb{Z}_+$ *существует полилинейное тождество* f, *которое выполнено в* $C(m,r)$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$, *откуда* $\operatorname{mindeg} C(m,r) \leq \deg f$ *для всех* $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Пусть* $\operatorname{char} F = 0$. *Тогда для всякого* $r \in \mathbb{Z}_+$ *существуют такие* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, *что* $c_n(C(\infty,r)) \geq Cn^a 2^{nr}$ *при* $n \in \mathbb{N}$.

Так как тождества и коразмерности сохраняются при расширении основного поля [7], а коэффициенты всех проверяемых тождеств лежат в простом подполе, то можно везде, где это требуется, считать F алгебраически замкнутым.

Определение. *Стандартным* называется многочлен

$$St_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}. \tag{1}$$

Как показано в [9], $\dim C(m,r) = 2^m$. Кроме того, если $r = m$, то $C(m,r) \cong M_{2^l}(F)$ при $m = 2l$ и $C(m,r) \cong M_{2^l}(F) \oplus M_{2^l}(F)$ при $m = 2l+1$. Отсюда вытекает

Лемма 1. *В* $C(m,m)$ *выполнено тождество* $St_{2^{[\frac{m}{2}]+1}} \equiv 0$ *и* $\operatorname{mindeg} C(m,m) = 2^{[\frac{m}{2}]+1}$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из теоремы Амицура — Левицкого [10].

Доказательство теоремы 1. При подстановке базисных элементов $[x,y]$ принимает значения в множестве $\{v_i, uv_j \mid i,j \in \mathbb{N}\} \cdot ZC(\infty,1)$, поэтому либо $[x_1,x_2]$ и $[x_3,x_4]$ коммутируют, либо $[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] \in ZC(\infty,1)$, откуда и следует тождество.

Очевидно, что в $C(2,1)$ выполнено тождество $[x_1,x_2][x_3,x_4] \equiv 0$. В силу леммы 1 в $C(3,3)$ выполнено тождество $St_4 \equiv 0$. При вычислении значения St_4 на некоторых из базисных элементов v_i, u, uv_i, v_1v_2, v_1v_2u алгебры $C(3,1)$, где $i = 1$, 2, а $v_1^2 = v_2^2 = 0$, $u^2 \neq 0$, мы либо сразу получим 0 из-за двух вхождений одного из v_i, либо будем пользоваться теми соотношениями, которые выполнены в $C(3,3)$, поэтому $St_4 \in \operatorname{Id}(C(3,1))$.

Отсюда для завершения доказательства достаточно показать, что в $C(2,1)$ нет собственных тождеств степени 3, а в $C(4,1)$ — степени 4.

Пусть $C(2,1) = \langle 1, u, v, uv \rangle$, $v^2 = 0$, $u^2 \neq 0$, и пусть $\alpha[x,y,z] + \beta[x,z,y] \equiv 0$. Тогда, подставив в последнее равенство $x = u$, $y = v$, $z = u$, убеждаемся, что $\alpha = 0$, подставив $x = u$, $y = u$, $z = v$ — что $\beta = 0$.

Пусть u, v_1, v_2, v_3 — образующие для $C(4,1)$, $u^2 \in F \cdot 1 \neq 0$ и в $C(4,1)$ выполнено собственное тождество f, $\deg f = 4$. Можно считать, что это сумма одночленов вида $[x_1, x_j][x_k, x_l]$, $k < l$, и вида $[x_1, x_j, x_k, x_l]$. Через α_g будем обозначать коэффициент при g. Если мы подставим $x_1 = u$, $x_j = uv_1$, $x_k = v_2$, $x_l = v_3$ для фиксированного $[x_1, x_j][x_k, x_l]$, то в тождестве обратятся в нуль все одночлены, кроме $[x_1, x_j][x_k, x_l]$, значит, $\alpha_{[x_1,x_j][x_k,x_l]} = 0$. Тем самым, двухкоммутаторные многочлены не входят в тождество. Подставим $x_1 = v_1$, $x_j = u$, $x_k = u$, $x_l = v_2$ для фиксированного $[x_1, x_j, x_k, x_l]$. Тогда не будут нулевыми только $[x_1, x_j, x_k, x_l]$ и $[x_1, x_k, x_j, x_l]$, причем их значения будут равны, значит, $\alpha_{[x_1,x_j,x_k,x_l]} = -\alpha_{[x_1,x_k,x_j,x_l]}$. Подставим $x_1 = u$, $x_j = v_1$, $x_k = u$, $x_l = u$. В этом случае ненулевые только $[x_1, x_j, x_k, x_l]$ и $[x_1, x_j, x_l, x_k]$, причем их значения будут равны, значит, $\alpha_{[x_1,x_j,x_k,x_l]} = -\alpha_{[x_1,x_j,x_l,x_k]}$. Отсюда

$$\alpha_{[x_1,x_j,x_k,x_l]} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 234 \\ jkl \end{pmatrix} \cdot \alpha_{[x_1,x_3,x_3,x_4]}.$$

Но если мы подставим $x_1 = u$, $x_2 = v_1$, $x_3 = u$, $x_4 = v_2$, то не будут нулевыми только $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ и $[x_1, x_4, x_3, x_2]$, причем их значения будут противоположны, значит, $\alpha_{[x_1,x_2,x_3,x_4]} = \alpha_{[x_1,x_4,x_3,x_2]}$. Таким образом, все коэффициенты нулевые.

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — набор (возможно, совпадающих) базисных элементов (произведений вида $u_{i_1} \ldots u_{i_k}$, $0 \leq k \leq m$, $i_1 < \cdots < i_k$) и $A_1 \ldots A_n \neq 0$. В силу замечания 2 любые два таких элемента либо коммутируют, либо антикоммутируют. Построим по этим элементам *граф коммутативности* с вершинами $A_1, \ldots, A_n$. Две вершины соединены ребром, если соответствующие элементы коммутируют. Покажем, что умножение вполне определяется такими графами.

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, $A_1, \ldots, A_n$ и $B_1, \ldots, B_n$ — наборы базисных элементов алгебры $C(\infty, r)$ с графами коммутативности G и H соответственно, причем между G и H существует такой изоморфизм, что $A_i \mapsto B_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда существует такое число $\gamma \in F$, что $f(A_1, \ldots, A_n) = \gamma A_1 \ldots A_n$ и $f(B_1, \ldots, B_n) = \gamma B_1 \ldots B_n$.*

Доказательство. Пусть $f = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}$. Заметим, что

$$A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \ldots A_{\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma A_1 A_2 \ldots A_n, \quad \varepsilon_\sigma = (-1)^s,$$

где $s \in \mathbb{Z}$ — число таких инверсий $\ldots A_j \ldots A_i \ldots$, $i < j$, что в графе G нет ребра $A_i A_j$. Тогда в силу изоморфизма будет

$$B_{\sigma(1)} B_{\sigma(2)} \ldots B_{\sigma(n)} = \varepsilon_\sigma B_1 B_2 \ldots B_n,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Если $f \in P_n$, то f — тождество, если и только если оно обращается в нуль при подстановке любых наборов базисных элементов. Обращение многочлена в нуль зависит только от графа коммутативности подставляемого набора элементов. Поэтому существование или отсутствие полилинейных тождеств степени n зависит только от запаса графов коммутативности всевозможных наборов из n базисных элементов. Кроме того, число c_n является рангом системы линейных уравнений на коэффициенты полилинейного тождества, а число уравнений в системе — число различных графов коммутативности с n вершинами. В силу сделанных выше замечаний достаточно подставлять только $2^r \cdot 2$ различных элементов (элементы v_j не различимы при помощи графов), поэтому число различных графов не превосходит $2^{n(r+1)}$. Ранг системы не превосходит числа уравнений, откуда и получаем требуемое утверждение.

Доказательство теоремы 4. Заметим, что $C(\infty, r)$ содержит подалгебры, изоморфные $C(m,r)$ для всех $m \geq r$. Радикалы алгебр $C(m,r)$ и $C(\infty,r)$ порождены элементами v_j (см. [11]). Если $r = 2k$, то $C(r,r)$ проста, $PI\exp(C(m,r)) = 2^r$. Если $r = 2k+1$, то $C(r,r) = Z \otimes C^{(0)}(r,r)$, где $Z = \langle 1, u_1 \ldots u_r \rangle$ — центр алгебры $C(r,r)$, а $C^{(0)}(r,r) \cong M_{2^k}(F)$ — четная компонента. Таким образом,

$$C(r,r) = \left(C^{(0)}(r,r) \frac{1 + u_1 \ldots u_r}{\sqrt{2}} \right) \oplus \left(C^{(0)}(r,r) \frac{1 - u_1 \ldots u_r}{\sqrt{2}} \right).$$

Кроме того, в алгебре $C(r+1,r)$ с дополнительным порождающим v выполнено

$$\frac{1 + u_1 \ldots u_r}{\sqrt{2}} v \frac{1 - u_1 \ldots u_r}{\sqrt{2}} = v \left(\frac{1 - u_1 \ldots u_r}{\sqrt{2}} \right)^2 \neq 0,$$

т. е. опять $PI\exp(C(r+1,r)) = 2^r$, откуда в силу теоремы Зайцева — Джамбруно [8] следует требуемая оценка.

Доказательство теоремы 2. Пусть $m_\lambda > 0$ для некоторого $\lambda \vdash n$. Тогда существует $f \in P_n$ такой, что $e_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}(C(\infty,r))$, где T_λ — некая таблица Юнга. Многочлен $e_{T_\lambda} f$ симметричен по переменным каждой строчки в T_λ, кроме того, существуют такие $f_1, \ldots, f_t \in P_n$ и таблицы $T_\lambda^{(1)}, \ldots, T_\lambda^{(t)}$, что $e_{T_\lambda} f = \sum\limits_{k=1}^{t} f_k$ и каждый f_j кососимметричен по переменным каждого столбца в $T_\lambda^{(j)}$.

Пусть условие 1 не выполнено. Тогда $\lambda_{2^r+1} > 2^{2r} + 2^r = 2^r(2^r+1)$. Так как $e_{T_\lambda} f \notin \mathrm{Id}(C(\infty,r))$, то существует набор базисных элементов без ограничения общности вида $u_{i_1} \ldots u_{i_p}$ и $u_{i_1} \ldots u_{i_p} v_k$, при подстановке которого вместо $x_1, \ldots, x_n$ многочлен $e_{T_\lambda} f$ не обращается в нуль. В том числе существует j такой, что f_j не обращается в нуль. В силу косой симметрии по переменным столбцов $T_\lambda^{(j)}$ и того, что число базисных элементов вида $u_{i_1} \ldots u_{i_p}$ равно 2^r, вместо переменных каждого из первых $2^r(2^r+1)+1$ столбцов таблицы $T_\lambda^{(j)}$ подставляется как минимум $h - 2^r$ элементов вида $u_{i_1} \ldots u_{i_p} v_k$, где h — высота соответствующего столбца. Вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ подставляется не менее $2^r(2^r+1) + 1 + \sum\limits_{k=2^r+2}^{s} \lambda_k$ элементов вида $u_{i_1} \ldots u_{i_p} v_k$. Поэтому в исходной таблице T_λ есть строчка с номером $1 \leq \alpha \leq 2^r + 1$, вместо переменных которой подставляется не менее $2^r + 1$ элементов вида $u_{i_1} \ldots u_{i_p} v_k$, т. е. есть два элемента $u_{j_1} \ldots u_{j_q} v_k$ и $u_{j_1} \ldots u_{j_q} v_j$, $j \neq k$, которые подставляются в одну строчку. Если их поменять местами, то значение $e_{T_\lambda} f$ поменяет знак. Но $e_{T_\lambda} f$ симметричен по строчкам T_λ, откуда его значение равно нулю; приходим к противоречию.

Пусть не выполнено условие 2, т. е. $\lambda_{2^r(2^r+1)+1} \geq 2^r + 1$. Аналогично пусть $a_1, \ldots, a_n$ — набор базисных элементов такой, что $e_{T_\lambda} f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Тогда в силу симметрии $e_{T_\lambda} f$ по строчкам в каждую строчку подставляется не более 2^r элементов вида $u_{i_1}\dots u_{i_p}v_k$. Поэтому в $x_1, \dots, x_n$ подставляется не менее $\sum\limits_{k=1}^{\ell}(\lambda_k - 2^r - 1) + \ell$ элементов вида $u_{i_1}\dots u_{i_p}$, где $\ell = \max\{k \mid \lambda_k > 2^r\}$, $\ell \geq 2^r(2^r+1)+1$. Отсюда для каждой $T_\lambda^{(j)}$ существует столбец с номером $1 \leq \alpha \leq 2^r+1$, вместо переменных которого подставляется не менее 2^r+1 элементов вида $u_{i_1}\dots u_{i_p}$. Число различных таких элементов равно 2^r, следовательно, есть совпадающие. Поэтому в силу косой симметрии f_j по столбцам $T_\lambda^{(j)}$ все $f_j(a_1,\dots,a_n)$ равны нулю, т. е. $e_{T_\lambda}f(a_1,\dots,a_n)=0$; опять приходим к противоречию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кецарис А. А.* Алгебраические основы физики. Пространство-время и действие как универсальные алгебры. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
2. *Krakowski D., Regev A.* The polynomial identities of the Grassmann algebra // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 429–438.
3. *Drensky V. S.* Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras // J. Algebra. 1984. V. 91, N 1. P. 1–17.
4. *Formanek E.* Invariants and the ring of generic matrices // J. Algebra. 1984. V. 89, N 1. P. 178–223.
5. *Procesi C.* Computing with 2×2 matrices // J. Algebra. 1984. V. 87, N 2. P. 342–359.
6. *Regev A.* Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal // Israel J. Math. 1984. V. 47, N 2–3. P. 246–250.
7. *Drensky V. S.* Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra. Singapore: Springer-Verl., 2000.
8. *Giambruno A., Zaicev M. V.* Exponential codimension growth of PI algebras: An exact estimate // Adv. Math. 1999. V. 142, N 2. P. 221–243.
9. *Chevalley C.* The algebraic theory of spinors and Clifford algebras. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1997.
10. *Rosset S.* A new proof of the Amitsur–Levitski identity // Israel J. Math. 1976. V. 23, N 2. P. 187–188.
11. *Delanghe R.* On the center and the radical of a Clifford algebra // Simon Stevin. 1968/69. V. 42. P. 123–131.

Статья поступила 13 июня 2006 г.

Гордиенко Алексей Сергеевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры,
Ленинские горы, Москва 119992
gordienko_a_s@mail.ru