Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 512.816

О ФИНСЛЕРОВЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ВНУТРЕННИХ МЕТРИКАХ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И СИЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ В АЛГЕБРАХ ЛИ

В. В. Горбацевич

Аннотация. Изучаются алгебраические условия, при которых все внутренние метрики на однородном пространстве являются финслеровыми. Эти условия были впервые найдены В. Н. Берестовским в терминах алгебр Ли и их подалгебр (соответствующие подалгебры называются в статье сильными).

Получено описание строения сильных подалгебр в полупростых и в разрешимых алгебрах Ли, а также в алгебрах Ли общего вида. Получены также некоторые результаты о максимальных сильных подалгебрах и о тех алгебрах Ли, которые имеют хотя бы одну сильную подалгебру.

Ключевые слова: инвариантная метрика на однородном пространстве, внутренняя метрика, финслерова метрика, сильная подалгебра.

Введение

Статья посвящена изучению алгебраических условий, при которых все внутренние метрики на однородном пространстве группы Ли являются финслеровыми. Эти условия впервые найдены и проиллюстрированы в нескольких интересных, но весьма частных случаях в статье В. Н. Берестовского [1].

Пусть X — некоторое метрическое пространство с метрикой $d = d(x, y)$. Для произвольной непрерывной кривой $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$ ее длину $|\gamma|$ положим равной $\sup\limits_{x_i \in \gamma} \sum d(x_i, x_{i+1})$, где $x_i = \gamma(t_i)$, а $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ — точки отрезка $[\alpha, \beta]$. Если $|\gamma| < \infty$, то кривая называется *спрямляемой*; в дальнейшем мы будем рассматривать только спрямляемые кривые.

На метрическом пространстве X можно ввести новую метрику, используя длины кривых: $d_1(x, y) = \inf\limits_{\{\gamma\}} |\gamma|$, где $\{\gamma\}$ — множество спрямляемых кривых, соединяющих точки x и y. В дальнейшем у нас X всегда будет гладким многообразием, а в этом случае для гладких метрик на них спрямляемые кривые, соединяющие любые две заданные точки, всегда существуют. Поэтому получаем метрику d_1, отличную, вообще говоря, от метрики d. Например, если на сфере $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ в качестве d взять метрику, индуцированную евклидовой метрикой на $\mathbf{R}^3$ (в этой метрике расстояния измеряются по отрезкам прямых), то метрика d_1 совпадает с римановой метрикой на сфере (это метрика, в которой расстояния

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00647).

измеряются по дугам больших кругов). Поэтому здесь $d_1(x, y) \neq d(x, y)$ для любых точек $x \neq y$. Так же $d_1 \neq d$ будет и для почти любой гиперповерхности $S \subset \mathbf{R}^{n+1}$, есть и много других примеров такого рода.

Определение. Метрика d на метрическом пространстве X называется *внутренней*, если $d_1 = d$ (есть и другие эквивалентные варианты определения, см. [2]).

Рассмотрим некоторые примеры внутренних метрик.

1. Римановы метрики на многообразиях всегда внутренние (по самому своему построению).

2. Финслеровы метрики, т. е. метрики, порожденные финслеровой структурой (см., например, [3]), тоже всегда внутренние в силу своего определения. Например, интересны следующие финслеровы метрики.

(1) $(\Sigma(dx_i)^4)^{1/4}$ — такого рода «метрику» (точнее, норму и порожденную ею метрику) на $\mathbf{R}^n$ предлагал рассматривать еще Риман в своем классическом докладе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Более того, можно рассматривать любые финслеровы структуры вида $(T_4(dx))^{1/4}$, где T_4 — произвольная положительно определенная форма четвертой степени, а также и более сложные.

(2) Левоинвариантные финслеровы метрики на группах Ли G (они задаются симметричными выпуклыми телами C с непустой внутренностью, расположенными в алгебре Ли $L(G)$).

Пусть M — некоторое гладкое многообразие с внутренней метрикой d. Тогда группа изометрий $\mathrm{Iso}(M, d)$ является группой Ли.

Определение. *Однородным пространством с внутренней метрикой* называется такое многообразие M с внутренней метрикой d, что естественное действие группы Ли $\mathrm{Iso}(M, d)$ на M транзитивно.

По-другому (но эквивалентно) это понятие определяется так: существует группа Ли изометрий многообразия M, транзитивная на M.

Для однородного пространства M с внутренней метрикой имеем его представление в виде G/L, где G — некоторая группа Ли, а L — стационарная подгруппа, причем обязательно компактная.

В [4] доказано, что локально компактное однородное метрическое пространство с внутренней метрикой есть проективный предел однородных многообразий с внутренней метрикой, что дает нам основания ограничиться рассмотрением случая многообразий с внутренней метрикой.

Приведем некоторые примеры однородных пространств с внутренней метрикой.

1. Римановы однородные многообразия.

2. Финслеровы однородные многообразия, например группы Ли с левоинвариантными финслеровыми структурами (порожденными выпуклыми телами $C \subset L(G)$) группы Ли G.

В [1, ч. II] доказано, в частности, следующее фундаментальное для нас утверждение.

Теорема 1. *На однородном пространстве $M = G/L$ (где G — связная группа Ли, а L — ее связная компактная подгруппа) любая инвариантная внутренняя метрика является финслеровой тогда и только тогда, когда пара (g, l) соответствующих алгебр Ли удовлетворяет условию:*

($*$) *любое подпространство в g, содержащее l и инвариантное относительно l, является подалгеброй.*

В. Н. Берестовским рассматривался и более общий случай, когда стационарная подгруппа компактна, но не обязательно связна. Здесь финслеровость всех внутренних метрик связана с условием интегрируемости всех инвариантных распределений на однородном пространстве.

Условие ($*$) естественно называть *условием Берестовского*, компактные подалгебры l в алгебре Ли g, для которых выполнено условие ($*$), — *подалгебрами Берестовского*, однако мною предлагается более образное название — *сильная подалгебра*. Подалгебра Ли называется сильной, если для нее выполнено условие ($*$), причем соответствующая ей подгруппа Ли (в заданной группе Ли с алгеброй Ли g) компактна (это дополнительное условие ориентировано на геометрические приложения, но при чисто алгебраическом исследовании его можно было бы исключить). Смысл «силы» подалгебры l в том, что она «дает» алгебраическую структуру (т. е. структуру подалгебры Ли) любому подпространству в g, ее содержащему и инвариантному относительно нее. Кстати, подалгебры, не являющиеся сильными, не следует называть слабыми (термин «слабая подалгебра» уже использовался ранее в самых различных смыслах). Связную компактную подгруппу L в группе Ли G назовем *сильной*, если сильной является соответствующая этой подгруппе Ли подалгебра Ли $l \subset g$ (можно дать и прямое определение в групповых терминах, не переходя к алгебрам Ли).

В данной статье изучается структура сильных подалгебр и содержащих их алгебр Ли. Этим выполняется пожелание, сформулированное в [1]. Описание структуры сильных подалгебр дано в теореме 7, для полупростых алгебр Ли их сильные подалгебры рассмотрены в § 2, а для разрешимых групп Ли сильные подгруппы изучены в § 4. Кроме того, в приложении приведено одно замечание об инвариантных финслеровых метриках на группах Ли, подобных тем, о которых упомянул в своей лекции Риман.

Алгебру Ли, которая имеет хотя бы одну сильную подалгебру, будем называть *взрослой алгеброй Ли.* Название это связано с тем, что сильная подалгебра — это что-то вроде ядра (аналог ядра в биологической клетке). Наличие же сформировавшегося ядра говорит о своего рода «взрослости» того или иного объекта или системы.

Автор благодарен рецензенту за целый ряд очень полезных замечаний, в частности, за указание на работу [5], в которой доказана с точностью до терминологии теорема 3 (отсутствовавшая в первоначальном варианте статьи), что позволило значительно дополнить результаты данной статьи.

§ 1. Предварительные рассмотрения

Изучение сильных подалгебр начнем с нескольких примеров, приведенных в [1, ч. I].

I. Если $l = \{0\}$, то условие Берестовского ($*$) для алгебры Ли g эквивалентно тому, что любое подпространство в g является подалгеброй Ли. Такого рода алгебры Ли были описаны Милнором [6]. Это с точностью до изоморфизма

(i) абелевы алгебры Ли;

(ii) алгебры Ли вида $L_n = \mathbf{R} +_\phi \mathbf{R}^{n-1}$ — полупрямые суммы, задаваемые гомоморфизмами $\phi : \mathbf{R} \to \mathrm{End}(\mathbf{R}^{n-1})$, для которых $\phi(1) = E_{n-1}$ — единичная матрица.

Мы видим, что в любой размерности ≥ 2 существуют ровно две алгебры Ли, имеющие тривиальную сильную подалгебру.

Замечания. 1. Алгебры Ли L_n иногда называют *гиперболическими*, так как соответствующие им группы Ли G_n, будучи снабженными инвариантной римановой метрикой, изометричны пространствам Лобачевского Λ^n. Милнор в [6] доказал, что кривизна этих инвариантных метрик всегда отрицательна, а Вольф [7] вывел отсюда изометричность G_n и Λ^n.

2. Группа Ли G_n порождена параллельными переносами пространства $\mathbf{R}^{n-1}$ и его гомотетиями, тем самым G_n естественным образом может рассматриваться как группа аффинных преобразований пространства $\mathbf{R}^{n-1}$.

3. Алгебра Ли $L_n \oplus \mathbf{R}$, алгебраически мало отличающаяся от L_n, уже не удовлетворяет условию Берестовского. Условие Берестовского не является аддитивным, т. е. не выдерживает, вообще говоря, образования прямых сумм.

II. Если (G, L) — риманова симметрическая пара (т. е. G/L — риманово симметрическое пространство), то, как отмечено в [1], соответствующая пара алгебр Ли (g, l) удовлетворяет условию $(*)$ (это фактически есть классический результат теории симметрических пространств).

III. Пусть $M = G/L$ — строго изотропно неприводимое однородное пространство, т. е. такое, что естественное представление алгебры Ли l на пространстве g/l (отождествляемом с касательным пространством многообразия M) неприводимо. Тогда легко понять, что пара алгебр Ли (g, l) (которую называют *изотропно неприводимой*) удовлетворяет условию $(*)$. Такие пространства для нас особенно интересны. В дальнейшем окажется, что и при общем описании сильных подалгебр они будут играть очень важную роль. Рассмотрим разложение Леви $G = S \cdot R$ группы Ли G, здесь R — радикал связной группы Ли G, а S — ее полупростая часть (фактор Леви). Из строгой изотропной неприводимости однородного пространства G/L легко выводится, что должно быть $R = \{e\}$, т. е. $G = S$ — полупростая группа Ли.

Вот некоторые конкретные примеры строго изотропно неприводимых однородных пространств. Во-первых, это все симметрические пространства. Еще — это однородные пространства (несимметрические) ортогональных групп, имеющие вид $SO(\dim(L))/L$, где L — произвольная простая группа Ли, вложенная в $SO(\dim(L))$ с помощью присоединенного представления. Есть и другие серии строго изотропных несимметрических однородных пространств, а также немало «особых» однородных пространств (в том числе и однородных пространств особых простых компактных групп Ли — подробнее см. [7]).

Сформулируем некоторые общие свойства сильных подалгебр. Их доказательства почти очевидны и потому не приводятся.

1. Если l — сильная подалгебра в алгебре Ли g, а $l' \supset l$ — содержащая ее подалгебра, то l' тоже будет сильной подалгеброй в g.

2. Если l — сильная подалгебра в алгебре Ли g, а g' — подалгебра в g, содержащая l, то l будет сильной подалгеброй и в g'.

3. Подалгебра Ли l алгебры Ли g является сильной подалгеброй тогда и только тогда, когда она будет сильной подалгеброй в любой максимальной подалгебре алгебры Ли g, содержащей l.

Сформулируем теперь некоторые естественные вопросы, ответы на которые было бы интересно получить в связи с понятием сильной подалгебры Ли.

1. Какие алгебры Ли имеют хотя бы одну собственную сильную подалгебру Ли (т. е. являются взрослыми)? Из сказанного выше видно, что взрослыми

будут все полупростые алгебры Ли. Для случая разрешимых g частичный ответ будет дан ниже (§ 4).

2. Дать описание всех пар (g, l) для сильной l. Это очень непростая задача. Частичный ответ дается ниже (в частности, в § 3).

3. Каковы максимальные сильные подалгебры в заданной алгебре Ли? Ответ на этот вопрос будет дан ниже (§ 2, 3).

4. Каковы минимальные сильные подалгебры в заданной алгебре Ли? В данном случае речь идет именно о минимальных, а не о наименьших подалгебрах. Наименьшей сильной подалгебры, т. е. содержащейся во всех других сильных подалгебрах заданной алгебры Ли, обычно не существует. Например, если g — простая некомпактная алгебра Ли, то сильными в ней будут только максимальные компактные подалгебры. Все такие подалгебры сопряжены между собой, но вот их пересечение вполне может оказаться тривиальным. Поэтому если бы здесь существовала наименьшая сильная подалгебра, то она должна была бы быть тривиальной. Но алгебры Ли, имеющие тривиальные сильные подалгебры, описаны выше (пример I) — среди них простых алгебр Ли нет.

§ 2. Сильные подалгебры в полупростых алгебрах Ли

Здесь мы рассмотрим свойства и описание сильных подалгебр в полупростых алгебрах Ли. Случаи сильных подалгебр в разрешимых алгебрах Ли и в алгебрах Ли общего вида будут рассмотрены в следующих параграфах.

Напомним, что любая полупростая алгебра Ли распадается в прямую сумму простых алгебр Ли, называемых ее *простыми факторами* (которые с точностью до порядка определены исходной полупростой алгеброй Ли однозначно). Если среди этих факторов нет компактных алгебр Ли, то говорят, что g *без компактных факторов*.

Теорема 2. *Пусть g — полупростая алгебра Ли без компактных факторов. Если l — сильная собственная подалгебра в g, то l — максимальная компактная подалгебра в g.*

Доказательство. Сильная подалгебра l по условию компактна. Пусть $k \supset l$ — максимальная компактная подалгебра алгебры Ли g, содержащая l. Имеется разложение Картана $g = k + m$, где m — подпространство, дополнительное к k, причем $[m, m] \subset k$. Более того, так как (g, k) — симметрическая пара, то $[m, m] = k$ (см. доказательство в [7], восходящее к А. Борелю, а также [8, упражнение 2, с. 280]).

Рассмотрим подпространство $h = l + m$. Оно содержит l и инвариантно относительно присоединенного действия l на g. Так как по условию l — сильная подалгебра, подпространство h должно быть подалгеброй в g. Но тогда $[m, m] \subset h$ и потому $k = [m, m]$ — подалгебра в h. Так как в разложении Картана $k \cap m = \{0\}$, то $l = k$, т. е. l — действительно максимальная компактная подалгебра в g.

В силу теоремы 2 вопрос о сильных подалгебрах в полупростых алгебрах Ли, не имеющих компактных факторов, исчерпан, если учесть, что максимальная компактная подалгебра в полупростой алгебре Ли всегда является сильной подалгеброй (см. пример II выше). Переходим к рассмотрению сильных подалгебр в компактных алгебрах Ли.

В. Н. Берестовским в [5] получены результаты, из которых мгновенно выводится следующий общий результат.

Теорема 3 [5]. *Подалгебра l в компактной полупростой алгебре Ли g является сильной тогда и только тогда, когда существуют такие разложения в прямые суммы*

$$g = g_1 \oplus g_2 \oplus \dots g_n, \quad l = l_1 \oplus l_2 \oplus \dots l_n, \quad l_i \subset g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

что все пары (g_i, l_i) изотропно неприводимы.

При этом если пара (g_i, l_i) не симметрична, то алгебра Ли g_i обязательно будет простой, в общем же случае g_i может быть или простой или же прямой суммой двух изоморфных между собой простых алгебр Ли.

Классификация изотропно неприводимых пар хорошо известна. Она получена в рамках описания строго изотропно неприводимых римановых однородных многообразий в работах О. В. Мантурова [9] и Вольфа [10] (в обеих работах имелись небольшие неточности; исправленный список приведен в книге [11]). Поэтому в принципе задача классификации сильных подалгебр в компактных полупростых алгебрах Ли в силу теоремы 3 тоже решена. Однако при применениях этой теоремы для конкретизации специальных свойств сильных подалгебр приходится подчас использовать довольно непросто доказываемые классификационные результаты. Поэтому ниже мы приведем некоторые несложно доказываемые (причем чисто алгебраически) утверждения о сильных подалгебрах в компактных полупростых алгебрах Ли, которые на самом деле в значительной своей части могут быть выведены и из общего результата — из теоремы 3.

По аналогии с определениями, данными Е. Б. Дынкиным [12] для полупростых комплексных алгебр Ли и их подалгебр, введем понятия R- и S-подалгебр в компактных алгебрах Ли.

Определение. Подалгебра Ли l в компактной алгебре Ли k называется *R-подалгеброй*, если она содержится в некоторой собственной регулярной подалгебре алгебры Ли g. Подалгебра Ли, не являющаяся R-подалгеброй, называется *S-подалгеброй.*

Всякая регулярная подалгебра Ли компактной алгебры Ли содержится в некоторой подалгебре Ли максимального ранга (подалгебры же максимального ранга допускают, как известно, достаточно явное перечисление, см., например, [7, 8]). А так как любая подалгебра Ли максимального ранга является регулярной, то определение R-подалгебры можно переформулировать так: подалгебра Ли в компактной алгебре Ли называется *R-подалгеброй*, если она содержится в некоторой собственной подалгебре максимального ранга.

Отметим, что в [13, гл. 9] фигурирует понятие сети, которое является прямым групповым аналогом понятия S-подалгебры. *Сетью* называется связная подгруппа L компактной группы Ли K, которая не содержится ни в какой собственной связной подгруппе максимального ранга. В [13] содержатся некоторые сведения о свойствах сетей, включая их описания в терминах корней компактных групп Ли. Например, доказано, что связная подгруппа L в K будет сетью тогда и только тогда, когда ее централизатор $Z_K(L)$ совпадает с центром $Z(K)$ группы Ли K. В частности, для сети L имеем $Z(L) = L \cap Z(K)$.

Теорема 4. *Пусть l — сильная подалгебра в компактной классической простой алгебре Ли g. Если l является R-подалгеброй, то она есть максимальная подалгебра максимального ранга в g.*

Доказательство. Так как l — R-подалгебра, она содержится в некоторой подалгебре Ли u максимального ранга, причем можно считать, что u —

максимальная подалгебра максимального ранга. Поскольку g — классическая компактная алгебра Ли, то пара (g, u) в силу максимальности подалгебры u симметрична (см. [7]). Но тогда имеется разложение $g = u + m$, где подпространство m таково, что $[m, m] = u$ [7].

Положим $h = l + m$. Это подпространство содержит подалгебру Ли l и инвариантно относительно нее. Так как l — сильная подалгебра, это подпространство должно быть подалгеброй Ли. В частности, имеем $[m, m] = u \subset l$, а потому $l = u$ — максимальная подалгебра максимального ранга.

Замечания. 1. Утверждение теоремы 4 верно и для прямых сумм классических простых компактных алгебр Ли при условии, что сильная подалгебра l эффективна, т. е. не содержит идеалов алгебры Ли g.

2. В теореме 4 используется утверждение о том, что максимальные подалгебры максимального ранга в классических простых алгебрах Ли симметричны. К сожалению, для особых алгебр Ли это утверждение уже неверно, тут имеется немало контрпримеров, например, подалгебра типа A_2 в G_2, а также подалгебра типа A_8 в E_8 и др. (полный список приведен в [7]). Эти контрпримеры тесно связаны с неинтегрируемыми инвариантными почти комплексными структурами на простых компактных группах Ли.

Кроме того, существуют и симметрические пары (g, l), в которых подалгебра l простой компактной алгебры Ли g не обязательно имеет максимальный ранг (эйлерова характеристика соответствующих симметрических пространств равна нулю, а инволюции, соответствующие таким симметрическим пространствам, не являются внутренними). Например, таковыми являются пары

$$(su(n), so(n)), \quad (so(p,q), so(p) \oplus so(q)), \quad (E_6, F_4)$$

и др. (полный список приведен в [7]).

3. Существуют изотропно неприводимые пары (g, l), которые не симметрические (см. списки такого рода в [9–11]).

Теперь рассмотрим более подробно максимальные сильные подалгебры в простых компактных алгебрах Ли.

Описание максимальных сильных подалгебр в простых компактных алгебрах Ли разбивается на две части. Известно, что любая максимальная подалгебра в простой компактной алгебре Ли либо является подалгеброй максимального ранга, либо полупроста (причем весьма специального вида). Описание полупростых максимальных подалгебр в компактных простых алгебрах Ли фактически получено Дынкиным (он рассматривал простые комплексные алгебры Ли, что с использованием стандартного приема оказывается эквивалентным рассмотрению компактных простых алгебр Ли).

Пусть l — сильная подалгебра в компактной простой алгебре Ли g. Рассмотрим некоторую максимальную подалгебру $u \subset g$, содержащую l. Ясно, что u тоже будет сильной подалгеброй (см. § 1 выше). Если l является R-подалгеброй, то можно считать, что u — подалгебра максимального ранга. Если же l — S-подалгебра, то u — полупростая максимальная подалгебра Ли.

Предложение 1. *Максимальная подалгебра l алгебры Ли g является сильной тогда и только тогда, когда пара (g, l) изотропно неприводима.*

Доказательство. Пусть h — некоторое собственное подпространство в g, содержащее l и инвариантное относительно действия l. Если l — сильная подалгебра, то это подпространство h должно быть собственной подалгеброй в

g, содержащей l. Но это противоречит максимальности подалгебры h. Поэтому указанных инвариантных подпространств h не существует, что, как нетрудно понять, эквивалентно изотропной неприводимости пары (g, l).

Тем самым задача описания максимальных среди сильных подалгебр в простых компактных алгебрах Ли решена практически полностью. Один частный случай — описание трехмерных максимальных сильных подалгебр в классических простых компактных алгебрах Ли — будет подробно разобран ниже. На самом деле из [9, 10] (с учетом теоремы 3) без труда выводится и описание максимальных сильных подалгебр в произвольных полупростых компактных алгебрах Ли, но мы на этом останавливаться не будем.

Перейдем к рассмотрению некоторых классов сильных подалгебр в простых компактных алгебрах Ли. Вначале докажем, что сильные подалгебры обладают специальными свойствами (что дает нам необходимые условия для того, чтобы компактная подалгебра была сильной, которые, однако, далеки от достаточных). Эти результаты (доказываемые весьма несложно) можно, конечно, вывести и из фундаментальной теоремы 3, но здесь нас будут интересовать по мере возможности прямые доказательства.

Теорема 5. *Пусть l — сильная подалгебра в простой компактной алгебре Ли g. Тогда*

(i) *алгебра Ли l неабелева или же $g = su(2), l = so(2)$.*

(ii) *фактор-алгебра $N_g(l)/l$ нормализатора $N_g(l)$ подалгебры l абелева.*

Доказательство. (i) Предположим, что сильная подалгебра l абелева. Рассмотрим разложение

$$g = l \oplus \big(\bigoplus V_i\big)$$

алгебры Ли g в прямую сумму подалгебры l и корневых подпространств V_i относительно ее присоединенного действия на g. Так как l абелева и компактна, то $\dim V_i \leq 2$.

Докажем, что на самом деле $\dim V_i = 2$ при всех i. Предположим, что это не так и для некоторого значения i (мы можем считать, что $i = 1$) соответствующее корневое подпространство одномерно. Рассмотрим подпространство $l \oplus \big(\bigoplus\limits_{i \geq 2} V_i\big)$. Оно инвариантно относительно l и имеет в g коразмерность 1. Так как l по условию — сильная подалгебра, это подпространство должно быть подалгеброй, причем коразмерности 1. Однако в простых компактных алгебрах Ли не существует подалгебр коразмерности 1. Известно много различных доказательств этого факта как чисто алгебраических, так и топологических и др. Например, это утверждение фактически эквивалентно тому, что на окружности S^1 не существует транзитивных действий компактных простых групп Ли, что, в свою очередь, мгновенно вытекает из рассмотрения точной гомотопической последовательности естественного расслоения $C \to K \to K/C = S^1$ (где C — стационарная подгруппа транзитивного действия K на S^1). Так или иначе мы приходим к противоречию с нашим предположением о том, что $\dim V_1 = 1$.

Итак, имеем $\dim V_i = 2$ при всех i. Снова рассмотрим подпространство $l \oplus \big(\bigoplus\limits_{i \geq 2} V_i\big)$ и теми же рассуждениями, как выше, получим, что оно является подалгеброй, но теперь уже коразмерности 2. Для простых компактных алгебр Ли только одна из них имеет подалгебру коразмерности 2. Это трехмерная алгебра Ли $g = su(2)$, причем она единственна с точностью до сопряжения и ее можно считать совпадающей с $so(2)$). Факт об отсутствии подалгебр коразмерности 2 в других простых компактных алгебрах Ли тоже можно доказывать несколькими разными способами. Топологическое доказательство основано на том, что на двумерной сфере S^2 только одна простая односвязная компактная группа Ли $SU(2)$ может действовать транзитивно. Доказательство этого факта тоже проводится путем рассмотрения точной гомотопической последовательности расслоения и некоторых дополнительных сведений о компактных группах Ли и их однородных пространствах (подробнее об этом см., например, [13]).

Можно дать и другое доказательство утверждения (i) для случая, когда алгебра Ли g классическая. Если подалгебра Ли l абелева, то она содержится в некотором максимальном торе, а значит, регулярна. Поэтому она является R-подалгеброй. Тогда в силу теоремы 2 l должна быть максимальной подалгеброй максимального ранга. Из описания всех такого рода подалгебр видно, что она может быть абелевой в одном единственном случае — когда $g = su(2)$, причем тогда $l = so(2)$.

(ii) Пусть $f = N_g(l)/l$ — некоторая алгебра Ли. В ней $\{0\}$ является сильной подалгеброй. Для доказательства этого заметим, что если h — подпространство в f, то его прообраз при естественном эпиморфизме $N_g(l) \to N_g(l)/l$ будет l-инвариантным подпространством в g, поэтому должен быть подалгеброй (так как l — сильная подалгебра). Тогда образ этой подалгебры, совпадающий с h, будет подалгеброй в f.

Алгебры Ли, для которых $\{0\}$ является сильной подалгеброй, как уже отмечалось выше, перечислены в [6] (см. пример I). Так как f — компактная алгебра Ли, то она не может быть изоморфной алгебре Ли L_n. Но тогда для f остается единственная возможность: она должна быть абелевой, что и доказывает утверждение (ii).

Теперь рассмотрим сильные подалгебры малой размерности в компактных простых алгебрах Ли.

Как уже отмечено, нулевая подалгебра не может быть сильной в компактной простой алгебре Ли g. Более того, и подалгебры размерностей 1 и 2 (которые, очевидно, могут быть только абелевыми) тоже не могут быть сильными (в силу теоремы 4) в таких g, за единственным исключением — одномерной сильной подалгебры $so(2)$ в трехмерной алгебре Ли $su(2)$.

Переходим поэтому к рассмотрению максимальных трехмерных сильных подалгебр. Любая такая подалгебра изоморфна алгебре Ли $su(2)$ (или, что эквивалентно, алгебре Ли $so(3)$). Отметим, что в классических алгебрах Ли такая подалгебра задается подходящим линейным представлением ϕ алгебры Ли $su(2)$.

Теорема 6. *Максимальную сильную подалгебру, изоморфную* $su(2)$, *имеют только три простых компактных алгебры Ли:* $su(3), sp(2)(\simeq so(5))$ *и особая компактная алгебра Ли* G_2 (*размерности этих алгебр Ли равны* 8, 10 *и* 14 *соответственно*). *Вложения подалгебры суть неприводимые представления.*

Доказательство. В силу сказанного выше (или на основе теоремы 3) для доказательства достаточно изучить список изотропно неприводимых пар (g, l) из [11] и выделить те пары, для которых $l = su(2)$. При этом получается то утверждение, которое приведено в формулировке доказываемой теоремы.

Отметим, что трехмерные простые сильные подалгебры Ли всегда будут минимальными среди сильных алгебр Ли. Это вытекает из теоремы 4, так как любая собственная подалгебра в $su(2)$ абелева и потому не может в силу теоремы 4(i) быть сильной подалгеброй в простой алгебре Ли.

Рассмотрим теперь сильные подалгебры размерностей 4 и 5. Из классификации компактных алгебр Ли вытекает, что неабелева компактная алгебра Ли размерности 4 только одна (с точностью до изоморфизма) — это $su(2) \oplus \mathbf{R}$, также единственна и компактная неабелева алгебра Ли размерности 5 — это $su(2) \oplus \mathbf{R}^2$. Обе эти алгебры Ли имеют нетривиальный центр. Без особого труда можно было бы описать все те алгебры Ли, которые содержат сильные подалгебры, изоморфные этим алгебрам Ли размерностей 4 и 5, но здесь мы этим заниматься не будем.

§ 3. Строение сильных подалгебр

Выше рассмотрены и описаны сильные подалгебры в полупростых алгебрах Ли. В данном параграфе мы рассмотрим сильные подалгебры в алгебрах Ли общего вида, в том числе и в разрешимых. Более подробно случай разрешимых алгебр Ли, содержащих сильные подалгебры, будет изучаться в следующем параграфе.

Пусть g — алгебра Ли, содержащая сильную подалгебру l. Рассмотрим разложение Леви $g = s + r$ алгебры Ли g (r — радикал, s — полупростая часть, все такие s сопряжены между собой). Через n будем обозначать нильрадикал алгебры Ли g. Алгебра Ли l компактна, для нее подходящее разложение Леви для g дает разложение $l = l_s + l_r$, где $l_r = l \cap r$ — тор (абелева компактная алгебра Ли), а $l_s = s \cap l$ — компактная алгебра Ли (не обязательно полупростая). Далее, полупростая алгебра Ли s раскладывается в прямую сумму компактного s_c и некомпактного s_n (точнее, не имеющего компактных идеалов) идеалов: $s = s_n + s_c$.

Напомним, что пара (g, l) алгебр Ли называется *эффективной*, если подалгебра l не содержит нетривиальных идеалов алгебры Ли g. Если же пара алгебр Ли не эффективна, то, факторизуя по идеалам, содержащимся в l, получим эффективную пару. На уровне групп Ли от произвольного транзитивного действия группы Ли G аналогично можно перейти к локально эффективному действию группы Ли G', причем $G/L = G'/L'$.

Для описания строения сильных подалгебр l в алгебре Ли g нам понадобится серия лемм.

Лемма 1. *Если пара (g, l) эффективна, то $l \cap n = \{0\}$.*

Доказательство. Для упрощения доказательства перейдем к соответствующим группам Ли, т. е. рассмотрим группу Ли G, алгебра Ли которой есть g, а в ней компактную подгруппу L, соответствующую подалгебре l (напомним, что по нашему определению сильной подалгебры соответствующая ей подгруппа Ли должна быть компактна). Можно было бы дать и доказательство непосредственно на уровне алгебр Ли, но переход к группам Ли здесь упрощает рассуждения и мы будем его использовать и далее.

Рассмотрим компактную подгруппу $L \cap N$ в нильрадикале N группы Ли G. Как известно, любая компактная подгруппа в связной нильпотентной группе Ли центральна, поэтому $L \cap N$ содержится в центре $Z(N)$ группы Ли N. Более того, $L \cap N$ будет центральной и в G. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую максимальную компактную подгруппу K в G, содержащую L. Пересечение $K \cap N$ — тор, являющийся максимальной компактной подгруппой в N. Так как такая подгруппа в нильпотентной группе Ли N, как известно, единственна, то действие группы Ли G сопряжениями сохраняет эту подгруппу, а потому $K \cap N$ — центральная подгруппа в G. Но тогда и $L \cap N$ — центральная подгруппа в G, в частности, она нормальна в G. Отсюда в силу эффективности пары (g, l) немедленно следует, что $l \cap n = \{0\}$.

Лемма 2. *Если пара (g, l) эффективна, то нильрадикал n алгебры Ли g абелев.*

Доказательство. Подгруппа L компактна. Рассмотрим L-инвариантное дополнение к $[n, n]$ в n. Получаем разложение $n = [n, n] + W$, где W — некоторое подпространство, инвариантное относительно присоединенного действия алгебры Ли l. Положим $h = l + W$ — это будет подпространство, инвариантное относительно l. Так как l — сильная подалгебра, подпространство h будет подалгеброй. Однако известно, что дополнительное к $[n, n]$ подпространство порождает нильпотентную алгебру Ли n. Поэтому n содержится в $h = l + W$. Поскольку по лемме 1 имеем $l \cap n = \{0\}$, а $W \subset n$, то $W = n$, поэтому $[n, n] = \{0\}$, т. е. алгебра Ли n абелева.

Лемма 3. *Радикал r алгебры Ли g разлагается в полупрямую сумму $r = a + b$ двух абелевых алгебр Ли a, b.*

Доказательство. В силу леммы 2 нильрадикал n алгебры Ли g абелев. Рассмотрим l-инвариантное дополнение $a_1 \subset r$ к подпространству $l \cap r + n$ в r. Имеем $r = a_1 + (l \cap r + n)$. Подпространство $l + a_1$ является l-инвариантным и потому является подалгеброй Ли (причем абелевой, так как $[l, r] \subset n$), ибо l — сильная подалгебра. Положив $a = a_1 + l \cap r$, $b = n$, получим требуемое разложение $r = a + b$ радикала r в полупрямую сумму двух абелевых (абелевость алгебры Ли a вытекает из абелевости содержащей ее алгебры Ли $l + r$) алгебр Ли.

Переходим к нашему основному структурному результату.

Теорема 7. *Пусть l — сильная подалгебра в алгебре Ли g, причем пара (g, l) эффективна. Тогда*

(i) $l_n = l \cap s_n$ *— максимальная компактная подалгебра в некомпактном идеале s_n подходящей полупростой части s алгебры Ли g;*

(ii) $l_c = l \cap s_c$ *— сильная подалгебра в соответствующей компактной полупростой алгебре Ли s_c;*

(iii) *радикал r алгебры Ли g разлагается в полупрямую сумму $a + n$ некоторой абелевой подалгебры a (содержащей $l \cap r$) и абелева нильрадикала n.*

Доказательство. Компактная алгебра Ли l разлагается в прямую сумму центрального идеала $l \cap r$ и подалгебры l_s, которую можно считать лежащей в некоторой полупростой части s алгебры Ли g. Поэтому $l = l_s + l_r$ при подходящем выборе фактора Леви s (здесь $l_s = l \cap s, l_r = l \cap r$). Подалгебра l_s будет, как нетрудно понять, сильной подалгеброй в полупростой части s алгебры Ли g (ибо подалгебра Ли s коммутирует с l_r). С помощью приема, использованного выше при доказательстве теоремы 2, доказывается, что l_n есть максимальная компактная подалгебра в s_n. Далее, имеем разложение $l_s = l_n + l_c$, и подалгебра l_c есть, как легко понять, сильная подалгебра в компактной полупростой алгебре Ли s_c (ибо подалгебра Ли s_c является идеалом в s и перестановочна с l_r). Этим доказаны пп. (i) и (ii). Утверждение (iii) доказано в лемме 3.

Рассмотрим некоторые частные случаи теоремы 7.

1. Если группа Ли G проста и некомпактна, то подалгебра l будет сильна в g тогда и только тогда, когда (g, l) — симметрическая пара. То же верно и для любой полупростой алгебры Ли g без компактных факторов. Тем самым мы получили в некотором роде обращение примера II.

2. Если группа Ли G разрешима, то $G = A \cdot N$ — полупрямое произведение абелевой связной группы Ли A и абелева нильрадикала N. Любая связная абелева группа Ли есть прямое произведение тора (компактной абелевой группы Ли) и односвязной абелевой группы Ли. Поэтому $A \simeq \mathbf{R}^k \times T$, $N \simeq \mathbf{R}^{k'} \times T'$, где T, T' — торы (возможно, тривиальные), причем можно считать, что $L \subset T$.

Рассмотрим теперь некоторые примеры сильных подгрупп в неполупростых группах Ли.

1. Рассмотрим вначале полупрямое произведение $R = T \cdot \mathbf{R}^n$ односвязного нормального делителя $\mathbf{R}^n$ и некоторого тора $T \subset GL_n(\mathbf{R})$ линейных преобразований. Покажем, что в соответствующей алгебре Ли g подалгебра $l = t$ (соответствующая тору T) является сильной (а потому T — сильная подгруппа в R).

Если $h \supset l$ — некоторое l-инвариантное подпространство, то $h = l + (h \cap \mathbf{R}^n)$. При этом подпространство $h \cap \mathbf{R}^n$ инвариантно относительно l, а потому h. очевидно, является подалгеброй. Этим доказано, что l — сильная подалгебра. Отметим, что в рассматриваемом случае группа Ли R разрешима.

2. Рассмотрим некоторое видоизменение предыдущего примера. Пусть $G = K \cdot \mathbf{R}^n$ — полупрямое произведение компактной группы Ли K и $\mathbf{R}^n$ (соответствующее вложению $K \subset GL_n(\mathbf{R})$). Тем же рассуждением, что и выше в примере 1, доказывается, что подалгебра $l = k$ будет сильной подалгеброй в алгебре Ли g группы Ли G. При этом группа Ли не будет, вообще говоря, разрешимой.

Рассмотрим теперь группу Ли $G = S \cdot \mathbf{R}^n$ — полупрямое произведение, где S — полупростая группа Ли без компактных факторов. Покажем, что в соответствующей алгебре Ли g максимальная компактная подалгебра $l = k$ алгебры Ли g будет сильной далеко не всегда.

Пусть $h \supset l$ — некоторое l-инвариантное подпространство в g. Так как k является, как известно, не просто максимальной компактной подалгеброй в s, а и максимальной подалгеброй среди всех подалгебр Ли в s, то либо $h \supset s$ (точнее, h содержит некоторую максимальную полупростую подалгебру Ли, которая сопряжена с s, тем самым можно считать, что $h \supset s$), либо $h = k + h \cap \mathbf{R}^n$. Рассмотрим подробнее второй случай. Подпространство $h \cap \mathbf{R}^n$ инвариантно относительно k, но оно не обязательно должно быть инвариантно и относительно s. Например, такое расхождение возможно уже для $s = sl_2(\mathbf{R})$. Поэтому подпространство h будет подалгеброй Ли не всегда. Нетрудно проверить, что подалгебра k здесь будет сильной подалгеброй в g тогда и только тогда, когда любое k-инвариантное подпространство в $\mathbf{R}^n$ будет и s-инвариантным. Такого рода полупростые алгебры Ли s существуют, например все комплексные полупростые алгебры Ли (ибо они суть комплексификации своих максимальных компактных подалгебр).

В силу (ii) теоремы 7 часть сильной подалгебры расположена в компактной полупростой алгебре Ли. Мы покажем, как в важном частном случае можно свести описание таких подалгебр к описанию сильных подалгебр в простых компактных алгебрах Ли (подробно рассмотренному В. Н. Берестовским, см. § 2). Это будет сделано в лемме 4, но вначале некоторые предварительные соображения.

Рассмотрим опять однородное пространство G/L и инвариантные внутренние метрики на нем. Предположим дополнительно, что стационарная подгруппа L связна. В общем случае она имеет конечное число компонент связности и переход к связной L производится переходом к конечнолистному накрытию $G/L_0 \to G/L$ над G/L (L_0 — связная компонента единицы подгруппы Ли L).

Группа Ли G не обязательно совпадает с группой $\mathrm{Iso}(G/L)$ всех изометрий метрического пространства G/L. Поэтому мы вольны при необходимости увеличивать или уменьшать группу G изометрий. Ниже нам будет удобно уменьшить ее и добиться, чтобы она стала несократимой.

Транзитивная группа Ли G называется *несократимой* на G/L, если ее действие локально эффективно и не существует собственных подгрупп в G, транзитивных на G/L. От произвольной транзитивной группы Ли всегда можно перейти к несократимой, используя факторизацию по подходящему нормальному делителю и переход к подходящей связной транзитивной подгруппе Ли. Поэтому ниже мы будем считать при рассмотрении сильных подгрупп и подалгебр Ли, что действие G на G/L несократимо.

Пусть $S_c = \times_i K_i$ — разложение компактной компоненты S_c фактора Леви S группы Ли G в почти прямое произведение простых компактных групп Ли K_i. Через $p_i : s_c \to k_i$ обозначим проекции на прямые слагаемые для соответствующих алгебр Ли.

Лемма 4. *Пусть l — сильная подалгебра в s_c. Тогда*

(i) *$p_i(l)$ — сильные подалгебры в k_i;*

(ii) *если действие G на G/L несократимо, то $p_i(l)$ — собственные сильные подалгебры;*

(iii) *если l — максимальная сильная подалгебра, то она — прямая сумма сильных подалгебр $p_i(l) \subset k_i$.*

Доказательство. Пусть $h_i \supset p_i(l)$ — некоторое подпространство в k_i, инвариантное относительно $p_i(l)$. Рассмотрим $p_i^{-1}(h_i)$. Оно будет l-инвариантным подпространством в s_c, содержащим l. Так как l — сильная подалгебра, то $p_i^{-1}(h_i)$ — подалгебра Ли. Но тогда подалгеброй Ли будет и ее образ при проекции p_i, совпадающий с h_i. Следовательно, подпространство h_i оказывается подалгеброй в k_i, поэтому $p_i(l)$ — сильная подалгебра в k_i. Этим доказано (i).

Докажем, что при условии несократимости действия G на G/L сильные подалгебры $p_i(l)$ собственные, т. е. они не могут совпадать с k_i. Пусть, например, $p_1(l) = k_1$. Тогда рассмотрим в группе Ли G подгруппу $G_1 = S_n \cdot (K_2 \cdot K_3 \ldots) \cdot R$ (здесь K_i — соответствующие подалгебрам k_i подгруппы Ли в G). Из $p_1(l) = k_1$ вытекает, что $G_1 \cdot L = G$. Но тогда очевидно, что собственная подгруппа $G_1 \subset G$ транзитивна на G/L, что противоречит несократимости действия группы Ли G. Полученное противоречие показывает, что все подалгебры Ли $p_i(l)$ — собственные сильные подалгебры в компактных простых алгебрах Ли. Этим доказано утверждение (ii) нашей леммы.

В общем случае l содержится в прямой сумме $\bigoplus\limits_i (p_i(l))$, но если она максимальна, то должна совпадать с этой прямой суммой. Это доказывает утверждение (iii) леммы 4.

Отметим, что в теореме 3 были доказаны близкие к лемме 4 утверждения, но в этой теореме прямые слагаемые, на которые раскладывается алгебра Ли, не всегда полупросты.

Рассмотрим максимальные сильные подалгебры в алгебрах Ли общего вида (для подалгебр в полупростых алгебрах Ли этот вопрос рассматривался в § 2). Из сказанного выше получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть действие группы Ли G на G/L несократимо. Тогда любая максимальная связная сильная подгруппа L имеет вид $L_c \cdot K_n \cdot T$, где T — максимальный тор в радикале R группы Ли G, K_n — максимальная компактная подгруппа в компоненте S_n фактора Леви S группы Ли G, а L_c — некоторая максимальная сильная подгруппа в компактной компоненте S_c фактора Леви S.*

При этом L_c есть произведение максимальных сильных подгрупп в простых факторах компактной группы Ли S_c.

В силу теоремы 8 описание максимальных сильных подалгебр во многом сводится к описанию их в компактных простых алгебрах Ли, которое полностью дано в § 2, и в разрешимых алгебрах Ли, о которых пойдет речь в следующем параграфе.

В целом результаты этого параграфа (в частности, теорема 7 в сочетании с теоремой 3) дают достаточно подробный частичный ответ (на основе условия Берестовского $(*)$) на вопрос из [1]: для каких именно однородных пространств все внутренние метрики являются финслеровыми? Теоремы 3 и 7 содержат условия на пару (g, l), необходимые для того, чтобы подалгебра Ли l была сильной подалгеброй в g. Возможно, что эти условия достаточны или близки к ним.

§ 4. Сильные подалгебры в разрешимых группах Ли и строгие абелевы подгруппы

Как показано выше, описание сильных подалгебр во многом сводится к рассмотрениям сильных подалгебр в полупростых и в разрешимых алгебрах Ли. В этом параграфе сделаем несколько замечаний по поводу разрешимого случая. При этом мы сосредоточимся не на сильных подалгебрах, а на сильных подгруппах в группах Ли (так как именно такого рода подход необходим в интересующих нас геометрических приложениях).

Рассмотрим разрешимую группу Ли $R = A \cdot N$ — полупрямое произведение двух абелевых групп Ли. Такую структуру имеет радикал любой группы Ли, содержащей некоторую сильную подгруппу. В частности, если эта группа Ли сама разрешима, то и она имеет такую структуру. При этом может оказаться, что и группы Ли A и N неодносвязны. Однако имеет место

Предложение 2. *Если разрешимая группа Ли R имеет сильную подгруппу, то она может быть представлена в виде прямого произведения $R = R_1 \times T_B$, где $R_1 = A \cdot \mathbf{R}^n$ — полупрямое произведение абелевой группы Ли A и односвязной $\mathbf{R}^n$, а T_B — некоторый тор.*

Доказательство. Пусть $R = A \cdot B$, $A = T_A \times \mathbf{R}^n, B = T_B \times \mathbf{R}^m$. При этом, как указано выше, $l \subset t_A$. Рассмотрим l-инвариантное дополнение в r к максимальному тору t $(t = t_A + t_B)$ алгебры Ли $r : r = W + t$. Пусть $h = l + W$ — l-инвариантное подпространство. Так как l является сильной подалгеброй, оно будет подалгеброй.

Имеем $r = h + U + t_B$, где U — дополнительная к l подалгебра в t_A. Подпространство $h + U$ содержит l и инвариантно относительно l, поэтому является подалгеброй. Так как $t_B \subset Z(r)$ (ибо b есть нильрадикал в r), получаем разложение в прямую сумму $r = (h + U) \oplus t_B$. Оно и дает нужное нам разложение в прямое произведение $R = R_1 \times T_B$, где R_1 — связная подгруппа Ли в R, соответствующая подалгебре Ли $h + U$.

Отметим, что в предложении 2 подгруппа L содержится в группе Ли R_1 с односвязным нильрадикалом и является сильной подгруппой в R тогда и только тогда, когда она — сильная подгруппа в R_1.

В результате мы приходим к рассмотрению сильных подгрупп в разрешимых группах Ли вида $R = A \cdot B$ — полупрямых произведениях абелевых групп Ли, причем группа Ли B односвязна, а $L \subset A$. Задача же описания групп Ли R указанного вида сводится к изучению абелевых подгрупп в линейных группах $\mathrm{Gl}(B)$, причем подгрупп, обладающих, как будет показано ниже, весьма специальными свойствами.

Пусть $R = A \cdot B$, где $B \simeq \mathbf{R}^n$. Группа Ли R как полупрямое произведение задается гомоморфизмом $\phi : A \to GL_n(\mathbf{R})$. Положим $A^\sharp = \phi(A) \subset GL_n(\mathbf{R})$, $L^\sharp = \phi(L)$ и рассмотрим алгебраическое замыкание $\langle A^\sharp \rangle$ абелевой подгруппы Ли $A^\sharp$ в $GL_n(\mathbf{R})$.

Имеем разложение Шевалле $\langle A^\sharp \rangle = A_s \cdot A_u$ абелевой алгебраической группы в прямое произведение вполне приводимой подгруппы A_s и унипотентной подгруппы A_u.

Предложение 3. *Если L — сильная подгруппа в разрешимой группе Ли $R = A \cdot B$ (причем B односвязна), то $A_u = \{e\}$, т. е. подгруппа $\langle A^\sharp \rangle$ вполне приводима. В частности, группа $\phi(A)$ будет вполне приводимой линейной группой.*

Для доказательства нам нужна

Лемма 5. *Пусть $R = A \cdot B$ — полупрямое произведение абелевых групп Ли, причем $B \simeq \mathbf{R}^n$. Если L — сильная подгруппа в R, то любое $L^\sharp$-инвариантное подпространство $W \subset B$ будет и $A^\sharp$-инвариантным.*

Доказательство леммы. Пусть $W \subset B$ — некоторое $L^\sharp$-инвариантное подпространство. Пусть $h = a + W$. Это подпространство в r инвариантно относительно l и потому должно быть подалгеброй. Но тогда $[a, W] \subset W$, т. е. подпространство W инвариантно и относительно $A^\sharp$.

Доказательство предложения 3. Предположим, что $A_u \neq \{e\}$. Рассмотрим для группы A_u соответствующее ей подпространство инвариантов $V_1 = B^{A_u}$. Оно ненулевое, так как группа A_u унипотентна. Рассмотрим $L^\sharp$-инвариантное дополнение V_2' к V_1 в B: $B = V_1 \oplus V_2'$. По лемме 5 подпространство V_2' будет и $A^\sharp$-инвариантным. Пусть $V_2 = (V_2')^{A_u}$. Это тоже собственное подпространство в B. Далее такая конструкция повторяется необходимое число раз, в результате получаем разложение в прямую сумму $B = \bigoplus\limits_i V_i$ инвариантных относительно A_u подпространств, причем ограничения действия A_u на каждое V_i — тождественные преобразования. Но тогда и действие A_u на B должно быть тривиальным, т. е. $A_u = \{e\}$.

Следующее определение мотивировано леммой 5.

Определение. Связная абелева линейная группа Ли $A \subset GL(V)$ называется *строгой*, если любое T-инвариантное подпространство в V (где T — максимальный тор в A) будет и A-инвариантным.

Из сказанного выше в этом параграфе и в § 3 вытекает

Теорема 9. *Пусть $G = S \cdot R$ — связная группа Ли, полупростая часть S которой не имеет компактных факторов. Эта группа будет взрослой (т. е. имеющей хотя бы одну сильную подгруппу) тогда и только тогда, когда ее радикал R может быть представлен в виде $R = (A \cdot N) \times T$, где T — тор, $N \simeq \mathbf{R}^n$ и $A^\sharp$ — строгая подгруппа.*

Итак, изучение сильных подгрупп оказывается тесно связанным с изучением строгих абелевых подгрупп.

Дадим теперь некоторое описание строгих подгрупп в разрешимых группах Ли. В силу предложения 3 достаточно рассматривать вполне приводимые подгруппы A. Рассмотрим корневое разложение $V = \oplus V_\alpha$ относительно такой подгруппы A. Ограничение действия A на каждое V_α порождено гомотетиями и вращениями в двумерных плоскостях. Аналогично рассмотрим и корневое разложение $V = \oplus W_\lambda$ относительно максимального тора T. Ограничения действия T на корневые подпространства порождены вращениями в двумерных плоскостях.

Предложение 4. *Для любого тора T существует максимальная (причем единственная) строгая подгруппа $A = A(T)$, содержащая T в качестве максимального тора.*

Доказательство. Рассмотрим корневое разложение $V = \bigoplus W_\lambda$, порожденное тором T. К вращениям, индуцированным действиями T на корневых подпространствах, добавим всевозможные гомотетии (линейные преобразования вида aE). В результате, как нетрудно понять, получим требуемую подгруппу $A(T)$.

Следствие 1. *Подгруппа Ли A строгая тогда и только тогда, когда она содержится в подгруппе $A(T)$, построенной по максимальному тору T этой подгруппы Ли A.*

Пример 1. Если $T = \{e\}$, то $A(T)$ состоит из всевозможных скалярных матриц αE.

Пример 2. Если $T = SO(2) \times E_{n-2}$, то $A(T) = \{\lambda E_2 \times \mu E_{n-2}\}$ состоит из двух скалярных блоков порядков 2 и $n-2$.

Приложение. О финслеровых метриках и бинарных формах четвертого порядка

В основном тексте статьи рассматривается вопрос о том, при каких условиях любая инвариантная внутренняя метрика на однородном пространстве является финслеровой. Сами по себе финслеровы инвариантные метрики на однородных пространствах представляют значительный интерес, хотя они мало исследованы. Здесь мы рассмотрим один класс инвариантных метрик на двумерных однородных пространствах — инвариантные метрики на двумерных группах Ли. С точностью до изоморфизма имеется только две односвязные двумерные группы Ли — абелева $\mathbf{R}^2$ и разрешимая R_2 (которую можно рассматривать как группу собственных аффинных преобразований прямой $\mathbf{R}^1$). Инвариантная финслерова метрика на группе Ли однозначно определяется финслеровой нормой на некотором касательном пространстве группы Ли, например, на алгебре Ли, соответствующей этой группе Ли. Для однородных пространств финслерова норма на касательном пространстве в некоторой точке порождает инвариантную финслерову метрику на однородном пространстве не всегда — должно выполняться условие инвариантности финслеровой нормы на касательном пространстве относительно стационарной подгруппы, соответствующей этой точке.

В своей классической лекции, уже упоминавшейся в начале данной статьи, Риман отмечал, что кроме обычной метрики (квадратичной, ее мы теперь называем римановой) можно рассматривать и метрики, определяемые формами более высокой степени, например, четвертой. Так, можно рассматривать метрику, задаваемую в виде $(\Sigma(dx_i)^4)^{1/4}$ или, более общо, в виде $(T_4(x))^{1/4}$, где $T_4(x)$ — произвольная положительно определенная форма четвертой степени. При этом встает задача классификации такого рода метрик. Это типичная задача теории инвариантов, и для бинарных форм (т. е. форм от двух переменных) четвертого порядка она в виде серии задач была решена в [14, с. 280–284, 393, 394). В качестве следствия из этого общего результата получаем следующее важное для нас утверждение.

Теорема 10. *Положительно определенная бинарная форма $T_4(x, y)$ четвертой степени эквивалентна (относительно линейных замен переменных) над* $\mathbf{R}$ *форме $x^4 + 2ax^2y^2 + y^4$ при $|a| < 1$.*

Отметим, что формы, фигурирующие в теореме 10, можно записать в виде $K(x^2, y^2)$, где $K(x, y)$ — положительно определенная квадратичная форма. Сама же финслерова норма задается теперь в виде $(x^4 + 2ax^2y^2 + y^4)^{1/4}$. Ее можно рассматривать как форму на двумерной алгебре Ли, поэтому она порождает инвариантную форму на соответствующей двумерной группе Ли. Для абелевой группы Ли $\mathbf{R}^2$ это дает общий вид инвариантной финслеровой нормы типа $(T_4(x))^{1/4}$. На самом деле в качестве финслеровых норм можно использовать не только такие выражения, но и их суммы (с различными значениями параметра a).

Для произвольного числа переменных можно предложить, например, такие классы положительно определенных форм четвертой степени, которые порождают финслеровы метрики: $T_4(x_i) = K\big(x_i^2\big)$, где K — некоторая положительно определенная квадратичная форма. К ней можно в виде слагаемых добавлять четвертые степени произвольных линейных форм и квадраты произвольных квадратичных форм от переменных x_i. Это дает положительно определенные формы на алгебрах Ли, а им соответствуют инвариантные финслеровы структуры на группах Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берестовский В. Н.* Однородные многообразия с внутренней метрикой // I: Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 6. С. 17–29; II: 1989. Т. 30, № 2. С. 14–28.
2. *Александров А. Д.* Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.
4. *Берестовский В. Н.* Однородные G-пространства Буземана // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 2. С. 3–15.
5. *Берестовский В. Н.* Компактные однородные многообразия с интегрируемыми инвариантными распределениями и скалярная кривизна // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 7. С. 15–24.
6. *Milnor J.* Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1985. V. 21. P. 293–329.
7. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
8. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
9. *Мантуров О. В.* Однородные римановы многообразия с неприводимой группой изотропии // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1966. Т. 13. С. 68–145.

10. *Wolf J.* The geometry and structure of isotropy irreducible homogeneous spaces // Acta Math. 1968. V. 120. P. 59–148.
11. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
12. *Дынкин Е. Б.* Полупростые подалгебры полупростых алгебр Ли // Мат. сб. 1952. Т. 30, № 2. С. 349–462.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли, гл. IX. М.: Мир, 1969.
14. *Гуревич Г. В.* Основы алгебраической теории инвариантов. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.

Статья поступила 18 августа 2006 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет МАТИ им. К. Э. Циолковского,
кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552
vgorvich@yandex.ru