Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 514.763.3

МЕТРИКИ С ГРУППОЙ ГОЛОНОМИИ G_2, СВЯЗАННЫЕ С 3–САСАКИЕВЫМ МНОГООБРАЗИЕМ

Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович

Аннотация. Строятся полные некомпактные римановы метрики с группой голономии G_2 на некомпактных орбифолдах, являющихся $\mathbb{R}^3$-расслоениями с твисторным пространством $\mathscr{Z}$ в качестве сферического слоя.

Ключевые слова: исключительная группа гомологии, 3-сасакиево многообразие, твисторное пространство.

1. Введение

Статья посвящена изучению метрик с группой голономии G_2 и является естественным продолжением исследований, начатых в [1] в связи с изучением метрик с группами голономии Spin(7). Мы рассматриваем произвольное компактное семимерное 3-сасакиево многообразие M и исследуем вопрос о том, существует ли гладкое разрешение конусной метрики над твисторным пространством $\mathscr{Z}$, ассоциированным с M.

Кратко говоря, 3-сасакиево многообразие M — это многообразие, для которого стандартная метрика на конусе над M является гиперкэлеровой. С каждым таким многообразием M тесно связано твисторное пространство $\mathscr{Z}$ — орбифолд, обладающий метрикой Кэлера — Эйнштейна. Мы рассматриваем метрики, являющиеся естественными разрешениями стандартной конусной метрики над $\mathscr{Z}$:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2\big(\eta_2^2 + \eta_3^2\big) + B(t)^2\big(\eta_4^2 + \eta_5^2\big) + C(t)^2\big(\eta_6^2 + \eta_7^2\big), \qquad (*)$$

где η_2, η_3 — характеристические 1-формы M, а $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$ — формы, аннулирующие 3-сасакиево слоение на M и A, B, C — вещественные функции.

Одним из основных результатов статьи является конструкция (в случае кэлеровости $M/SU(2)$) G_2-структуры, параллельность которой относительно метрики $(*)$ равносильна следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A' = \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \quad B' = \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \quad C' = \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB}. \qquad (**)$$

Таким образом, метрика $(*)$ при условии $(**)$ имеет группу голономии G_2 и, в частности, является Риччи-плоской. Ранее система $(**)$ была получена в [2] в частном случае $M = SU(3)/S^1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–0094а) и комплексного интеграционного проекта 2.15 СО РАН. Первый автор подержан грантом президента РФ (проект МК–8712.2006.1)

Для того, чтобы решение системы $(**)$ было определено на некотором орбифолде либо многообразии, необходимо дополнительное выполнение краевых условий в точке t_0, которые мы формулируем. Эти условия не могут быть выполнены, кроме случая $B = C$, который приводит нас к функциям, дающим решения, найденные впервые в [3] в случае $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$. В случае $B = C$ метрика $(*)$ определена на тотальном пространстве $\mathbb{R}^3$-расслоения $\mathscr{N}$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathscr{O}$. Вообще говоря, $\mathscr{N}$ является орбифолдом, кроме случая $M = S^7$ и $M = SU(3)/S^1$. Отметим, что при $B = C$ условие кэлеровости $\mathscr{O}$ не является необходимым.

В заключение мы рассматриваем известные примеры 3-сасакиевых многообразий, построенные в [4], и описываем топологию соответствующих орбифолдов $\mathscr{N}$.

2. Конструкция параллельной G_2-структуры

Определение, основные свойства и дальнейшие ссылки, связанные с понятием 3-сасакиева многообразия, можно найти в [1]. Оттуда же взяты основные обозначения.

Пусть M — компактное семимерное 3-сасакиево многообразие с характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и характеристическими 1-формами η_1, η_2, η_3. Рассмотрим главное расслоение $\pi : M \to \mathscr{O}$ со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathscr{O}$, ассоциированным с M. Нас будет интересовать специальный случай, когда $\mathscr{O}$ дополнительно обладает кэлеровой структурой.

Поле ξ^1 порождает локально свободное действие окружности S^1 на M, и метрика на твисторном пространстве $\mathscr{Z} = M/S^1$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна. Очевидно, что $\mathscr{Z}$ топологически представляет собой расслоенное пространство над $\mathscr{O}$ со слоем $S^2 = Sp(1)/S^1$ (либо $S^2 = SO(3)/S^1$), ассоциированное с π. Рассмотрим очевидное действие $SO(3)$ на $\mathbb{R}^3$. Двулистное накрытие $Sp(1) \to SO(3)$ задает также действие $Sp(1)$ на $\mathbb{R}^3$. Пусть теперь $\mathscr{N}$ — расслоенное пространство над $\mathscr{O}$ со слоем $\mathbb{R}^3$, ассоциированное с π. Легко видеть, что $\mathscr{O}$ вложено в $\mathscr{N}$ в качестве нулевого, а $\mathscr{Z}$ вложено в $\mathscr{N}$ в качестве сферического сечения. Пространство $\mathscr{N} \backslash \mathscr{O}$ диффеоморфно произведению $\mathscr{Z} \times (0, \infty)$. Заметим, что $\mathscr{N}$ можно считать проективизацией расслоения $\mathscr{M}_1 \to \mathscr{O}$ из [1]. В общей ситуации $\mathscr{N}$ является семимерным орбифолдом, однако если M — регулярное 3-сасакиево пространство, то $\mathscr{N}$ — семимерное многообразие.

Пусть $\{e^i\}$, $i = 0, 2, 3, \ldots, 7$, — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$ (способ нумерации базиса здесь выбран таким образом, чтобы подчеркнуть связь с конструкциями из [1] и максимально сохранить принятые там обозначения). Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на $\mathbb{R}^7$:

$$\Psi_0 = -e^{023} - e^{045} + e^{067} + e^{346} - e^{375} - e^{247} + e^{256}.$$

Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии N задает G_2-структуру, если в окрестности каждой точки $p \in N$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pN \to \mathbb{R}^7$ такая, что $\phi_p^* \Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ такую, что $g_\Psi(v, w) = \langle \phi_p v, \phi_p w \rangle$ для $v, w \in T_pN$ [3]. Если форма Ψ параллельна ($\nabla\Psi = 0$), то группа голономии риманова многообразия N будет содержаться в G_2. Параллельность формы Ψ эквивалентна ее замкнутости и козамкнутости [5]:

$$d\Psi = 0, \quad d * \Psi = 0. \tag{1}$$

Заметим, что форма $\Phi_0 = e^1 \wedge \Psi_0 - *\Psi_0$, где $*$ — оператор Ходжа в $\mathbb{R}^7$, задает Spin(7)-структуру на $\mathbb{R}^8$ с ортонормированным базисом $\{e^i\}_{i=0,1,2,\dots,7}$.

Локально выберем ортонормированную систему $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathscr{V}$, так что

$$\omega_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7), \quad \omega_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5), \quad \omega_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6),$$

где формы ω_i отвечают кватернионно-кэлеровой структуре на $\mathscr{O}$. Ясно, что $\eta_2, \eta_3, \dots, \eta_7$ является ортонормированным базисом в M, аннулирующим одномерное слоение, порожденное полем ξ^1, поэтому можно рассмотреть метрику на $(0,\infty) \times \mathscr{Z}$ следующего вида:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2\left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right) + B(t)^2\left(\eta_4^2 + \eta_5^2\right) + C(t)^2\left(\eta_6^2 + \eta_7^2\right), \tag{2}$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определены на промежутке $(0,\infty)$.

Мы предполагаем, что $\mathscr{O}$ является кэлеровым орбифолдом, поэтому на нем существует замкнутая кэлерова форма, которую можно поднять на горизонтальное подрасслоение $\mathscr{H}$ и получить замкнутую форму ω. Локально, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7).$$

Если теперь положить

$$e^0 = dt, \quad e^i = A\eta_i,\ i = 2,3, \quad e^j = B\eta_j,\ j = 4,5, \quad e^k = C\eta_k,\ k = 6,7,$$

то формы Ψ_0 и $*\Psi_0$ будут иметь вид

$$\Psi_1 = -e^{023} - \frac{B^2 + C^2}{4} e^0 \wedge \omega_1 - \frac{B^2 - C^2}{4} e^0 \wedge \omega + \frac{BC}{2} e^3 \wedge \omega_2 - \frac{BC}{2} e^2 \wedge \omega_3,$$

$$\Psi_2 = C^2B^2\Omega - \frac{B^2 + C^2}{4} e^{23} \wedge \omega_1 - \frac{B^2 - C^2}{4} e^{23} \wedge \omega + \frac{BC}{2} e^{02} \wedge \omega_2 + \frac{BC}{2} e^{03} \wedge \omega_3,$$

где $\Omega = \eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 = -\frac{1}{8}\omega_1 \wedge \omega_1 = -\frac{1}{8}\omega_2 \wedge \omega_2 = -\frac{1}{8}\omega_3 \wedge \omega_3$.

При этом очевидно, что формы Ψ_1, Ψ_2 уже являются глобально определенными и не зависят от локального выбора η_i, следовательно, однозначно определяют некоторую метрику $\bar{g}$, локально заданную формулой (2). Тогда условие (1) принадлежности группы голономии G_2 равносильно уравнению

$$d\Psi_1 = d\Psi_2 = 0. \tag{3}$$

Теорема. *Если $\mathscr{O}$ обладает кэлеровой структурой, то метрика (2) на $\mathscr{N}$ является гладкой метрикой с группой голономии G_2, заданной формой Ψ_1 тогда и только тогда, когда функции A, B, C, определенные на промежутке $[t_0,\infty)$, удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$A' = \frac{2A^2 - B^2 - C^2}{BC}, \quad B' = \frac{B^2 - C^2 - 2A^2}{CA}, \quad C' = \frac{C^2 - 2A^2 - B^2}{AB} \tag{4}$$

с начальными условиями

(1) $A(0) = 0$, $|A_1'(0)| = 2$;

(2) $B(0), C(0) \neq 0$, $B'(0) = C'(0) = 0$;

(3) *функции* A, B, C *знакоопределенны на промежутке* (t_0, ∞).

Доказательство. В [1] получены соотношения, замыкающие алгебру форм:

$$
\begin{aligned}
de^0 &= 0,\\
de^i &= \frac{A_i'}{A_i} e^0 \wedge e^i + A_i \omega_i - \frac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}} e^{i+1} \wedge e^{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \bmod 3,\\
d\omega_i &= \frac{2}{A_{i+2}} \omega_{i+1} \wedge e^{i+2} - \frac{2}{A_{i+1}} e^{i+1} \wedge \omega_{i+2}, \quad i = 1, 2, 3 \bmod 3.
\end{aligned}
$$

Добавив соотношение $d\omega = 0$ и выполнив вычисления, которые мы здесь опускаем, получаем требуемую систему.

Условия гладкости метрики в точке t_0 доказывается совершенно аналогично случаю группы голономии $\mathrm{Spin}(7)$, который подробно изложен в [1]. Заметим только, что при факторизации единичной сферы S^3 по хопфовскому действию окружности мы получаем сферу радиуса $1/2$, что и объясняет условие $|A'(0)| = 2$.

При $B = C$ система сводится к паре уравнений

$$
A' = 2\left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right), \quad B' = -2\frac{A}{B},
$$

решение которой дает следующую метрику:

$$
\bar{g} = \frac{dr^2}{1 - r_0^4/r^4} + r^2\left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)\left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right) + 2r^2\left(\eta_4^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 + \eta_7^2\right).
$$

Условия регулярности выполнены, и эта гладкая метрика найдена впервые в [3] для случая $M = SU(3)/S^1$ и $M = S^7$ (отметим, что при $B = C$ не обязательно требовать кэлеровости $\mathscr{O}$).

В общем случае $B \neq C$ система (4) также интегрируется [2], однако получающиеся решения не удовлетворяют условиям регулярности.

3. Примеры

Интересное семейство примеров возникает, если рассмотреть в качестве 3-сасакиевых многообразий семимерные двойные частные группы Ли $SU(3)$. А именно, пусть p_1, p_2, p_3 — попарно взаимно простые положительные целые числа. Рассмотрим следующее действие группы S^1 на группе Ли $SU(3)$:

$$
z \in S^1 : A \mapsto \mathrm{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \mathrm{diag}(1, 1, z^{-p_1-p_2-p_3}).
$$

Такое действие свободно, и в [4] показано, что на пространстве орбит $\mathscr{S} = \mathscr{S}_{p_1,p_2,p_3}$ существует 3-сасакиева структура. Более того, действие группы $SU(2)$ на $SU(3)$ правыми сдвигами

$$
B \in SU(2) : A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

коммутирует с действием S^1 и переносится на пространство орбит $\mathscr{S}$. Соответствующие киллинговы поля и будут являться характеристическими полями ξ_i на $\mathscr{S}$. Следовательно, соответствующим твисторным пространством $\mathscr{Z} = \mathscr{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ будет пространство орбит следующего действия тора T^2 на $SU(3)$:

$$
(z, u) \in T^2 : A \mapsto \mathrm{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) \cdot A \cdot \mathrm{diag}(u, u^{-1}, z^{-p_1-p_2-p_3}). \tag{5}
$$

Лемма. *Пространство $\mathscr{Z}_{p_1,p_2,p_3}$ диффеоморфно пространству орбит группы $U(3)$ относительно следующего действия тора T^3:*

$$(z,u,v)\in T^3 : A\mapsto \mathrm{diag}(z^{-p_2-p_3}, z^{-p_1-p_3}, z^{-p_1-p_2})\cdot A\cdot \mathrm{diag}(u,v,1). \qquad (6)$$

Для доказательства достаточно проверить, что каждая T^3-орбита в $U(3)$ высекает в группе $SU(3)\subset U(3)$ в точности орбиту T^2-действия (5).

Действие (6) позволяет прозрачно описать топологию $\mathscr{Z}$ и, следовательно, топологию $\mathscr{N}$. При этом мы пользуемся конструкцией, взятой из [6]. Рассмотрим подмногообразие $E=\{(u,[v])\mid u\perp v\}\subset S^5\times\mathbb{C}P^2$. Очевидно, что E диффеоморфно $U(3)/S^1\times S^1$ («правая» часть действия (6)) и представляет собой проективизацию $\mathbb{C}^2$-расслоения $\widetilde{E}=\{(u,v)\mid u\perp v\}\subset S^5\times\mathbb{C}^3$ над S^5. Добавив тривиальное одномерное комплексное расслоение над S^5 к $\widetilde{E}$, получаем тривиальное расслоение $S^5\times\mathbb{C}^3$ над S^5.

Группа S^1 действует слева автоморфизмами векторного расслоения $\widetilde{E}$, и $\mathscr{Z}=S^1\backslash E$ является проективизацией $\mathbb{C}^2$-расслоения $S^1\backslash\widetilde{E}$ над взвешенным комплексным проективным пространством $\mathscr{O}=\mathbb{C}P^2(q_1,q_2,q_3)=S^1\backslash S^5$, где $q_i=(p_{i+1}+p_{i+2})/2$, если все p_i нечетны, и $q_i=(p_{i+1}+p_{i+2})$ в противном случае.

Из всего вышесказанного вытекает, что расслоение $S^1\backslash\widetilde{E}$ стабильно эквивалентно расслоению $S^1\backslash(S^5\times\mathbb{C}^3)$ над $\mathscr{O}$. Последнее расслоение очевидным образом раскладывается в сумму Уитни $\sum\limits_{i=1}^{3}\xi^{q_i}$, где ξ — аналог одномерного универсального расслоения для орбифолда $\mathscr{O}$.

Следствие. *Твисторное пространство $\mathscr{Z}$ диффеоморфно проективизации двумерного комплексного расслоения над $\mathbb{C}P^2(q_1,q_2,q_3)$, стабильно эквивалентного $\xi^{q_1}\oplus\xi^{q_2}\oplus\xi^{q_3}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Базайкин Я. В.* О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии Spin(7) // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 11–32.
2. *Cvetic M., Gibbons G. W., Lu H., Pope C. N.* Cohomogeneity one manifolds of Spin(7) and $G(2)$ holonomy // Phys. Rev. D. 2002. V. 65, N 10. P. 106004.
3. *Bryant R. L., Salamon S. L.* On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy // Duke Math. J. 1989. V. 58, N 3. P. 829–850.
4. *Boyer C. P., Galicki K., Mann B. M.* The geometry and topology of 3-Sasakian manifolds // J. Reine Angrew. Math. 1994. V. 455. P. 183–220.
5. *Gray A.* Weak holonomy groups // Math. Z. 1971. Bd 123. S. 290–300.
6. *Eschenburg J. H.* Inhomogeneous spaces of positive curvature // Differential Geom. Appl. 1992. V. 2, N 2. P. 123–132.

Статья поступила 30 марта 2007 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`bazaikin@math.nsc.ru`

Малькович Евгений Геннадьевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`topolog@ngs.ru`