Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 519.45

О СУБНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

С. Тажетдинов

Аннотация. Даются описания субнормальных подгрупп двумерных линейных групп над локальными и полными кольцами с обратимым элементом 2, а также субнормальных подгрупп симплектических групп над локальными кольцами с обратимым элементом 2.

Ключевые слова: субнормальная подгруппа, конгруэнц-подгруппа, общая линейная группа, симплектическая группа, локальное кольцо, полное кольцо, трансвекция.

В описаниях субнормальных подгрупп линейных групп качество описания, как правило, определяется некоторой арифметической функцией $f(d)$ от субнормальной глубины d подгруппы H в группе G: чем меньше значение функции $f(d)$, тем лучше описание. Во всех размерностях общих линейных и симплектических групп лучшими такими функциями в настоящее время являются соответственно функции $f(d) = \frac{1}{4}(5^d - 1)$ и $f(d) = \frac{1}{5}(6^d - 1)$ (см [1–6]).

В настоящей работе мы улучшим эти функции для некоторых достаточно больших классов колец. В § 1, 2 мы получим функцию $f(d) = \frac{1}{3}(4^d - 1)$ для субнормальных подгрупп двумерных линейных групп над локальными и полными кольцами с обратимым элементом 2. В § 3 получим функцию $f(d) = \frac{1}{4}(5^d - 1)$ для субнормальных подгрупп симплектических групп над локальными кольцами с обратимым элементом 2.

Строка матрицы над кольцом R, элементы которой порождают как идеал все кольцо R, называется *унимодулярной.* Пусть $m \geq 1$ и $n \geq 2$ — целые числа. Согласно [7] коммутативное кольцо R называется (m, n)*-полным*, если для каждой $(m \times n)$-матрицы A над R с унимодулярными строками существуют элемент $\varepsilon \in R$ (зависящий от A) и обратимые элементы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m \in R$ такие, что

$$A[1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{n-1}]^t = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]^t,$$

где t означает транспонирование. Ясно, что (m, n)-полное кольцо является и (s, t)-полным при $s \leq m$ и $t \leq n$. Таким образом, любое (m, n)-полное кольцо будет (1,2)-полным кольцом, т. е. кольцом стабильного ранга 1. Известно (см. [7]), что если каждое поле вычетов полулокального кольца и кольца размерности 0, в том числе кольца, регулярного по Нейману, содержит более $m(n-1)$ элементов, то оно является (m, n)-полным кольцом.

Коммутативное кольцо с единицей, имеющее единственный максимальный идеал, называется *локальным кольцом.*

Напомним, что если существует ряд

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq H_{d-1} \trianglelefteq H_d = G$$

подгрупп группы G, где $H_{i-1} \trianglelefteq H_i$ означает, что H_{i-1} является нормальной подгруппой H_i, то H называется *субнормальной подгруппой* группы G. В этом случае пишут $H \triangleleft^d G$. Наименьшее такое d называется *субнормальной глубиной H в G.*

Пусть R — кольцо стабильного ранга 1 (в частности, любое полное или локальное кольцо) с обратимым элементом 2. Пусть I — идеал кольца R. Гомоморфизм колец $R \to R/I$ индуцирует сюръективный (см. [7]) гомоморфизм групп $\pi_I : GL_2(R) \to GL_2(R/I)$. Здесь $GL_2(R/R)$ означает единичную группу. Пусть

$$Z_I = (\operatorname{center} GL_2(R/I))\pi_I^{-1}, \quad K_I = \{\sigma \in SL_2(R) \mid \sigma\pi_I = 1\},$$
$$E_I = \operatorname{gr}(t_{12}(\alpha), t_{21}(\alpha) \mid \alpha \in I),$$

где t_{ij} — трансвекции. Заметим, что $Z_R = GL_2(R)$, $Z_0 = \operatorname{center} GL_2(R)$, $K_R = SL_2(R)$, $K_0 = \{1\}$. *Весом матрицы* $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ назовем идеал $J(h) = \operatorname{id}(a - d, b, c)$, а вес подгруппы H определим формулой

$$J(H) = \sum_{h \in H} J(h).$$

Под выражением i_n будем понимать произвольный элемент идеала I^n. Группу обратимых элементов кольца R обозначим через R^*.

§ 1. О субнормальных подгруппах двумерных линейных групп над локальными кольцами

В этом параграфе R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и максимальным идеалом M. Имеем $R^* = R \setminus M$.

Лемма 1. *Если $I \neq R$ и подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J = J(H) \cdot I^4$.*

Доказательство. Пусть $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица из H и $\alpha \in I$. Пусть $q = 1 + c\alpha$, $v = a\alpha(2 + c\alpha)$. Тогда $d(q) = \operatorname{diag}(q^{-1}, q) \in K_I$ и H содержит матрицу

$$h_1 = [h, d(q)t_{12}(v)] = \begin{pmatrix} q^{-2} & * \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\varepsilon = (2 + c\alpha)(2 + 2c\alpha + c^2\alpha^2)$. Поскольку $2 \in R^*$ и $I \neq R$, то $\varepsilon \in R^*$. Далее, для любого элемента $\beta \in I$ в H содержится матрица $\lfloor h_1, t_{12}(\varepsilon^{-1}\beta) \rfloor = t_{12}(-c\alpha\beta)$, т. е. $t_{12}(c\alpha\beta) \in H$. Отсюда ввиду произвольности элементов α, $\beta \in I$

$$t_{12}(ci_2) \in H. \tag{1}$$

Аналогично, заменяя в этих рассуждениях a, c, $d(x)$, $t_{12}(x)$ соответственно на d, b, $d^{-1}(x)$, $t_{21}(x)$, получаем

$$t_{21}(bi_2) \in H. \tag{2}$$

Рассмотрев теперь в качестве h матрицу (2), вместо (1) получим

$$t_{12}(bi_4) \in H. \tag{3}$$

Аналогично, рассмотрев в качестве h матрицу (1), вместо (2) имеем

$$t_{21}(ci_4) \in H. \tag{4}$$

Далее, для произвольного $\gamma \in I$ в H содержится матрица

$$t_{21}^{-1}(\gamma)ht_{21}(\gamma) = \begin{pmatrix} a + b\gamma & b \\ c + (d-a)\gamma - b\gamma^2 & d - b\gamma \end{pmatrix}.$$

Ввиду (1) отсюда следует, что $t_{12}((c + (d-a)\gamma - b\gamma^2)i_2) \in H$. Учитывая (1) и (3), имеем $t_{12}((d-a)\gamma i_2) \in H$. В силу произвольности $\gamma \in I$ из последнего соотношения получим

$$t_{12}((a-d)i_3) \in H. \tag{5}$$

Аналогично выводится включение

$$t_{21}((a-d)i_3) \in H. \tag{6}$$

Из (1)–(6) окончательно имеем $H \geq E_{J'}$, где $J' = J(h) \cdot I^4$. Ввиду произвольности матрицы $h \in H$ отсюда получим $H \geq E_J$, где $J = J(H) \cdot I^4$.

Подгруппы H^g, $g \in SL_2(R)$, также нормализуются нормальной подгруппой K_I. Поскольку $J(H^g) = J(H)$, только что доказанное включение дает $H^g \geq E_J$, где $J = J(H) \cdot I^4$. Отсюда $H \geq E_J^g$ для всех $g \in SL_2(R)$. Поэтому H содержит нормальную подгруппу группы $SL_2(R)$, порожденную подгруппой E_J, которая согласно [7, теорема III.2] совпадает с K_J. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если $|R/M| \neq 3$ и подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J = J(H) \cdot I^4$.*

Доказательство. Если $I \neq R$, то утверждение следует из леммы 1, если же $I = R$, то — из [8] (см. также [9, с. 245–250]).

Теорема 1. *Пусть R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $|R/M| \neq 3$. Пусть $SL_2(R) \leq G \leq GL_2(R)$. Если $H \lhd^d G$, то*

$$K_{J^{f(d)}} \leq H \leq Z_J,$$

где $J = J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{3}(4^d - 1)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы из [10] и ведется по субнормальной глубине d подгруппы H.

Пусть $d = 1$. Тогда H нормализуется подгруппой $K_R = SL_2(R)$ и по лемме 2 $H \geq K_J$, где $J = J(H)$.

Пусть теперь $d > 1$ и утверждение теоремы выполнено для всех подгрупп $M \lhd^{d-1} G$. Тогда $H \lhd M$ для некоторой такой подгруппы M и $K_W \leq M$, где $W = J(M)^{f(d-1)}$. Таким образом, H нормализуется подгруппой K_W, а следовательно, по лемме 2 $H \geq K_{J \cdot W^4}$. Так как $J = J(H) \subseteq J(M)$, то

$$J \cdot W^4 \supseteq J^{4f(d-1)+1} = J^{f(d)},$$

где $f(d) = \frac{1}{3}(4^d - 1)$. Поэтому $H \geq K_{J^{f(d)}}$. Включение $H \leq Z_J$ очевидно.

§ 2. О субнормальных подгруппах двумерных линейных групп над полными кольцами

В этом параграфе R — (1,6)-полное, (2,4)-полное или (3,3)-полное кольцо с обратимым элементом 2.

Примерами таких колец являются полулокальные кольца и кольца размерности 0 с обратимым элементом 2, у которых каждое поле вычетов содержит более пяти элементов.

Лемма 3. *Если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J = J(H) \cdot I^4$.*

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $d(q)$ — матрицы указанного выше вида (лемма 1) и $\alpha \in I$. Согласно определению кольца R существует такой элемент $x \in R$, что все элементы x, $1 + c\alpha x$, $2 + c\alpha x$, $2 + 2c\alpha x + c^2\alpha^2 x^2$ принадлежат R^*. Пусть теперь $q = 1 + c\alpha x$, $v = a\alpha x(2 + c\alpha x)$. Тогда H содержит матрицу

$$h_1 = [h, d(q)t_{12}(v)] = \begin{pmatrix} q^{-2} & * \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\varepsilon = x(2 + c\alpha x)(2 + 2c\alpha x + c^2\alpha^2 x^2) \in R^*$. Для любого элемента $\beta \in I$ подгруппе H принадлежит матрица $[h_1, t_{12}(\varepsilon^{-1}\beta)] = t_{12}(-c\alpha\beta)$, т. е. $t_{12}(c\alpha\beta) \in H$.

Ввиду произвольности элементов $\alpha, \beta \in I$ отсюда получаем $t_{12}(ci_2) \in H$.

Далее доказательство продолжится точно так же, как и в случае леммы 1.

Теорема 2. *Пусть R — $(1,6)$-полное, $(2,4)$-полное или $(3,3)$-полное кольцо с обратимым элементом 2 и $SL_2(R) \leq G \leq GL_2(R)$. Если $H \lhd^d G$, то*

$$K_{J^{f(d)}} \leq H \leq Z_J,$$

где $J = J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{3}(4^d - 1)$.

Доказательство теоремы ввиду леммы 3 ничем не отличается от доказательства теоремы 1.

Напомним, что если в кольце R разрешимо уравнение $axa = a$ для каждого $a \in R$, то R называется *регулярным* (или *регулярным по Нейману*) *кольцом.*

Следствие 1. *Пусть R — коммутативное регулярное кольцо с обратимыми элементами 2, 3, 5 и $SL_2(R) \leq G \leq GL_2(R)$. Тогда каждая субнормальная подгруппа группы G является ее нормальной подгруппой.*

Доказательство. Каждое поле вычетов такого регулярного кольца имеет не менее семи элементов, поэтому оно содержится в каждом из колец теоремы 2. Пусть теперь H — субнормальная подгруппа группы G. Тогда согласно теореме 2 имеем $K_{J^n} \leq H \leq Z_J$, где $J = J(H)$ и n — натуральное число. В коммутативном регулярном кольце $J^n = J$ для любого идеала J и любого натурального числа n. Поэтому $K_J \leq H \leq Z_J$. Нормальность такой подгруппы H очевидна: $[G, H] \leq [G, Z_J] \leq K_J \leq H$.

Из теорем 1 и 2 получим

Следствие 2. *Пусть R — любое из следующих двух колец:*

1) R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $|R/M| \neq 3$;

2) R — $(1,6)$-полное, $(2,4)$-полное или $(3,3)$-полное кольцо с обратимым элементом 2.

Подгруппа H субнормальна в группе $GL_2(R)$ тогда и только тогда, когда

$$K_{J^n} \leq H \leq Z_J \tag{7}$$

для некоторого идеала J кольца R и некоторого целого числа $n \geq 1$. Наименьшее такое n и субнормальная глубина d подгруппы H связаны соотношением

$$d - 1 \leq n \leq \frac{1}{3}(4^d - 1).$$

Доказательство. Если $H \lhd^d GL_2(R)$, то согласно теоремам 1 и 2 условие (7) выполняется для $J = J(H)$ и $n = f(d)$. Обратно, пусть выполнено (7) для некоторого идеала J и целого числа n. Так как Z_J/K_{J^n} — нильпотентная группа ступени $\leq n$ (в ней имеется центральная матрешка $Z_J^* \geq Z_{J^2}^* \geq \cdots \geq Z_{J^n}^* \geq 1$, где звездочка обозначает факторизацию по K_{J^n}), то ее подгруппа H/K_{J^n} субнормальна в Z_J/K_{J^n} и имеет субнормальную глубину $\leq n$ (см. [11, теорема 16.2.2]). Поэтому H субнормальна в $GL_2(R)$ и имеет субнормальную глубину $\leq n+1$.

В заключение параграфа заметим, что кольца теоремы 2 содержат в себе кольца теоремы 1, за исключением случая $|R/M| = 5$.

§ 3. О субнормальных подгруппах симплектических групп над локальными кольцами

В этом параграфе мы улучшим описание субнормальных подгрупп симплектических групп, данное в [6] (мы сохраняем определения и обозначения работы [6]).

Теорема 3. *Пусть R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $\dim V(R) \geq 4$. Если подгруппа H группы $\mathrm{Sp}(V)$ нормализуется подгруппой $\mathrm{SSp}(V, I)$, то $H \geq H' \geq \mathrm{SSp}(V, J(H) \cdot I^5)$, где $H' = [H, \mathrm{SSp}(V, I)]$.*

Доказательство. Для доказательства этой теоремы достаточно повторить доказательство теоремы 1 из [6], использовав при этом в доказательстве предложения 1 вместо включения (20) работы [3] включение (1) настоящей работы. Тогда выражение i_5 в этом предложении заменится выражением i_4, поэтому в предложении 2 идеал I^5 заменится идеалом I^4, наконец, идеал I^6 в теореме 1 работы [6] заменится большим идеалом I^5. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть R — локальное кольцо с обратимым элементом 2 и $\dim V(R) \geq 4$. Если $H \lhd^d \mathrm{Sp}(V)$, то*

$$\mathrm{SSp}(V, J^{f(d)}) \leq H \leq \mathrm{GSp}(V, J),$$

где $J = J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{4}(5^d - 1)$.

Доказательство теоремы ввиду теоремы 3 ничем не отличается от доказательства теоремы 1.

Следствие. *Подгруппа H субнормальна в группе $\mathrm{Sp}(V)$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{SSp}(V, J^n) \leq H \leq \mathrm{GSp}(V, J),$$

для некоторого идеала J кольца R и некоторого целого числа $n \geq 1$. Наименьшее такое n и субнормальная глубина d подгруппы H связаны соотношением

$$d - 1 \leq n \leq \frac{1}{4}(5^d - 1).$$

Доказательство следствия ввиду теоремы 4 ничем, по сути, не отличается от доказательства следствия 2 (см. также [12, следствие 1]).

В заключение отметим, что в работе [13] для субнормальных подгрупп общих линейных групп получена оценка $f(d) \geq 2^d - 1$. Таким образом, в рассмотренных нами случаях двумерных линейных групп для улучшения функции $f(d)$ остаются только следующие две возможности: $f(d) = 2^d - 1$ и $f(d) = \frac{1}{2}(3^d - 1)$. Получение первой из этих функций над каким бы то ни было кольцом, очевидно, технически невозможно. То же самое относится ко второй функции, а также к функции $f(d) = \frac{1}{3}(4^d - 1)$ в симплектическом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arrell D. G.* The subnormal subgroup structure of the infinite general linear group // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1982. V. 25, N 1. P. 81–86.
2. *Vavilov N. A.* A note on the subnormal structure of general linear groups // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1990. V. 107, N 2. P. 193–196.
3. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение двумерных линейных групп над кольцами, близкими к полям // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 4. С. 414–425.
4. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение двумерных линейных групп над полными кольцами // Мат. заметки. 2002. Т. 71, № 6. С. 924–930.
5. *Arrell D. G.* The subnormal subgroup structure of the infinite symplectic group // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1982. V. 25, N 3. P. 209–216.
6. *Тажетдинов С.* Строение субнормальных подгрупп симплектических групп над локальными кольцами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 665–669.
7. *McDonald B. R.* Gl_2 of rings with many units // Comm. Algebra. 1980. V. 8, N 9. P. 869–888.
8. *Klingenberg W.* Lineare Gruppen uber localen Ringen // Amer. J. Math. 1961. V. 83, N 1. P. 137–153.
9. *McDonald B. R.* Geometric algebra over local rings. New York: Marcel Dekker, Inc., 1976.
10. *Wilson J. S.* The normal and subnormal structure of general linear groups // Proc. Cambridge Phil. 1982. V. 71, N 2. P. 163–177.
11. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
12. *Тажетдинов С.* Субнормальное строение симплектических групп над локальными кольцами // Мат. заметки. 1985. Т. 36, № 2. С. 289–298.
13. *Vaserstein L. N.* The subnormal structure of general linear groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1986. V. 99, N 3. P. 425–431.

Статья поступила 21 июня 2006 г.

Тажетдинов Сагалатдин
Каракалпакский гос. университет им. Бердаха, математический факультет,
ул. Ч. Абдирова, 1, Нукус 742012, Узбекистан
Tajetdinov2003@mail.ru