*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1*

*УДК 517.946*

# О НОВЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕАВТОНОМНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

**Э. И. Семенов**

**Аннотация.** Получены новые формулы точных аналитических решений неавтономного эллиптического уравнения Лиувилля в двумерном координатном пространстве со свободной функцией, зависящей специальным образом от произвольной гармонической функции. Предъявлены новые точные решения волнового уравнения Лиувилля с двумя произвольными функциями. Представлены оригинальные формулы общего решения для классического (автономного) и волнового уравнений Лиувилля. Приведены некоторые преобразования эквивалентности для эллиптического уравнения Лиувилля, зависящие от сопряженных гармонических функций. В частности, указано преобразование, приводящее исследуемое уравнение к автономному виду.

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение Лиувилля, волновое уравнение Лиувилля, многомерное точное решение, преобразование эквивалентности, сопряженная гармоническая функция.

## Введение

В работе приведены результаты по построению точных аналитических решений в виде конечных формул неавтономного эллиптического уравнения Лиувилля

$$\Delta u = \varphi(x, y)e^{\lambda u}, \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(x, y), \tag{1}$$

и неавтономного волнового уравнения Лиувилля

$$\Box u = (F + G)e^{\lambda u}, \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(x, t). \tag{1$'$}$$

Здесь $F \stackrel{\triangle}{=} F(x + at)$, $G \stackrel{\triangle}{=} G(x - at)$, $\lambda, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\Delta\cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\cdot$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^2$, $\Box\cdot = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot$ — оператор Даламбера. Предполагается, что функция $\varphi(x, y)$ зависит определенным образом от произвольной гармонической функции, при этом сама функция $\varphi(x, y)$ может быть и не гармонической. Уравнения (1), (1$'$) встречаются во многих прикладных задачах современной математической физики, особенно при исследовании процессов и явлений в нелинейных средах, например, в теории полупроводников, физике плазмы, квантовой оптике и т. д. Поэтому представляет интерес описание явных аналитических решений указанных уравнений. Отметим, что некоторые точные решения уравнения (1), когда $\varphi(x, y)$ является голоморфной функцией специального вида, рассматривались в [1]. Данная работа примыкает к исследованиям [2, 3], в которых изучалось уравнение быстрой диффузии в двумерном и трехмерном координатных пространствах. Эллиптическое уравнение Лиувилля

(1) является стационарным аналогом параболического уравнения нелинейной диффузии с линейным источником (стоком)

$$w_t = \Delta \ln w - \varphi(x,y)w,$$

где $w \overset{\triangle}{=} w(x,y,t)$. Кроме того, в настоящей статье отдельное внимание уделено некоторым преобразованиям эквивалентности для уравнения (1), с использованием которых конструируются новые точные решения исследуемого уравнения.

## 1. Точные решения уравнений (1), (1′)

В этом разделе мы представим явные формулы точных аналитических решений эллиптического уравнения Лиувилля (1) и волнового уравнения (1′).

**Теорема.** *Если функция $\varphi(x,y)$ задана соотношением $\varphi(x,y) = f(\eta)$, где*

$$f(\eta) = \frac{1}{p(\eta)} \frac{d^2}{d\eta^2} \ln p(\eta), \tag{2}$$

*а $p(\eta)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция аргумента $\eta = \eta(x,y)$, причем $\Delta\eta = 0$, то неавтономное уравнение Лиувилля (1) обладает точным решением следующего вида:*

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{1}{\lambda} p(\eta) |\nabla\eta|^2 \right), \quad |\nabla\eta|^2 = \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial\eta}{\partial y} \right)^2. \tag{3}$$

Доказательство. Убедимся в справедливости данной теоремы путем непосредственной подстановки решения (3) в уравнение (1). В результате после несложных выкладок получим следующее равенство:

$$\frac{1}{\lambda} \frac{p'(\eta)}{p(\eta)} \Delta\eta + \frac{1}{\lambda} \frac{p''(\eta)p(\eta) - p'^2(\eta)}{p^2(\eta)} |\nabla\eta|^2 + \frac{1}{\lambda} \Delta \ln |\nabla\eta|^2 = \frac{1}{\lambda} f(\eta)p(\eta)|\nabla\eta|^2. \tag{4}$$

Здесь и далее штрих означает производную по соответствующему аргументу. Так как $\eta(x,y)$ является гармонической функцией, первое слагаемое в левой части равенства обращается в нуль. Покажем, что выражение $\Delta \ln |\nabla\eta|^2$ также равно нулю. Для удобства выкладок введем обозначение $\psi(x,y) = |\nabla\eta|^2$, тогда

$$\Delta \ln \psi = \left[ \psi \left( \psi_{xx} + \psi_{yy} \right) - \left( \psi_x^2 + \psi_y^2 \right) \right] \psi^{-2}. \tag{5}$$

Последовательно вычисляя необходимые частные производные, находим

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 2\bigl(\eta_{xx}^2 + \eta_{yy}^2\bigr) + 4\eta_{xy}^2 + 2\eta_x \bigl(\eta_{xx} + \eta_{yy}\bigr)_x + 2\eta_y \bigl(\eta_{xx} + \eta_{yy}\bigr)_y,$$

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = 8\eta_x\eta_y\eta_{xy}\bigl(\eta_{xx} + \eta_{yy}\bigr) + 4\eta_x^2\bigl(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\bigr) + 4\eta_y^2\bigl(\eta_{yy}^2 + \eta_{xy}^2\bigr).$$

Так как в силу гармоничности $\eta_{xx} = -\eta_{yy}$, последние соотношения примут соответственно вид

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 4\bigl(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\bigr), \quad \psi_x^2 + \psi_y^2 = 4\bigl(\eta_x^2 + \eta_y^2\bigr)\bigl(\eta_{xx}^2 + \eta_{xy}^2\bigr).$$

Следовательно, выражение (5) тождественно обращается в нуль. Таким образом, соотношение (4) приводится к виду

$$\frac{1}{\lambda} \frac{p''(\eta)p(\eta) - p'^2(\eta)}{p^2(\eta)} |\nabla\eta|^2 = \frac{1}{\lambda} f(\eta)p(\eta)|\nabla\eta|^2,$$

которое в силу формулы (2) является тождеством. Теорема доказана. □

Замечание 1. Теорема останется справедливой, если положить $\varphi(x,y) \equiv 1$. В этом случае соотношение (1) есть классическое уравнение Лиувилля

$$\Delta u = e^{\lambda u}, \tag{6}$$

а формула (2) сводится к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) второго порядка $p''(\eta)p(\eta) - p'^2(\eta) = p^3(\eta)$.

В качестве примера приведем несколько точных решений уравнения (6). Последнее ОДУ простой заменой $p(\eta) = \exp\{z(\eta)\}$ приводится к виду

$$z''(\eta) = e^{z(\eta)}. \tag{ODE}$$

Интегрируя его один раз, имеем ОДУ первого порядка $z'^2(\eta) = 2e^{z(\eta)} + C_1$ и, интегрируя снова, полагая константу равной $C_1 = 0$, $C_1 = \nu^2 > 0$, $C_1 = -\nu^2 < 0$, придем к решениям трех типов:

$$e^{z_1(\eta)} = \frac{2}{(C-\eta)^2}, \quad e^{z_2(\eta)} = \frac{2\nu^2}{\operatorname{sh}^2(\nu\eta + C)}, \quad e^{z_3(\eta)} = \frac{2\nu^2}{\sin^2(\nu\eta + C)}.$$

Поскольку $C \in \mathbb{R}$ — произвольная постоянная, то, осуществив сдвиг $C \mapsto C + \pi/2$, из третьего решения получим еще одно решение уравнения (ODE):

$$e^{z_4(\eta)} = \frac{2\nu^2}{\cos^2(\nu\eta + C)}.$$

Таким образом, по формуле (3) выпишем известные (см., например, [4]) выражения для общего решения уравнения Лиувилля (6) при $\lambda > 0$, не забывая о том, что функции $p_i(\eta)$ и $e^{z_i(\eta)}$ связаны соотношением $p_i(\eta) = e^{z_i(\eta)}$, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{gathered} u_1(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2|\nabla\eta|^2}{\lambda(C-\eta)^2}\right), \quad u_2(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^2}{\lambda\operatorname{sh}^2(\nu\eta + C)}\right), \\ u_3(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^2}{\lambda\sin^2(\nu\eta + C)}\right), \quad u_4(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^2}{\lambda\cos^2(\nu\eta + C)}\right). \end{gathered} \tag{7}$$

Формулы (7) определяют общее решение уравнения (6) в том смысле, что $\eta(x,y)$ есть произвольная гармоническая функция. Если $\lambda < 0$, то уравнение (6) обладает точным решением следующего вида:

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{-2\mu^2|\nabla\eta|^2}{\lambda\operatorname{ch}^2(\mu\eta + C)}\right).$$

Это решение следует из функции $u_4(x,y)$, если положить произвольную постоянную $\nu$ равной $\mu\sqrt{-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$. При доказательстве теоремы было показано, что функция $\ln|\nabla\eta|^2$ является гармонической, если $\Delta\eta(x,y) = 0$. Поэтому, осуществив замену $\eta \mapsto \ln|\nabla\eta|^2$, из соотношений (7) получим оригинальные формулы точных решений уравнения Лиувилля (6) следующего вида:

$$\begin{gathered} u_5(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2|\nabla\ln|\nabla\eta|^2|^2}{\lambda(C - \ln|\nabla\eta|^2)^2}\right), \\ u_6(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\ln|\nabla\eta|^2|^2}{\lambda\operatorname{sh}^2(\nu\ln|\nabla\eta|^2 + C)}\right), \\ u_7(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\ln|\nabla\eta|^2|^2}{\lambda\sin^2(\nu\ln|\nabla\eta|^2 + C)}\right), \\ u_8(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\ln|\nabla\eta|^2|^2}{\lambda\cos^2(\nu\ln|\nabla\eta|^2 + C)}\right). \end{gathered} \tag{7'}$$

К этим выражениям можно также применить преобразование $\eta \mapsto \ln|\nabla\eta|^2$. Так как функция $\eta(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в $\mathbb{R}^2$, то, задавая ее как $\eta(x,y) = \tilde{f}(x+iy) + \tilde{g}(x-iy)$, из соотношений $(7')$ элементарными преобразованиями получим формулы точных решений волнового уравнения Лиувилля в канонической форме $u_{xy} = e^{\lambda u}$ с произвольными функциями $f(x)$, $g(y)$:

$$u_5(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{\lambda(f(x)+g(y))^2}\right), \quad u_6(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{\lambda\operatorname{sh}^2(f(x)+g(y))}\right),$$

$$u_7(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{\lambda\sin^2(f(x)+g(y))}\right), \quad u_8(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{\lambda\cos^2(f(x)+g(y))}\right).$$

Из этих соотношений несложно получить точные решения классического волнового уравнения Лиувилля

$$\Box u = e^{\lambda u}, \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(x,t), \tag{6'}$$

в следующих формах:

$$u_5(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda(F+G)^2}\right), \quad u_6(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda\operatorname{sh}^2(F+G)}\right),$$

$$u_7(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda\sin^2(F+G)}\right), \quad u_8(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda\cos^2(F+G)}\right).$$

Здесь $F \stackrel{\triangle}{=} F(x+at)$, $G \stackrel{\triangle}{=} G(x-at)$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Поскольку в этих выражениях функции $F$, $G$ произвольны, эти формулы одновременно определяют общее решение уравнения $(6')$. Отметим, что решение $u_5(x,t)$ уравнения $(6')$ с точностью до переобозначений совпадает с выражением общего решения, приведенным в [5].

Теперь если вместо эллиптического уравнения Лиувилля (1) рассмотрим волновое уравнение $(1')$ с двумя произвольными функциями $F(x+at)$, $G(x-at)$, то имеет место следующий результат.

**Утверждение 1.** *Неавтономное волновое уравнение Лиувилля* $(1')$ *обладает точным решением*

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{12\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda(F+G)^3}\right).$$

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственной подстановкой решения в указанное уравнение. Любопытно, что если обобщить уравнение $(1')$ как

$$\Box u = Z(F+G)e^{\lambda u}, \tag{1''}$$

то данное нелинейное волновое уравнение имеет точное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{m\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda Z^3(F+G)}\right),$$

где функция $Z \stackrel{\triangle}{=} Z(F+G)$ удовлетворяет нелинейному автономному ОДУ вида

$$Z''Z - Z'^2 + \frac{m}{12} = 0, \quad m \neq 0.$$

Это ОДУ легко интегрируется, и, например, при

$$Z = \exp(F+G) - \frac{m}{48}\exp(-F-G)$$

волновое уравнение

$$\Box u = \exp(\lambda u + F + G) - k\exp(\lambda u - F - G)$$

обладает точным решением

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{48k\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda(e^{F+G} - ke^{-F-G})^3}\right).$$

Если в уравнении ($1''$) вместо суммы двух функций $F(x+at)$, $G(x-at)$ рассмотреть их произведение $p = F(x+at)G(x-at)$, то волновое уравнение Лиувилля

$$\Box u = Z(p)e^{\lambda u}$$

имеет точное решение

$$u(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{12\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial t}}{a\lambda Z^3(p)}\right),$$

где функция $Z(p)$ может быть трех видов:

$$Z(p) = \sin(\ln p)\sqrt{p}, \quad Z(p) = \cos(\ln p)\sqrt{p}, \quad Z(p) = \frac{p^2-1}{2\sqrt{p}}.$$

Пример 1. Поставим задачу отыскания решений уравнения

$$\Delta u = e^{\eta(x,y)+\lambda u}. \tag{8}$$

Здесь $\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной. Заметим, что решения уравнения (8) можно получить из формул (7), ($7'$), так как простой заменой $\tilde{u} = u + \frac{1}{\lambda}\eta(x,y)$ оно сводится к уравнению Лиувилля (6) на функцию $\tilde{u}$. Оставим этот факт в стороне, сейчас важнее на этом простом примере продемонстрировать методику нахождения решений уравнения (1), используя доказанную теорему. Итак, пусть $\varphi(x,y) = \exp(\eta(x,y))$. В этом случае, чтобы выписать явные точные решения уравнения (8), необходимо проинтегрировать следующее нелинейное ОДУ второго порядка: $p(\eta)p''(\eta) - p'^2(\eta) = e^\eta p^3(\eta)$. Оно легко интегрируется и в зависимости от значений произвольных постоянных имеет решения

$$p_1(\eta) = \frac{2C_1^2(\operatorname{th}^2(\tilde{\eta})-1)}{\exp(\eta)}, \quad p_2(\eta) = \frac{2C_1^2(\operatorname{cth}^2(\tilde{\eta})-1)}{\exp(\eta)},$$

$$p_3(\eta) = \frac{2C_1^2(\operatorname{tg}^2(\tilde{\eta})+1)}{\exp(\eta)}, \quad p_4(\eta) = \frac{2C_1^2(\operatorname{ctg}^2(\tilde{\eta})+1)}{\exp(\eta)}, \quad p_5 = \frac{2}{(C_1-\eta)^2\exp(\eta)},$$

где $\tilde{\eta} = C_1\eta + C_2$. Таким образом, неавтономное уравнение Лиувилля (8) обладает по формуле (3) точными решениями вида

$$\begin{aligned}
u_1(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2C_1^2(\operatorname{th}^2(\tilde{\eta})-1)}{\lambda\exp(\eta)}|\nabla\eta|^2\right),\\
u_2(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2C_1^2(\operatorname{cth}^2(\tilde{\eta})-1)}{\lambda\exp(\eta)}|\nabla\eta|^2\right),\\
u_3(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2C_1^2(\operatorname{tg}^2(\tilde{\eta})+1)}{\lambda\exp(\eta)}|\nabla\eta|^2\right),\\
u_4(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2C_1^2(\operatorname{ctg}^2(\tilde{\eta})+1)}{\lambda\exp(\eta)}|\nabla\eta|^2\right),\\
u_5(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2|\nabla\eta|^2}{\lambda(C_1-\eta)^2\exp(\eta)}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Так как в этих соотношениях $\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, то, конкретизируя ее значения, можно конструировать точные решения соответствующего семейства уравнений (8).

Пусть

$$\eta(x,y) = \frac{k}{2}\ln|x^2+y^2|, \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

тогда уравнение (8) преобразуется к физически важному классу уравнений вида

$$\Delta u = (x^2+y^2)^{\frac{k}{2}} e^{\lambda u}. \tag{10}$$

Например, оно встречается в задачах электро- и магнитостатики. Беря в функциях $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ произвольные постоянные $C_1 = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $C_2 = \ln\nu$, $\nu \in \mathbb{R}^+$, убедимся, что уравнение (10) по формулам (9) имеет следующие точные радиально-симметричные по пространственным переменным решения:

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{-8k^2m^2\nu^2(x^2+y^2)^{km-\frac{k}{2}-1}}{\lambda[\nu^2(x^2+y^2)^{km}+1]^2}\right) \quad \text{при } \lambda<0,\\ u_2(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8k^2m^2\nu^2(x^2+y^2)^{km-\frac{k}{2}-1}}{\lambda[\nu^2(x^2+y^2)^{km}-1]^2}\right) \quad \text{при } \lambda>0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ниже (см. разд. 2) мы приведем другие, анизотропные по пространственным переменным, решения уравнения (10).

Обратим внимание на тот факт, что если в выражениях (11) произвольную постоянную $m$ выбрать как $m = \frac{k+2}{2k}$, $k > -2$, то получим решения, ограниченные в начале координат. Поэтому если мы рассмотрим краевую задачу с условием Дирихле в круге единичного радиуса с центром в начале координат

$$\Delta u = (x^2+y^2)^{\mu} e^{\lambda u}, \quad u(x,y)|_{r=1} = 0,$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\mu > -1$, то, в частности, при положительных $\lambda$ из второй формулы (11) заключаем, что эта краевая задача имеет следующее решение:

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8(\mu+1)^2\nu^2}{\lambda[\nu^2(x^2+y^2)^{\mu+1}-1]^2}\right). \tag{12}$$

При этом краевое условие дает $(\nu^2-1)^2 = 8(\mu+1)^2\nu^2$. Таким образом, у данной краевой задачи Дирихле есть два решения (12) со следующими значениями:

$$\nu^2 = 4\mu^2+8\mu+5-4(\mu+1)\sqrt{\mu^2+2\mu+3/2},$$
$$\nu^2 = 4\mu^2+8\mu+5+4(\mu+1)\sqrt{\mu^2+2\mu+3/2}.$$

Если в уравнении (10) сделать замену переменных $u(x,y) \mapsto u(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (возможность такого преобразования связана с инвариантностью уравнения (10) относительно однопараметрической группы вращений в плоскости $(x,y)$ [6]), то оно трансформируется к неавтономному нелинейному ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = r^k e^{\lambda u},$$

которое по формулам (11) обладает следующими точными решениями двух видов для $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$:

$$u_1(r) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{-8k^2m^2\nu^2r^{2km-k-2}}{\lambda[\nu^2r^{2km}+1]^2}\right), \quad u_2(r) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8k^2m^2\nu^2r^{2km-k-2}}{\lambda[\nu^2r^{2km}-1]^2}\right).$$

Пример 2. Требуется найти частное точное решение следующего уравнения:

$$\Delta u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} e^{\lambda u}. \tag{13}$$

Здесь функция $\varphi(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ не является гармонической, поэтому, чтобы построить решение указанного уравнения, воспользовавшись приведенной теоремой, мы должны эту функцию представить в виде соотношения, которое содержало бы гармоническую функцию. Это легко сделать, если использовать гармоническую функцию $\eta(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. Тогда наша функция будет представима в виде $\varphi(x,y) = \cos(2\eta)$. В этом случае уравнение (13) перепишется так:

$$\Delta u = \cos(2\eta) e^{\lambda u}. \tag{13$'$}$$

По условиям теоремы, чтобы выписать решение уравнения (13′), мы должны предъявить любое нетривиальное решение следующего ОДУ:

$$p(\eta)p''(\eta) - p'^2(\eta) = \cos(2\eta)p^3(\eta).$$

Это уравнение имеет частное решение $p(\eta) = \frac{12}{\cos^3(2\eta)}$. Таким образом, из соотношения (3) получим, что решение уравнения (13′) выражается формулой

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{12}{\lambda\cos^3(2\eta)}|\nabla\eta|^2\right). \tag{14}$$

Отсюда для гармонической функции $\eta(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ окончательно имеем частное решение исследуемого уравнения (13):

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{12(x^2+y^2)^2}{\lambda(x^2-y^2)^3}\right).$$

Заметим, что формула (14) обеспечивает решение уравнения (13′) при любой гармонической функции $\eta(x,y)$.

Пример 3. Пусть $\eta(x,y)$ — гармонический полином пятой степени $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$. Тогда уравнение $\Delta u = \cos(2x^5 - 20x^3y^2 + 10xy^4)\, e^{\lambda u}$ по формуле (14) обладает частным точным решением

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{300(x^2+y^2)^4}{\lambda\cos^3(2x^5 - 20x^3y^2 + 10xy^4)}\right).$$

Ранее, в работе [2], при исследовании параболического уравнения быстрой диффузии было найдено точное решение стационарного уравнения Лиувилля

$$\Delta u = \eta(x,y)e^{\lambda u}$$

в следующем виде:

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{3}{\lambda}\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta^3}\right),$$

где $\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной. Сравнивая это решение с выражением (3), можно заметить, что функция $p(\eta) = 3\eta^{-3}$ является частным решением уравнения (2) при $f(\eta) = \eta$. С другой стороны, ОДУ (2) с функцией более общего вида $f(\eta) = \eta^k$ имеет частное решение $p(\eta) = (k+2)\eta^{-(k+2)}$, $k \neq -2$. Таким образом, из теоремы вытекает

**Следствие.** *Неавтономное уравнение Лиувилля*

$$\Delta u = \eta^k(x,y)e^{\lambda u}, \quad k \in \mathbb{R},\ k \neq -2, \tag{15}$$

*где $\eta(x,y)$ — произвольная гармоническая функция, отличная от постоянной, обладает точным решением вида*

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{k+2}{\lambda}\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta^{k+2}}\right).$$

В случае, когда $k=-2$, для представления формулы явного решения уравнения (15) по условию теоремы все сводится к разрешимости нелинейного неавтономного ОДУ второго порядка

$$p''(\eta)p(\eta) - p'^2(\eta) = \eta^{-2}p^3(\eta),$$

которое, в свою очередь, редуцируется к уравнению Абеля II рода

$$w(t)w'(t) = w(t) + e^t.$$

Читателя, интересующегося аналитическими решениями уравнения Абеля II рода, отсылаем к справочнику [7].

## 2. Некоторые преобразования эквивалентности для уравнения (1)

В этом разделе мы рассмотрим некоторые преобразования эквивалентности для неавтономного эллиптического уравнения Лиувилля. Такие преобразования играют важную роль в задачах математической физики, поскольку позволяют находить новые решения, используя известные более простые решения [8, 9].

В статье [3] доказано, что уравнение Лиувилля (6) инвариантно относительно преобразования

$$u(x,y) = v(\xi,\eta) + \frac{1}{\lambda}\ln|\nabla\eta|^2, \tag{16}$$

где $\xi=\xi(x,y)$, $\eta=\eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции. Покажем, что аналогичным свойством обладает уравнение (1).

**Утверждение 2.** *Если $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, то неавтономное уравнение Лиувилля* (1) *с помощью преобразования* (16) *редуцируется к уравнению вида*

$$\Delta_{\xi\eta}v = f(\eta)e^{\lambda v}, \quad v = v(\xi,\eta), \quad \Delta_{\xi\eta}\cdot \equiv \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\cdot + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\cdot, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{17}$$

Доказательство. Прежде чем приступить к доказательству, напомним, что сопряженные гармонические функции $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ обладают следующими свойствами:

$$(\nabla\xi,\nabla\eta) = 0, \quad |\nabla\xi|^2 = |\nabla\eta|^2. \tag{18}$$

После подстановки выражения (16) в уравнение (1) и ряда несложных выкладок с учетом свойств (18) придем к равенству

$$|\nabla\eta|^2\Delta_{\xi\eta}v + \frac{1}{\lambda}\Delta\ln|\nabla\eta|^2 = f(\eta)e^{\lambda v}|\nabla\eta|^2.$$

Как показано в доказательстве теоремы, функция $\ln|\nabla\eta|^2$ является гармонической, поэтому второе слагаемое в левой части равенства обращается в нуль. Сокращая на отличное от нуля выражение $|\nabla\eta|^2$, из последнего соотношения получим уравнение (17), что и требовалось доказать. □

Пример 4. Если уравнение (10) рассматривать как уравнение с переменными $\xi$, $\eta$, где $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, то, полагая, например, $\xi = \cos(x)\operatorname{ch}(y)$, $\eta = \sin(x)\operatorname{sh}(y)$, из формул (11) преобразованием (16) получим, что уравнение

$$\Delta u = (\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))^{k/2} e^{\lambda u}$$

обладает следующими точными анизотропными по пространственным переменным решениями:

$$u_1(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8k^2m^2\nu^2(\cos^2(x) - \operatorname{sh}^2(y) - 1)(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))^{km-\frac{k}{2}-1}}{\lambda[\nu^2(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))^{km} + 1]^2}\right)$$

при $\lambda < 0$,

$$u_2(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8k^2m^2\nu^2(\sin^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))^{km-\frac{k}{2}-1}}{\lambda[\nu^2(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y))^{km} - 1]^2}\right)$$

при $\lambda > 0$. Если в этих функциях произвольную постоянную $m$ выбрать в виде $m = 1/k$ и устремить $k$ к 0, то получим решения классического уравнения Лиувилля (6) следующего вида:

$$u_1(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\nu^2[\cos^2(x) - \operatorname{sh}^2(y) - 1]}{\lambda[\nu^2(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)) + 1]^2}\right) \quad \text{при } \lambda < 0,$$

$$u_2(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\nu^2[\sin^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)]}{\lambda[\nu^2(\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)) - 1]^2}\right) \quad \text{при } \lambda > 0.$$

**Утверждение 3.** *Неавтономное уравнение Лиувилля*

$$\Delta u = |\nabla\eta|^{2m} e^{\lambda u}, \quad m \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

*преобразованием вида*

$$u(x,y) = v(\xi,\eta) + \frac{1-m}{\lambda}\ln|\nabla\eta|^2, \tag{20}$$

*где $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ — сопряженные гармонические функции, сводится к классическому уравнению Лиувилля $\Delta_{\xi\eta}v = e^{\lambda v}$.*

В справедливости данного утверждения можно убедиться непосредственным применением преобразования (20) к уравнению (19).

В разд. 1 найдены явные решения уравнения (6) (см. формулы (7)). Используя их, из утверждения 2 получим точные решения уравнения (19):

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2|\nabla\eta|^{2(1-m)}}{\lambda(C-\eta)^2}\right), \quad u_2(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^{2(1-m)}}{\lambda\operatorname{sh}^2(\nu\eta + C)}\right), \\ u_3(x,y) &= \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^{2(1-m)}}{\lambda\sin^2(\nu\eta + C)}\right), \quad u_4(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2|\nabla\eta|^{2(1-m)}}{\lambda\cos^2(\nu\eta + C)}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Из этих формул, конкретизируя вид гармонической функции $\eta(x,y)$, выпишем новые точные решения уравнения (10). Если $\eta(x,y)$ — произвольный гармонический полином вида

$$\eta(x,y)=(x^2+y^2)^{n/2}\sin(n\psi),\quad \psi(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),\quad n\in\mathbb{N},\ n>\ 1,$$

то из (19) при $m=\frac{k}{2(n-1)}$ следует уравнение (10). Таким образом, по формулам (21) получим точные решения уравнения (10) вида

$$u_1(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2n^2(x^2+y^2)^{n-\frac{k}{2}-1}}{\lambda[nC-\eta(x,y)]^2}\right),$$
$$u_2(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2n^2\nu^2(x^2+y^2)^{n-\frac{k}{2}-1}}{\lambda\,\mathrm{sh}^2(\nu\eta(x,y)+C)}\right),$$
$$u_3(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2n^2(x^2+y^2)^{n-\frac{k}{2}-1}}{\lambda\sin^2(\nu\eta(x,y)+C)}\right),$$
$$u_4(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{2\nu^2n^2(x^2+y^2)^{n-\frac{k}{2}-1}}{\lambda\cos^2(\nu\eta(x,y)+C)}\right).$$

При $n=2$ эти решения будут выглядеть следующим образом:

$$u_1(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8(x^2+y^2)^{1-k/2}}{\lambda(2C-x^2+y^2)^2}\right),$$
$$u_2(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\nu^2(x^2+y^2)^{1-k/2}}{\lambda\,\mathrm{sh}^2(\nu(x^2-y^2)+C)}\right),$$
$$u_3(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\nu^2(x^2+y^2)^{1-k/2}}{\lambda\sin^2(\nu(x^2-y^2)+C)}\right),$$
$$u_4(x,y)=\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8\nu^2(x^2+y^2)^{1-k/2}}{\lambda\cos^2(\nu(x^2-y^2)+C)}\right).$$

В заключение отметим, что приведенная теорема и остальные результаты данной работы не обобщаются на случай трех и более независимых переменных. Это связано с тем фактом, что функция $\ln|\nabla\eta|^2$ является гармонической только в двумерном координатном пространстве.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Сабитов И. Х.* О решениях уравнения $\Delta u=f(x,y)e^{cu}$ в некоторых специальных случаях // Мат. сб. 2001. Т. 196, № 6. С. 89–104.
2. *Семенов Э. И.* Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 862–869.
3. *Семенов Э. И.* Многомерные точные решения квазилинейного параболического уравнения с анизотропной теплопроводностью // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 455–462.
4. *Свирщевский С. Р.* Групповая классификация и инвариантные решения нелинейных полигармонических уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 10. С. 1772–1781.
5. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по нелинейным уравнениям математической физике: Точные решения. М.: Физматлит, 2002.
6. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
7. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.

**8.** *Пухначев В. В.* Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294, № 3. С. 535–538.

**9.** *Пухначев В. В.* Преобразования взаимности радиальных уравнений нелинейной теплопроводности // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 151–163.

*Статья поступила 17 августа 2006 г.*

Семенов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
semenov@icc.ru