Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 510.6

КРИТЕРИЙ РАЗЛОЖИМОСТИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ

Д. К. Пономарёв

Аннотация. Установлена однозначность разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Сформулирован критерий разложимости.

Ключевые слова: разложимая теория, декомпозиция теорий.

Определение 1. Теория $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ называется *разложимой*, если она является дедуктивным замыканием всех предложений некоторых теорий $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ дизъюнктных сигнатур Σ_1, Σ_2, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, в исчислении предикатов сигнатуры Σ (обозначаем $\mathscr{T} = \mathscr{S}_1 \uplus \mathscr{S}_2$). Теории $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2$ будем называть *компонентами* (*разложения*) теории $\mathscr{T}$.

Как правило, при изучении теорий нас будут интересовать нетривиальные разложения, в которых $\Sigma_1 \neq \varnothing \neq \Sigma_2$. При этом будем полагать, что каждая компонента разложения включает все формулы чистого равенства теории $\mathscr{T}$. Тогда каждая компонента $\mathscr{S}_i$ сигнатуры Σ_i включает все предложения сигнатуры Σ_i из теории $\mathscr{T}$. К примеру, если сигнатура Σ состоит только из одного символа A, то любая теория этой сигнатуры имеет только тривиальное разложение.

Сформулируем основную задачу, которую мы исследуем в данной работе. *Рассмотрим теорию $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ, определенную некоторым множеством предложений Φ сигнатуры Σ. Как, исходя из системы аксиом Φ, определить, является ли разложимой теория $\mathscr{T}$?*

Эта задача поставлена Д. Е. Пальчуновым в работе [1]. Интерес к этой проблеме исходит из практики и связан с такими задачами, как разработка систем автоматического доказательства теорем [2] и сопровождение терминологических систем [3, 4].

В данной работе представим решение указанной задачи. В разд. 1 введем понятие неразложимого предложения и заметим, что такие предложения определяют компоненты разложения теории. Далее сформулируем результат об однозначности разложения элементарной теории на неразложимые компоненты. Отметим, что главным теоретико-модельным инструментом исследования в статье служит интерполяционная теорема Крейга [5]. В разд. 2 опишем метод определения компонент разложения по заданной теории. Исходя из этого метода, сформулируем критерий разложимости.

Автор выражает искреннюю благодарность профессору Д. Е. Пальчунову и анонимному рецензенту за ценные рекомендации по улучшению содержания статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–04003–ННИО_а) и DFG project COMO, GZ: 436 RUS 113/829/0-1.

1. Теорема об однозначности разложения

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{P}, \mathscr{Q}$ — теории дизъюнктных сигнатур $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \Sigma$, а φ — некоторое предложение сигнатуры Σ. Если φ следует из объединения теорий $\mathscr{P}, \mathscr{Q}$, то найдутся предложения $\theta \in \mathscr{P}$, $\phi \in \mathscr{Q}$ такие, что $\theta, \phi \vdash \varphi$, причем предложение θ содержит только те символы сигнатуры Σ_1, которые встречаются в φ, и предложение ϕ содержит только те символы сигнатуры Σ_2, которые встречаются в φ.*

Так как $\mathscr{P}, \mathscr{Q} \vdash \varphi$, то найдутся предложения $P \in \mathscr{P}$, $Q \in \mathscr{Q}$, для которых $P,\ Q \vdash \varphi$. Тогда $P \vdash Q \to \varphi$.

Поскольку P и Q — формулы сигнатур Σ_1, Σ_2, не имеющих общих символов, по интерполяционной теореме Крейга найдется предложение θ, содержащее только символы сигнатуры Σ_1, которые присутствуют в φ. При этом $P \vdash \theta$ и $\theta \vdash Q \to \varphi$. Отсюда $Q \vdash \theta \to \varphi$.

Аналогично существует такое предложение ϕ, которое содержит только символы сигнатуры Σ_2, включенные в формулу φ, для которого $Q \vdash \phi$, $\phi \vdash \theta \to \varphi$. Следовательно, $\theta, \phi \vdash \varphi$. □

Определение 2. Рассмотрим теорию $\mathscr{T}$ и предложение $\varphi \in \mathscr{T}$. Назовем φ *разложимым в теории* $\mathscr{T}$, если найдутся такие предложения $\theta \in \mathscr{T}$, $\psi \in \mathscr{T}$, которые включают символы только из φ, не содержат общих сигнатурных символов, не являются формулами чистого равенства и для которых выполнена секвенция $\theta, \psi \vdash \varphi$. При этом θ и ψ будем называть *фрагментами разложения* φ.

Если таких θ, ψ не существует, то предложение φ будем называть *неразложимым в теории* $\mathscr{T}$.

Лемма 1. *Рассмотрим теорию $\mathscr{T}$ и некоторое предложение $\varphi \in \mathscr{T}$. Тогда в теории $\mathscr{T}$ найдется последовательность неразложимых предложений $\phi_1, \ldots, \phi_n$ таких, что $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$.*

Рассмотрим множество $T_1 = \{\varphi\}$. Возьмем фрагменты разложения ϕ, ψ для предложения φ, если таковые найдутся в теории $\mathscr{T}$; построим множество $T_2 = \{\phi, \psi\}$. Применим указанное преобразование к предложениям из T_2 и будем повторять его, образуя последовательность $T_1, T_2, T_3, \ldots$. Каждое предложение содержит лишь конечное число сигнатурных символов, поэтому каждое предложение может быть последовательно разложено только конечное число раз. Таким образом, для некоторого k множество $T_k = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ будет содержать только неразложимые предложения, для которых $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \varphi$.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{T}$ — теория сигнатуры Σ. Тогда $\mathscr{T}$ имеет единственное разложение на неразложимые компоненты. Более точно, существует единственное разбиение Π сигнатуры Σ такое, что $\mathscr{T} = \uplus\{\mathscr{T}_\sigma \mid \sigma \in \Pi\}$, где $\mathscr{T}_\sigma$ — теория, состоящая в точности из всех предложений теории $\mathscr{T}$ сигнатуры σ и не имеющая нетривиальных разложений.*

Пусть $\mathscr{T}_1 \subseteq \mathscr{T}$ — теория сигнатуры $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$, состоящая из всех предложений теории $\mathscr{T}$ этой сигнатуры. Тогда $\mathscr{S}_1$ является компонентой разложения теории $\mathscr{T}$ в том и только в том случае, если выполнено следующее условие $(*)$: для любого предложения φ сигнатуры $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_1 \neq \varnothing$, неразложимого в $\mathscr{T}$, имеет место включение $\Sigma_\varphi \subseteq \Sigma_1$.

Докажем это утверждение.

$\Rightarrow$ Пусть $\mathscr{T} = \mathscr{S}_1 \uplus \mathscr{S}_2$, где $\mathscr{S}_2$ — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \backslash \Sigma_1$. Предположим, что $\Sigma_\varphi \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Тогда $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2 \vdash \varphi$ и по предложению 1 φ разложимо, что противоречит условию.

$\Leftarrow$ Пусть $\mathscr{S}_2$ — теория сигнатуры $\Sigma_2 = \Sigma \backslash \Sigma_1$, состоящая из всех предложений теории $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ_2. Пусть ψ — некоторое предложение теории $\mathscr{T}$. Тогда по лемме 1 в $\mathscr{T}$ найдется последовательность неразложимых предложений $\phi_1, \ldots, \phi_n$ таких, что $\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi$. В силу условия $(*)$ имеем $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$ и, следовательно, $\mathscr{S}_1 \uplus \mathscr{S}_2 \vdash \psi$.

Таким образом, некоторое подмножество $\Sigma_1 \subseteq \Sigma$ соответствует неразложимой компоненте теории $\mathscr{T}$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию $(*)$ и не имеет собственного подмножества, удовлетворяющего этому условию. Заметим, что совокупность подмножеств сигнатуры Σ, удовлетворяющих условию $(*)$, замкнута относительно пересечений, следовательно, любой символ сигнатуры Σ содержится в единственном минимальном подмножестве сигнатуры Σ со свойством $(*)$, и эти минимальные подмножества не пересекаются. $\square$

2. Критерий разложимости

Из доказательства теоремы 1 следует, что любое неразложимое предложение теории $\mathscr{T}$ содержит сигнатурные символы только из одной компоненты разложения. Это позволяет определить разбиение сигнатуры и компоненты разложения теории $\mathscr{T}$, исходя из системы аксиом теории $\mathscr{T}$.

Формализуем полученный результат с помощью следующего ниже понятия. Приведем его для произвольной системы аксиом Φ некоторой теории $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ.

Определение 3. Два сигнатурных символа $p, q \in \Sigma$ назовем *непосредственно связанными* (системой аксиом Φ теории $\mathscr{T}$), если p и q входят в одну аксиому $\psi \in \Phi$.

Символы p, q назовем *связанными* (системой аксиом Φ), если найдется такая последовательность символов $p = t_1, \ldots, t_k = q$, в которой любая соседняя пара t_i, t_{i+1} связана непосредственно.

Таким образом, для заданной системы аксиом Φ определяется неориентированный помеченный граф (с петлями в вершинах), вершинами которого служат символы сигнатуры, а аксиомы определяют связывающие их ребра. Отношение связанности является отношением эквивалентности, так что множество Σ разбивается на компоненты связности — классы эквивалентности. Будем говорить, что система аксиом Φ *определяет компоненты связности на сигнатуре* Σ.

Замечание 1. Любая теория $\mathscr{T}$ имеет систему аксиом, состоящую из предложений, неразложимых в $\mathscr{T}$.

Замечание 2. Пусть $\mathscr{T}$ — теория сигнатуры Σ и Φ — система аксиом теории $\mathscr{T}$, состоящая из предложений, неразложимых в $\mathscr{T}$. Тогда Φ определяет на сигнатуре Σ компоненту связности $\sigma \subseteq \Sigma$ в том и только в том случае, если $\sigma \in \Pi$, где Π — разбиение сигнатуры Σ, отвечающее разложению теории $\mathscr{T}$ на неразложимые компоненты.

В силу теоремы 1 получаем, что любая система аксиом теории $\mathscr{T}$, неразложимых в $\mathscr{T}$, определяет одни и те же компоненты связности на сигнатуре теории $\mathscr{T}$. Таким образом, приходим к критерию разложимости элементарной теории $\mathscr{T}$.

Критерий разложимости. *Теория $\mathscr{T}$ сигнатуры Σ является разложимой тогда и только тогда, когда некоторая система аксиом теории $\mathscr{T}$, неразложимых в $\mathscr{T}$, индуцирует более чем одну компоненту связности на сигнатуре Σ.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Palchunov D.* GABEK for ontology generation // Integration and learning in organizations / J. Zelger, P. Herdina, A. Oberprantacher. Wien: LIT-publ. Comp., 2005. Bd II.
2. *Amir E., McIlraith S.* Partition-based logical reasoning for first-order and propositional theories // Artificial Intelligence. 2005. V. 162, N 1–2. P. 49–88.
3. *Cuenca-Grau B., Parsia B., Sirin E., Kalyanpur A.* Modularity and Web ontologies: Proc. / KR2006. 2006. P. 198–208.
4. *Lutz C., Walther D., Wolter F.* Conservative extensions in expressive description logics: Proc. / IJCAI-07. 2007. P. 453–458.
5. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 17 июля 2006 г., окончательный вариант — 10 мая 2007 г.

Пономарёв Денис Константинович
Институт систем информатики СО РАН им. А. П. Ершова,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
ponom@iis.nsk.su