Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 533; 517.958

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ КЛЕБША

Е. В. Мамонтов

Аннотация. Рассмотрены уравнения Клебша, описывающие движения идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил. Эти уравнения содержат произвольный элемент — произвольную функцию трех переменных. Найдены преобразования эквивалентности — преобразования переменных, действующие на произвольный элемент и не меняющие структуру уравнений. Указано преобразование эквивалентности, обращающее в нуль произвольный элемент. Приведены примеры.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, уравнения Клебша, произвольный элемент, преобразование эквивалентности.

1. Предварительные сведения

Баротропные движения идеальной жидкости описываются системой уравнений [1]

$$D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \mathbf{F}, \quad D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $p = p(\rho)$, $D = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Независимые переменные суть $t, \mathbf{x} = (x, y, z)$. Искомыми являются функции $\mathbf{u}, \rho$. Функции $\mathbf{F}, p(\rho)$ заданы.

Клебш использовал для анализа решений системы (1) следующее представление вектора скорости [2, 3]:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \lambda\nabla\mu$$

с функциями φ, λ, μ независимых переменных $(t, \mathbf{x})$.

Л. В. Овсянников предложил [4, 5] использовать представление

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \frac{1}{2}(\lambda\nabla\mu - \mu\nabla\lambda) \tag{2}$$

с функциями φ, λ, μ независимых переменных $(t, \mathbf{x})$. Достоинством этого представления является его симметрия. Заметим, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \nabla\lambda \times \nabla\mu \tag{3}$$

и тем самым рассматриваемые движения, вообще говоря, вихревые.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05–01–00080), Федерального агентства по науке и инновациям РФ (проект НШ–5245.2006.1) и Сибирского отделения РАН (интеграционный проект № 2.15).

Предположим, что внешние силы имеют потенциал, т. е. $\mathbf{F} = -\nabla\Omega$, тогда поле ускорений потенциально:

$$\mathbf{a} = D\mathbf{u} = -\nabla\left(\int\frac{dp}{\rho} + \Omega\right). \tag{4}$$

Пусть

$$Q = \varphi_t + \frac{1}{2}(\lambda\mu_t - \mu\lambda_t) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} + \Omega. \tag{5}$$

Лемма (Л. В. Овсянников). *Справедливо тождество Клебша*

$$\nabla Q = (D\mu)\nabla\lambda - (D\lambda)\nabla\mu. \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$\nabla\varphi_t + \frac{1}{2}\nabla(\lambda\mu_t - \mu\lambda_t) = \mathbf{u}_t + \mu_t\nabla\lambda - \lambda_t\nabla\mu, \quad \nabla\left(\int\frac{dp}{\rho} + \Omega\right) = \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{F},$$

$$\nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2\right) = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u}\times(\nabla\lambda\times\nabla\mu)$$
$$= (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla\mu)\nabla\lambda - (\mathbf{u}\cdot\nabla\lambda)\nabla\mu.$$

Складывая эти равенства с учетом первого уравнения системы (1), получаем требуемое тождество. □

Если определить функции λ, μ как решения системы

$$D\lambda = f_\mu, \quad D\mu = -f_\lambda \tag{7}$$

с некоторой функцией $f = f(t, \lambda, \mu)$, то (6) примет вид $\nabla(Q + f) = 0$ и, значит, будет верно соотношение

$$Q + f = 0. \tag{8}$$

Несущественную функцию времени можно включить в φ.

Уравнения (7), (8) и уравнение неразрывности — второе уравнение системы (1) — образуют систему уравнений относительно $\rho, \lambda, \mu, \varphi$; $\mathbf{u}$ определяется из (2), а давление p — известная функция ρ в силу баротропности движения.

Л. В. Овсянников заметил [4, 5], что в случае идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие массовых сил можно получить эквивалентную исходной замкнутую систему из трех уравнений для функций λ, μ, φ. В этом случае движения жидкости описываются системой уравнений

$$D\mathbf{u} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{9}$$

и

$$Q = \varphi_t + \frac{1}{2}(\lambda\mu_t - \mu\lambda_t) + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + p. \tag{10}$$

Представление для давления p через функции φ, λ, μ имеет вид

$$p = -\varphi_t + \frac{1}{2}(\mu\lambda_t - \lambda\mu_t) - \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 - f.$$

При этом уравнение $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в силу (2) примет вид (Δ — лапласиан)

$$2\Delta\varphi + \lambda\Delta\mu - \mu\Delta\lambda = 0. \tag{11}$$

Система уравнений Клебша

$$D\lambda = f_\mu, \quad D\mu = -f_\lambda, \quad 2\Delta\varphi + \lambda\Delta\mu - \mu\Delta\lambda = 0 \tag{12}$$

или, подробнее,

$$\lambda_t + \left(\varphi_x + \frac{1}{2}(\lambda\mu_x - \mu\lambda_x)\right)\lambda_x + \left(\varphi_y + \frac{1}{2}(\lambda\mu_y - \mu\lambda_y)\right)\lambda_y + \left(\varphi_z + \frac{1}{2}(\lambda\mu_z - \mu\lambda_z)\right)\lambda_z = f_\mu,$$

$$\mu_t + \left(\varphi_x + \frac{1}{2}(\lambda\mu_x - \mu\lambda_x)\right)\mu_x + \left(\varphi_y + \frac{1}{2}(\lambda\mu_y - \mu\lambda_y)\right)\mu_y + \left(\varphi_z + \frac{1}{2}(\lambda\mu_z - \mu\lambda_z)\right)\mu_z = -f_\lambda,$$

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + \frac{\lambda}{2}(\mu_{xx} + \mu_{yy} + \mu_{zz}) - \frac{\mu}{2}(\lambda_{xx} + \lambda_{yy} + \lambda_{zz}) = 0$$

и будет предметом дальнейшего исследования.

2. Преобразования эквивалентности

Ядро допускаемых алгебр образуют операторы

$$Z_1 = y\partial_x - x\partial_y, \quad Z_2 = z\partial_x - x\partial_z, \quad Z_3 = z\partial_y - y\partial_z, \quad Z_4 = b_1(t)\partial_x + b_1'(t)x\partial_\varphi,$$
$$Z_5 = b_2(t)\partial_y + b_2'(t)y\partial_\varphi, \quad Z_6 = b_3(t)\partial_z + b_3'(t)z\partial_\varphi, \quad Z_7 = h(t)\partial_\varphi.$$

В случае $f = 0$ допускаются операторы (Л. В. Овсянников)

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,$$

$$X_3 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \lambda\partial_\lambda + \mu\partial_\mu + 2\varphi\partial_\varphi, \quad X_4 = z\partial_y - y\partial_z,$$
$$X_5 = x\partial_z - z\partial_x, \quad X_6 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_7 = b_1(t)\partial_x + b_1'(t)x\partial_\varphi,$$
$$X_8 = b_2(t)\partial_y + b_2'(t)y\partial_\varphi, \quad X_9 = b_3(t)\partial_z + b_3'(t)z\partial_\varphi,$$
$$X_{10} = F_\mu\partial_\lambda - F_\lambda\partial_\mu + \frac{1}{2}\left(\lambda F_\lambda + \mu F_\mu - 2F\right)\partial_\varphi, \quad X_{11} = h(t)\partial_\varphi,$$

$b_i(t), h(t), F(\lambda,\mu)$ — произвольные функции, штрих означает дифференцирование.

Функция $f = f(t,\lambda,\mu)$ является *произвольным элементом.* Ставится задача об отыскании *группы преобразований эквивалентности* — группы преобразований, действующих на произвольный элемент и сохраняющих структуру системы (12) [6]. Дополним систему (12) уравнениями

$$f_x = 0, \quad f_y = 0, \quad f_z = 0, \quad f_\varphi = 0. \tag{13}$$

Найдем преобразования эквивалентности системы (12), (13). Соответствующий оператор имеет вид

$$X^e = \alpha^t\partial_t + \alpha^x\partial_x + \alpha^y\partial_y + \alpha^z\partial_z + \alpha^\lambda\partial_\lambda + \alpha^\mu\partial_\mu + \alpha^\varphi\partial_\varphi + \alpha^f\partial_f.$$

Все коэффициенты — функции от $t, x, y, z, \lambda, \mu, \varphi, f$.

Анализ определяющих уравнений показывает, что имеет место x-автономия и

$$\alpha^t = \alpha^t(t), \quad \alpha^x = \alpha^x(t,x,y,z), \quad \alpha^y = \alpha^y(t,x,y,z), \quad \alpha^z = \alpha^z(t,x,y,z),$$

$$\alpha^\lambda = \alpha^\lambda(t,\lambda,\mu),\ \alpha^\mu = \alpha^\mu(t,\lambda,\mu),\ \alpha^\varphi = \alpha^\varphi(t,x,y,z,\lambda,\mu,\varphi),\ \alpha^f = \alpha^f(t,\lambda,\mu,f).$$

В результате

$$\alpha^t = 2(C_1 - C_5)t + C_6,\ \alpha^x = C_1x + C_2y + C_3z + b_1(t),\ \alpha^y = -C_2x + C_1y + C_4z + b_2(t),$$

$$\alpha^z = -C_3x - C_4y + C_1z + b_3(t), \quad \alpha^\lambda = C_5\lambda + \psi_\mu, \quad \alpha^\mu = C_5\mu - \psi_\lambda,$$

$$\alpha^\varphi = 2C_5\varphi + \frac{\lambda\psi_\lambda + \mu\psi_\mu}{2} - \psi + b_1'(t)x + b_1'(t)y + b_3'(t)z, \quad \alpha^f = (4C_5 - 2C_1)f + \psi_t + \tau(t),$$

$\psi(t,\lambda,\mu)$ — произвольная функция.

Базисные операторы имеют вид

$$X_1^e = \partial_t, \quad X_2^e = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - 2f\partial_f,$$

$$X_3^e = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + \lambda\partial_\lambda + \mu\partial_\mu + 2\varphi\partial_\varphi + 2f\partial_f,$$

$$X_4^e = z\partial_y - y\partial_z, \quad X_5^e = x\partial_z - z\partial_x, \quad X_6^e = y\partial_x - x\partial_y,$$

$$X_7^e = b_1(t)\partial_x + b_1'(t)x\partial_\varphi, \quad X_8^e = b_2(t)\partial_y + b_2'(t)y\partial_\varphi, \quad X_9^e = b_3(t)\partial_z + b_3'(t)x\partial_\varphi,$$

$$X_{10}^e = 2\psi_\mu\partial_\lambda - 2\psi_\lambda\partial_\mu + (\lambda\psi_\lambda + \mu\psi_\mu - 2\psi)\partial_\varphi + 2\psi_t\partial_f, \quad X_{11}^e = \tau(t)\partial_f.$$

Преобразуют произвольный элемент f только операторы $X_2^e, X_3^e, X_{10}^e, X_{11}^e$. Операторы X_2^e, X_3^e растягивают f, а действие X_{11}^e сводится к добавлению произвольной функции от t. Наиболее интересные преобразования связаны с оператором X_{10}^e.

Оператор X_{10}^e порождает следующие конечные преобразования: $t' = t$,

$$\frac{d\lambda'}{da} = 2\psi_{\mu'}, \quad \frac{d\mu'}{da} = -2\psi_{\lambda'}, \quad \frac{d\varphi'}{da} = (\lambda'\psi_{\lambda'} + \mu'\psi_{\mu'} - 2\psi), \quad \frac{df'}{da} = 2\psi_t,$$
$$\lambda'(0) = \lambda, \quad \mu'(0) = \mu, \quad \varphi'(0) = \varphi, \quad f'(0) = f. \tag{14}$$

Уравнения

$$\frac{d\lambda'}{da} = 2\psi_{\mu'}, \quad \frac{d\mu'}{da} = -2\psi_{\lambda'}, \quad \lambda'(0) = \lambda, \quad \mu'(0) = \mu \tag{15}$$

— гамильтонова подсистема, $\psi(t,\lambda,\mu)$ — ее первый интеграл, т. е. $\psi(t,\lambda'(a),\mu'(a))$ не зависит от a: $\psi(t,\lambda',\mu') = \psi(t,\lambda,\mu)$. Тогда четвертое уравнение системы (14) интегрируется:

$$f' = f(t,\lambda,\mu) + 2a\psi_t(t,\lambda,\mu). \tag{16}$$

Пусть $\lambda' = \chi_1(t,\lambda,\mu;a)$, $\mu' = \chi_2(t,\lambda,\mu;a)$ — решение системы (15). Функция φ' находится квадратурой. В результате получаем

$$\lambda' = \chi_1(t,\lambda,\mu;a), \quad \mu' = \chi_2(t,\lambda,\mu;a), \quad \varphi' = \varphi + \chi_3(t,\lambda,\mu;a), \tag{17}$$

$$f' = f(t,\lambda,\mu) + 2a\psi_t(t,\lambda,\mu). \tag{18}$$

Обозначим

$$\mathbf{u}(a) = \nabla\varphi' + \frac{1}{2}(\lambda'\nabla\mu' - \mu'\nabla\lambda'), \quad p(a) = -\varphi_t' + \frac{1}{2}(\mu'\lambda_t' - \lambda'\mu_t') - \frac{1}{2}|\mathbf{u}(a)|^2 - f'.$$

Утверждение. *Имеют место равенства*

$$\frac{d}{da}\mathbf{u}(a) = 0, \quad \frac{d}{da}p(a) = 0.$$

Доказательство. Вычисляем $\frac{d}{da}\mathbf{u}(a)$, $\frac{d}{da}p(a)$, используя (14) и равенства $\nabla\psi_{\lambda'} = \psi_{\lambda'\lambda'}\nabla\lambda' + \psi_{\lambda'\mu'}\nabla\mu'$, $\nabla\psi_{\mu'} = \psi_{\lambda'\mu'}\nabla\lambda' + \psi_{\mu'\mu'}\nabla\mu'$. $\square$

Теорема. *Пусть гладкая функция $f(t,\lambda,\mu)$ определена в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Для любой точки $(t_0,\lambda_0,\mu_0) \in \Omega$ найдутся числа $T > 0$, $\delta > 0$ и преобразование эквивалентности*

$$t' = t, \quad \lambda' = \lambda'(t,\lambda,\mu), \quad \mu' = \mu'(t,\lambda,\mu), \quad \varphi' = \varphi'(t,\lambda,\mu,\varphi),$$

определенное (для любых φ) в параллелепипеде

$$\Pi = \{|t - t_0| \le T,\ |\lambda - \lambda_0| \le \delta,\ |\mu - \mu_0| \le \delta\}$$

и переводящее функцию $f(t,\lambda,\mu)$ в функцию $f'(t,\lambda',\mu') \equiv 0$. Обратное преобразование также определено.

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $(t_0,\lambda_0,\mu_0) \in \Omega$. Выберем функцию

$$\psi(t,\lambda,\mu) = -\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau,\lambda,\mu)d\tau \Longrightarrow \psi_t = -\frac{1}{2}f.$$

Если $t = t_0$, то $\psi = 0$, и задача (15)

$$\frac{d\lambda'}{da} = 0, \quad \frac{d\mu'}{da} = 0, \quad \lambda'(0) = \lambda_0, \quad \mu'(0) = \mu_0$$

имеет единственное непродолжаемое решение $\lambda' \equiv \lambda_0$, $\mu' \equiv \mu_0$, определенное на всей оси $-\infty < a < \infty$. Тогда из теоремы о непрерывной зависимости от параметров следует существование таких чисел $T > 0$, $\delta > 0$, что решение задачи (15) с $|t - t_0| \le T$, $|\lambda - \lambda_0| \le \delta$, $|\mu - \mu_0| \le \delta$ существует на промежутке $-1 \le a \le 1$. Полагая в (17) $a = 1$, получаем преобразование эквивалентности

$$\lambda' = \chi_1(t,\lambda,\mu;1), \quad \mu' = \chi_2(t,\lambda,\mu;1), \quad \varphi' = \varphi + \chi_3(t,\lambda,\mu;1), \tag{19}$$

переводящее функцию $f(t,\lambda,\mu)$ в нуль.

Заметим, что

$$j = \frac{\partial(\lambda',\mu')}{\partial(\lambda,\mu)} \equiv 1.$$

Обратное преобразование определяется равенствами

$$\lambda = \chi_1(t,\lambda',\mu';-1), \quad \mu = \chi_2(t,\lambda',\mu';-1), \quad \varphi = \varphi' + \chi_3(t,\lambda',\mu';-1). \qquad \square$$

3. Примеры

Пример 1. $f(t,\lambda,\mu) = q(t)\lambda\mu$.

Полагаем $\psi(t,\lambda,\mu) = -\frac{Q(t)}{2}\lambda\mu$, $\frac{dQ}{dt} = q(t)$. Система (14) имеет вид

$$\frac{d\lambda'}{da} = -Q(t)\lambda', \quad \frac{d\mu'}{da} = Q(t)\mu', \quad \frac{d\varphi'}{da} = 0,$$
$$\lambda'(0) = \lambda, \quad \mu'(0) = \mu, \quad \varphi'(0) = \varphi.$$

Тем самым

$$\lambda' = \lambda e^{-aQ(t)}, \quad \mu' = \mu e^{aQ(t)}, \quad \varphi' = \varphi.$$

Нужное преобразование эквивалентности ($a = 1$) таково:

$$\lambda' = \lambda e^{-Q(t)}, \quad \mu' = \mu e^{Q(t)}, \quad \varphi' = \varphi.$$

Убедимся в справедливости этого непосредственно. Рассмотрим, например, второе уравнение системы (12). Имеем

$$\mu_t = \mu'_t e^{-Q} - q\mu' e^{-Q}, \quad \mu_x = \mu'_x e^{-Q},$$
$$\left[\varphi_x + \frac{1}{2}(\lambda\mu_x - \mu\lambda_x)\right]\mu_x = \left[\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right]\mu'_x e^{-Q}, \ldots,$$
$$-f_\lambda = -q\mu = -q\mu' e^{-Q}.$$

Уравнение переписывается в виде

$$\mu'_t e^{-Q} - q\mu' e^{-Q} + \frac{1}{2}\left[\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right]\mu'_x e^{-Q} + \cdots = -q\mu' e^{-Q}.$$

Видим, что в новых переменных получается уравнение с нулевой правой частью.

Пример 2. $f(t, \lambda) = q(t)r(\lambda)$.

Полагаем $\psi(t, \lambda) = -\frac{Q(t)}{2}r(\lambda)$, $\frac{dQ}{dt} = q(t)$. Система (14) имеет вид

$$\frac{d\lambda'}{da} = 0, \quad \frac{d\mu'}{da} = Q(t)r'(\lambda), \quad \frac{d\varphi'}{da} = Q(t)\left[r(\lambda) - \frac{\lambda}{2}r'(\lambda)\right],$$
$$\lambda'(0) = \lambda, \quad \mu'(0) = \mu, \quad \varphi'(0) = \varphi.$$

Тем самым

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu + aQ(t)r'(\lambda), \quad \varphi' = \varphi + aQ(t)\left[r(\lambda) - \frac{\lambda}{2}r'(\lambda)\right].$$

Нужное преобразование эквивалентности ($a = 1$) таково:

$$\lambda' = \lambda, \quad \mu' = \mu + Q(t)r'(\lambda), \quad \varphi' = \varphi + Q(t)\left[r(\lambda) - \frac{\lambda}{2}r'(\lambda)\right].$$

Убедимся в справедливости этого непосредственно. Имеем

$$\lambda_t = \lambda'_t, \quad \lambda_x = \lambda'_x, \quad \mu_t = \mu'_t - q(t)r'(\lambda') - Q(t)r''(\lambda')\lambda'_t,$$
$$\mu_x = \mu'_x - Q(t)r''(\lambda')\lambda'_x, \quad \mu_{xx} = \mu'_{xx} - Q(t)r'''(\lambda')\left(\lambda'_x\right)^2 - Q(t)r''(\lambda')\lambda'_{xx},$$
$$\varphi_x = \varphi'_x + \frac{1}{2}Q(t)\left[\lambda' r''(\lambda')\lambda'_x - r'(\lambda')\lambda'_x\right],$$
$$\varphi_x + \frac{1}{2}(\lambda\mu_x - \mu\lambda_x) = \varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x),$$

$$\varphi_{xx} = \varphi'_{xx} + \frac{1}{2}Q(t)[r''(\lambda')(\lambda'_x)^2 + \lambda' r'''(\lambda')(\lambda'_x)^2$$
$$+ \lambda' r''(\lambda')\lambda'_{xx} - r'(\lambda')\lambda'_{xx} - r''(\lambda')(\lambda'_x)^2],$$

откуда

$$\lambda'_t + \left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)\lambda'_x + \cdots = 0,$$

и первое уравнение выполняется.

Далее,

$$\left(\varphi_x + \frac{1}{2}(\lambda\mu_x - \mu\lambda_x)\right)\mu_x = \left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)(\mu'_x - Q(t)r''(\lambda')\lambda'_x),$$

$$\mu'_t + \left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)\mu'_x - q(t)r'(\lambda') - Q(t)r''(\lambda')\lambda'_t$$
$$- Q(t)r''(\lambda')\left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)\lambda'_x + \dots = -q(t)r'(\lambda'),$$

и второе уравнение выполняется.

Третье уравнение также выполняется:

$$\varphi_{xx} + \frac{\lambda}{2}\mu_{xx} - \frac{\mu}{2}\lambda_{xx} + \dots = \varphi'_{xx} + \frac{\lambda'}{2}\mu'_{xx} - \frac{\mu'}{2}\lambda'_{xx} + \dots.$$

Пример 3. $f(t,\lambda,\mu) = \lambda(1+k^2\mu^2)$, $k > 0$ — параметр.

Полагаем $\psi(t,\lambda,\mu) = -\frac{t}{2}\lambda(1+k^2\mu^2)$. Система (14) имеет вид

$$\frac{d\lambda'}{da} = -2k^2t\lambda'\mu', \quad \frac{d\mu'}{da} = t(1+k^2\mu'^2), \quad \frac{d\varphi'}{da} = \frac{t}{2}\lambda'(1-k^2\mu'^2),$$
$$\lambda'(0) = \lambda, \quad \mu'(0) = \mu, \quad \varphi'(0) = \varphi.$$

Тем самым

$$\lambda' = (\cos(kta) - k\mu\sin(kta))^2\lambda, \quad \mu' = \frac{1}{k}\frac{k\mu + \operatorname{tg}(kta)}{1 - k\mu\operatorname{tg}(kta)},$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\lambda\mu}{2}\cos(2kta) + \left(\frac{\lambda}{4k} - \frac{k\lambda\mu^2}{4}\right)\sin(2kta).$$

Нужное преобразование эквивалентности ($a = 1$) таково:

$$\lambda' = (\cos(kt) - k\mu\sin(kt))^2\lambda, \quad \mu' = \frac{1}{k}\frac{k\mu + \operatorname{tg}(kt)}{1 - k\mu\operatorname{tg}(kt)},$$
$$\varphi' = \varphi - \frac{\lambda\mu}{2} + \frac{\lambda\mu}{2}\cos(2kt) + \left(\frac{\lambda}{4k} - \frac{k\lambda\mu^2}{4}\right)\sin(2kt).$$

Это преобразование определено, если $t \neq \frac{(2j+1)\pi}{2k}$, $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$, $\mu \neq \frac{1}{k\operatorname{tg}(kt)}$.

Непосредственная проверка (для первого и второго уравнений).

Удобно начать со второго уравнения. После замены переменных оно имеет вид

$$\mu'_t + \left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)\mu'_x + \dots = 0, \tag{20}$$

т. е. становится однородным. Первое уравнение приобретает вид

$$\lambda'_t + \frac{2k\sin(kt)\lambda'}{\cos(kt) + k\sin(kt)\mu'}\mu'_t + \dots = 0. \tag{21}$$

Вычитая из (21) уравнение (20), умноженное на $\frac{2k\sin(kt)\lambda'}{\cos(kt)+k\sin(kt)\mu'}$, находим, что первое уравнение приводится к нужному виду:

$$\lambda'_t + \left(\varphi'_x + \frac{1}{2}(\lambda'\mu'_x - \mu'\lambda'_x)\right)\lambda'_x + \dots = 0. \tag{22}$$

Автор выражает благодарность Л. В. Овсянникову и участникам программы ПОДМОДЕЛИ С. В. Хабирову, А. П. Чупахину, С. В. Головину, А. А. Черевко за полезное обсуждение статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
2. *Clebsch A.* Über eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen // Crelle LIV (1857), LVI (1859).
3. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1947.
4. *Овсянников Л. В.* Уравнения Клебша и новые модели вихревых движений жидкости // Тез. докл. XVI Всероссийской конференции «Аналитические методы в газовой динамике САМГАД 2006», Санкт-Петербург, 5–10 июля 2006 г. С. 64.
5. *Овсянников Л. В.* Уравнения Клебша и новые модели вихревых движений жидкости // Аннотации докл. IX Всероссийского съезда по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г. Т. II. С. 140.
6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 25 октября 2006 г.

Мамонтов Евгений Владимирович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
mamontov@hydro.nsc.ru