Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2008. Том 49, № 1

УДК 517.95

ПРИМЕР C^1–ГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ, МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ГРАДИЕНТА КОТОРОЙ ЯВЛЯЕТСЯ ДУГОЙ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ КАСАТЕЛЬНОЙ НИ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

М. В. Коробков

Аннотация. Построен пример вещественной C^1-гладкой функции двух переменных, множество значений градиента которой является дугой, не имеющей касательной ни в одной точке.

Ключевые слова: C^1-гладкая функция, множество значений градиента, дуга, касательная.

Статья является продолжением цикла работ [1–4]. В особенности мы опираемся на работу [3]. Основным результатом настоящей статьи является следующее утверждение.

Теорема 1. *Существуют непрерывное инъективное отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и C^1-гладкая функция $v : \Omega \to \mathbb{R}$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такие, что выполнено равенство*

$$\nabla v(\Omega) = \gamma(\mathbb{R}), \tag{1}$$

причем дуга $\gamma(\mathbb{R})$ не имеет касательной ни в одной точке (*в частности, она не спрямляема ни на каком интервале*).

Всюду в дальнейшем *кривой* называется непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \ni u \mapsto (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) \in \mathbb{R}^2$. Если отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ непрерывно и инъективно, то будем называть его также *дугой.* Символом ∇v обозначается градиент $\nabla v = (v_x, v_t)$ функции $v = v(x, t)$. *Областью* называется открытое связное множество. Символом $a \cdot b$ обозначается скалярное произведение векторов a, b. Некоторые другие обозначения будут вводиться по ходу статьи.

Доказательство теоремы 1. Ясно, что достаточно построить требуемую дугу γ, заданную не на всем $\mathbb{R}$, а на интервале $(0, 1)$, и чтобы вместо (1) выполнялось равенство

$$\nabla v(\Omega) = \gamma((0, 1)), \tag{2}$$

а потом, взяв соответствующую перепараметризацию кривой, можно будет считать, что γ определена на всем $\mathbb{R}$ и выполнено равенство (1).

Мы будем строить требуемую дугу γ по следующей простой схеме. Сначала построим функцию $\gamma_1 : (0, 1) \to \mathbb{R}$, которая ведет себя «очень плохо» (в частности, имеет неограниченную вариацию на любом интервале), а также построим

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ 05–01–00482–а), гранта Фонда содействия отечественной науке для молодых кандидатов и Лаврентьевского гранта (№ 5) для молодых ученых СО РАН.

функцию $l : (0,1) \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации, непрерывную слева в каждой точке из $(0,1)$. Тогда непрерывную функцию $\gamma_2 : (0,1) \to \mathbb{R}$ можно будет посчитать по формуле (3) из [3], которая в рассматриваемом случае эквивалентна формуле (31) настоящей статьи. Вследствие такого определения функции γ_2 полученная кривая $\gamma : (0,1) \ni u \mapsto (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) \in \mathbb{R}^2$ будет автоматически обладать свойством (Γ_1), а значит, по [3, теорема 1.1.4] найдется искомое отображение $v \in C^1(\Omega)$ со свойством (2). Но из-за «плохого» поведения функции γ_1 кривая γ не будет иметь касательной ни в одной точке. Единственная техническая трудность состоит в том, чтобы построенная кривая γ оказалось дугой, т. е. чтобы отображение $\gamma : (0,1) \to \mathbb{R}$ оказалось инъективным. Чтобы преодолеть эту трудность, мы будем строить искомую кривую γ по индукции в виде последовательности ломаных, следя, чтобы на каждом шаге и в пределе не было самопересечений.

Опишем нулевой шаг. Положим $\gamma_1^0(u) \equiv u$, $l^0(u) \equiv 0$ при $u \in [0,1]$[1)]. Не умаляя общности, будем считать далее, что $\gamma_2^\nu(0) = 0$ для всех ν. Тогда, вычисляя γ_2^0 по формуле (3) из [3], получаем, что $\gamma_2^0(u) \equiv 0$ при $u \in (0,1)$. Построенная на нулевом шаге кривая $\gamma^0 = \left(\gamma_1^0, \gamma_2^0\right)$ является прямолинейным отрезком, соединяющим точки плоскости $(0,0)$ и $(1,0)$.

Опишем теперь шаг индукции. Предположим, что мы построили функции γ_1^ν, l^ν, γ_2^ν, определенные на промежутке $[0,1]$ и удовлетворяющие следующему набору условий[2)].

1. Функция $\gamma_1^\nu : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна.

2. Функция γ_1^ν линейна на каждом интервале $[A_i^\nu, A_{i+1}^\nu]$, $i = 0, \ldots, 5^\nu - 1$, где $A_i^\nu = \frac{i}{5^\nu}$. Отметим, что из определения точек A_i^μ следует справедливость формулы

$$A_i^\mu = A_{5i}^{\mu+1} = A_{5^\kappa i}^{\mu+\kappa}. \tag{3}$$

3. $\forall i = 0, \ldots, 5^\nu - 1 \quad \left|\gamma_1^\nu\left(A_i^\nu\right) - \gamma_1^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right)\right| \le \left(\frac{4}{5}\right)^\nu$.

4. Функция l^ν постоянна на каждом интервале $\left(A_i^\nu, A_{i+1}^\nu\right]$, $i = 0, \ldots, 5^\nu - 1$.

5. Функция l^ν непрерывна слева на $[0,1]$.

6. $\operatorname{Var} l^\nu \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu}$.

7. Верна формула (3) из [3], которую для данной ситуации можно записать в виде

$$\forall u \in [0,1] \quad \gamma_2^\nu(u) = \gamma_1^\nu(u) l^\nu(u) - \int\limits_0^{u-0} \gamma_1^\nu(\tau)\, dl^\nu(\tau), \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому промежутку $[0,u)$.

8. Функция $\gamma_2^\nu : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, кроме того, она линейна на каждом интервале $[A_i^\nu, A_{i+1}^\nu]$, $i = 0, \ldots, 5^\nu - 1$.

Далее, если мы обозначим через γ^ν функцию $\gamma^\nu : [0,1] \ni u \mapsto \left(\gamma_1^\nu(u), \gamma_2^\nu(u)\right) \in \mathbb{R}^2$, то для кривой γ^ν будем считать выполненными следующие индукционные предположения.

[1)] По техническим соображениям нам будет более удобно проводить построения для функций, определенных на замкнутом промежутке $[0,1]$, а после завершения всех построений можно будет взять сужение полученной в итоге функции $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ на открытый интервал $(0,1)$, и тогда мы попадем в ситуацию, рассмотренную в предыдущем абзаце.

[2)] Приводимые условия не являются независимыми, но мы приводим такой избыточный список для наглядности и удобства читателя.

9. γ^ν Является ломаной[3)], соединяющей точки плоскости $(0,0)$ и $(1,0)$, причем вершинами этой ломаной являются точки $\gamma^\nu(A_i^\nu)$, $i=0,\ldots,5^\nu-1$.

10. Ломаная γ^ν не имеет самопересечений, т. е. отображение γ^ν инъективно.

11. Если $u_1\in[A_i^\mu,A_{i+1}^\mu]$, $u_2\in[A_j^\mu,A_{j+1}^\mu]$, где $\mu=1,\ldots,\nu$ и $|i-j|>1$, то $|\gamma^\nu(u_1)-\gamma^\nu(u_2)|\ge C_\nu(\mu)\bigl(1-\frac13-\cdots-\frac{1}{3^{\nu-\mu+1}}\bigr)$, где $C_\nu(\mu)>0$ — некоторая константа.

Ниже мы покажем, что константу $C_\nu(\mu)$ можно сделать независимой от ν.

Из условия 4 и формулы (4) вытекает, что отрезок ломаной γ^ν, соединяющий вершины $\gamma^\nu(A_i^\nu)$, $\gamma^\nu(A_{i+1}^\nu)$, параллелен вектору $\bigl(1,l^\nu(A_{i+1}^\nu)\bigr)$.

Перед построением новой ломаной $\gamma^{\nu+1}$ сделаем еще одно предварительное наблюдение. Каждой точке A_i^ν, $i=1,\ldots,5^\nu-1$, сопоставим целое число σ_i, равное 0 или 1 и обладающее свойством: существует $\delta_0>0$ такое, что для любого $\delta\in(0,\delta_0)$ справедливо следующее утверждение.

(Δ) Для каждого $i=0,1,\ldots,5^\nu-1$ прямая (обозначим ее символом L), проходящая через точку $\gamma^\nu(A_i^\nu)$ параллельно вектору $\bigl(1,l^\nu(A_{i+1}^\nu)+(-1)^{\sigma_i}\delta\bigr)$, разбивает плоскость $\mathbb{R}^2$ на две полуплоскости так, что отрезок, соединяющий $\gamma^\nu(A_i^\nu)$ и $\gamma^\nu(A_{i+1}^\nu)$ (обозначим его через I_+), лежит в одной из этих полуплоскостей (обозначим ее через P_+), а отрезок, соединяющий $\gamma^\nu(A_{i-1}^\nu)$ и $\gamma^\nu(A_i^\nu)$ (обозначим его через I_-), лежит в другой полуплоскости (обозначим ее через P_-).

Теперь займемся построением новой ломаной $\gamma^{\nu+1}$, следя за тем, чтобы и для нее были выполнены свойства, соответствующие 1–11. Для этого зададим сначала вспомогательную функцию $\psi:[0,1]\to[0,1]$ по формуле

$$\psi(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,\frac15],\\ 3t-\frac25, & t\in[\frac15,\frac25],\\ -4t+\frac{12}{5}, & t\in[\frac25,\frac35],\\ 4t-\frac{12}{5}, & t\in[\frac35,\frac45],\\ t, & t\in[\frac45,1].\end{cases}$$

Очевидно, что функция ψ непрерывна и сюръективно отображает промежуток $[0,1]$ на себя. Кроме того, функция ψ линейна на каждом из интервалов $\bigl[\frac{\kappa}{5},\frac{\kappa+1}{5}\bigr]$, $\kappa=0,1,2,3,4$. Теперь определим функцию $\gamma_1^{\nu+1}$ по следующему правилу. Для каждого $u\in[0,1]$ возьмем номер $i=i(u)$ такой, что $u=(1-t)A_i^\nu+tA_{i+1}^\nu$ для некоторого $t\in[0,1)$ (другими словами, $u\in\bigl[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\bigr)$), и положим $\gamma_1^{\nu+1}(u)=\gamma_1^\nu\bigl((1-\psi(t))A_i^\nu+\psi(t)A_{i+1}^\nu\bigr)$. Используя процедуру построения и свойства 1–3 функции γ_1^ν, непосредственно вычисляем, что

1′) функция $\gamma_1^{\nu+1}:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрерывна;

2′) функция $\gamma_1^{\nu+1}$ линейна на каждом промежутке $\bigl[A_i^{\nu+1},A_{i+1}^{\nu+1}\bigr]$, $i=0,\ldots,5^{\nu+1}-1$;

3′) $\forall i=0,\ldots,5^{\nu+1}-1\quad \bigl|\gamma_1^{\nu+1}\bigl(A_i^{\nu+1}\bigr)-\gamma_1^{\nu+1}\bigl(A_{i+1}^{\nu+1}\bigr)\bigr|\le\bigl(\frac45\bigr)^{\nu+1}$.

Из построения функции $\gamma_1^{\nu+1}$ и свойств 1, 2 функции γ_1^ν легко видеть также, что

$$\forall i=0,1,\ldots,5^\nu-1\,\forall u\in\bigl[A_{5i}^{\nu+1},A_{5i+1}^{\nu+1}\bigr]\cup\bigl[A_{5i+4}^{\nu+1},A_{5i+5}^{\nu+1}\bigr]\quad \gamma_1^{\nu+1}(u)=\gamma_1^\nu(u), \tag{5}$$

в частности, ввиду формулы (3)

$$\forall i=0,1,\ldots,5^\nu\quad \gamma_1^{\nu+1}\bigl(A_i^\nu\bigr)=\gamma_1^\nu\bigl(A_i^\nu\bigr).$$

[3)]На самом деле это свойство вытекает из 1, 2, 8.

Нам понадобятся также следующие свойства построенной функции:

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1\, \forall u \in \left[A_i^\nu, A_{i+1}^\nu\right] \text{ число } \gamma_1^{\nu+1}(u) \text{ лежит между числами } \gamma_1^\nu\left(A_i^\nu\right) \text{ и } \gamma_1^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right) \quad (6)$$

(последнее означает, что число $\gamma_1^{\nu+1}(u)$ принадлежит замкнутому промежутку с концами $\gamma_1^\nu\left(A_i^\nu\right)$ и $\gamma_1^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right)$).

Теперь построим функцию $l^{\nu+1}$. В точках вида $A_i^{\nu+1}$ она определяется по следующим соотношениям:

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu \quad l^{\nu+1}\left(A_i^\nu\right)\left(= l^{\nu+1}\left(A_{5i}^{\nu+1}\right)\right) = l^\nu(A_i^\nu), \quad (7)$$

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1 \quad l^{\nu+1}\left(A_{5i+1}^{\nu+1}\right) = l^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right),$$

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1 \quad l^{\nu+1}\left(A_{5i+2}^{\nu+1}\right) = l^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right) + (-1)^{\sigma_i}\delta, \quad (8)$$

где $\delta \in [0, \delta_0)$ — некоторый параметр, точное значение которого мы укажем ниже,

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1 \quad l^{\nu+1}\left(A_{5i+3}^{\nu+1}\right) = l^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right) + \frac{7}{4}(-1)^{\sigma_i}\delta,$$

наконец,

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1 \quad l^{\nu+1}\left(A_{5i+4}^{\nu+1}\right) = l^\nu\left(A_{i+1}^\nu\right) + (-1)^{\sigma_i}\delta. \quad (9)$$

Далее продолжим функцию $l^{\nu+1}$ на весь промежуток $[0, 1]$ по правилу:

$4'$) функция $l^{\nu+1}$ постоянна на каждом интервале $\left(A_i^{\nu+1}, A_{i+1}^{\nu+1}\right]$, $i = 0, \ldots, 5^{\nu+1} - 1$.

По построению немедленно получаем справедливость условия:

$5'$) функция $l^{\nu+1}$ непрерывна слева на $[0, 1]$.

Кроме того, также по построению имеем справедливость следующих свойств:

$$\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1\, \forall u \in \left[A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+1}^{\nu+1}\right] \cup \left(A_{5i+4}^{\nu+1}, A_{5i+5}^{\nu+1}\right] \quad l^{\nu+1}(u) = l^\nu(u), \quad (10)$$

$$\delta = 0 \Rightarrow (\forall u \in [0, 1] \quad l^{\nu+1}(u) = l^\nu(u)). \quad (11)$$

Из построения функции $l^{\nu+1}$ нетрудно вывести, что существует $\delta_1 > 0$ такое, что при любом $\delta \in [0, \delta_1)$ справедливо утверждение

$$\operatorname{Var}\left(l^{\nu+1} - l^\nu\right) \le \frac{1}{2^{\nu+1}}, \quad (12)$$

а значит, ввиду индукционного предположения 6 имеет место свойство

$6'$) $\operatorname{Var} l^{\nu+1} \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}}$.

В дальнейшем будем считать, что $\delta \in [0, \delta_1)$, так что свойство $6'$ будет выполняться. Ниже мы укажем еще две оценки, позволяющие сделать окончательный выбор δ.

Функцию $\gamma_2^{\nu+1}$ будем вычислять по формуле

$$\forall u \in [0, 1] \quad \gamma_2^{\nu+1}(u) = \gamma_1^{\nu+1}(u) l^{\nu+1}(u) - \int\limits_0^{u-0} \gamma_1^{\nu+1}(\tau)\, dl^{\nu+1}(\tau). \quad (13)$$

Тогда по построению немедленно получаем справедливость следующих свойств:

$7'$) выполнена формула (13);

8$'$) функция $\gamma_2^{\nu+1}:[0,1]\to\mathbb{R}$ непрерывна, кроме того, она линейна на каждом интервале $\bigl[A_i^{\nu+1},A_{i+1}^{\nu+1}\bigr]$, $i=0,\dots,5^{\nu+1}-1$.

Далее, если обозначить через $\gamma^{\nu+1}$ функцию

$$\gamma^{\nu+1}:[0,1]\ni u\mapsto\bigl(\gamma_1^{\nu+1}(u),\gamma_2^{\nu+1}(u)\bigr)\in\mathbb{R}^2,$$

то для кривой $\gamma^{\nu+1}$ из уже установленных свойств $1'$, $2'$ и $8'$ легко вывести наличие также следующего свойства:

9$'$) $\gamma^{\nu+1}$ является ломаной, соединяющей точки плоскости $(0,0)$ и $(1,0)$, причем вершинами этой ломаной являются точки $\gamma^{\nu+1}\bigl(A_i^{\nu+1}\bigr)$, $i=0,\dots,5^{\nu+1}-1$.

Осталось доказать для кривой $\gamma^{\nu+1}$ аналоги последних свойств 10, 11, отвечающих за инъективность. Для этого будут нужны еще некоторые свойства построенных функций. Легко видеть (см. формулу (13) и свойство $4'$), что для любых $i=0,1,\dots,5^\nu-1$ и $\kappa=0,1,2,3,4$

$$\text{отрезок ломаной } \gamma^{\nu+1}, \text{ соединяющий вершины } \gamma^{\nu+1}\bigl(A_{5i+\kappa}^{\nu+1}\bigr) \text{ и } \gamma^{\nu+1}\bigl(A_{5i+\kappa+1}^{\nu+1}\bigr), \text{ параллелен вектору } \bigl(1,l^{\nu+1}\bigl(A_{5i+\kappa+1}^{\nu+1}\bigr)\bigr). \tag{14}$$

Далее, несложным прямым вычислением устанавливается справедливость формулы

$$\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\qquad\int\limits_{A_i^\nu}^{A_{i+1}^\nu-0}\gamma_1^{\nu+1}(\tau)\,dl^{\nu+1}(\tau)=\int\limits_{A_i^\nu}^{A_{i+1}^\nu-0}\gamma_1^\nu(\tau)\,dl^\nu(\tau) \tag{15}$$

(отметим, что меры, порождаемые функциями l^ν и $l^{\nu+1}$, дискретны и их носители сосредоточены в точках вида A_i^ν и $A_i^{\nu+1}$ соответственно, поэтому проверка формулы (15) действительно проста). Тогда из формул (15), (13), (10), (5) и (4) непосредственно вытекает, что

$$\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\,\forall u\in\bigl[A_{5i}^{\nu+1},A_{5i+1}^{\nu+1}\bigr]\cup\bigl[A_{5i+4}^{\nu+1},A_{5i+5}^{\nu+1}\bigr]\quad\gamma_2^{\nu+1}(u)=\gamma_2^\nu(u),$$

а значит, снова с учетом формулы (5)

$$\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\,\forall u\in\bigl[A_{5i}^{\nu+1},A_{5i+1}^{\nu+1}\bigr]\cup\bigl[A_{5i+4}^{\nu+1},A_{5i+5}^{\nu+1}\bigr]\quad\gamma^{\nu+1}(u)=\gamma^\nu(u). \tag{16}$$

В частности, ввиду формулы (3) имеем

$$\forall i=0,1,\dots,5^\nu\quad\gamma^{\nu+1}\bigl(A_i^\nu\bigr)=\gamma^\nu\bigl(A_i^\nu\bigr), \tag{17}$$

т. е. все вершины ломаной γ^ν являются также вершинами ломаной $\gamma^{\nu+1}$.

Нам понадобятся также некоторые обозначения. Положим $\mathscr{R}_{\mu,i}^\nu=\bigl\{\gamma^\nu(u)\mid u\in\bigl[A_i^\mu,A_{i+1}^\mu\bigr]\bigr\}$, аналогично $\mathscr{R}_{\mu,i}^{\nu+1}=\bigl\{\gamma^{\nu+1}(u)\mid u\in\bigl[A_i^\mu,A_{i+1}^\mu\bigr]\bigr\}$. Тогда свойство 11 функции γ^ν можно переписать в виде

$$\forall\mu=1,\dots,\nu\,\forall E\in\mathscr{R}_{\mu,i}^\nu\,\forall F\in\mathscr{R}_{\mu,j}^\nu\quad|E-F|\ge C_\nu(\mu)\biggl(1-\frac{1}{3}-\dots-\frac{1}{3^{\nu-\mu+1}}\biggr) \text{ при } |i-j|>1,\ i,j=0,1,\dots,5^\mu-1. \tag{18}$$

Рассмотрим более подробно свойства $\gamma^{\nu+1}$ при значении параметра $\delta=0$. В силу формул (13), (11), (4) и свойства 4 отображения l^ν имеем равенства

$$\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\,\forall u\in\bigl[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\bigr]\quad\gamma_2^\nu(u)-\gamma_2^\nu\bigl(A_i^\nu\bigr)=l^\nu\bigl(A_{i+1}^\nu\bigr)\bigl(\gamma_1^\nu(u)-\gamma_1^\nu\bigl(A_i^\nu\bigr)\bigr), \tag{19}$$

$$\delta=0\Rightarrow\big(\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\,\forall u\in\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]\quad\gamma_2^{\nu+1}(u)-\gamma_2^{\nu+1}\big(A_i^\nu\big)\\=l^\nu\big(A_{i+1}^\nu\big)\big(\gamma_1^{\nu+1}(u)-\gamma_1^{\nu+1}\big(A_i^\nu\big)\big)\big).$$

С учетом (17) последнюю формулу можно переписать в виде

$$\delta=0\Rightarrow\big(\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\,\forall u\in\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]\quad\gamma_2^{\nu+1}(u)-\gamma_2^{\nu}\big(A_i^\nu\big)=\\l^\nu\big(A_{i+1}^\nu\big)\big(\gamma_1^{\nu+1}(u)-\gamma_1^{\nu}\big(A_i^\nu\big)\big)\big).\quad(20)$$

По построению, когда переменная u пробегает промежуток $\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$, значения функций $\gamma_1^\nu(u)$ и $\gamma_1^{\nu+1}(u)$ пробегают один и тот же интервал $\big[\gamma_1^\nu\big(A_i^\nu\big),\gamma_1^\nu\big(A_{i+1}^\nu\big)\big]$. Отсюда и из формул (19), (20) следует, что в то же время значения функций $\gamma^\nu(u)$ и $\gamma^{\nu+1}(u)$ пробегают (при условии $\delta=0$) один и тот же отрезок плоскости, соединяющий вершины $\gamma^\nu\big(A_i^\nu\big)$ и $\gamma^\nu\big(A_{i+1}^\nu\big)$. Последнее утверждение, используя введенные недавно обозначения, можно переписать в виде

$$\delta=0\Rightarrow\big(\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\quad\mathscr{R}_{\nu,i}^{\nu+1}=\mathscr{R}_{\nu,i}^{\nu}\big).\quad(21)$$

Отсюда и из того очевидного факта, что при $\mu\le\nu$ каждый отрезок вида $\big[A_i^\mu,A_{i+1}^\mu\big]$ является конечным объединением отрезков вида $\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$, немедленно получаем

$$\delta=0\Rightarrow\big(\forall\mu=1,\dots,\nu\,\forall i=0,1,\dots,5^\nu-1\quad\mathscr{R}_{\mu,i}^{\nu+1}=\mathscr{R}_{\mu,i}^{\nu}\big).$$

Тогда из соображений непрерывности и формулы (18) вытекает, что найдется $\delta_2>0$ такое, что

$$\delta\in[0,\delta_2)\Rightarrow\Bigg(\forall\mu=1,\dots,\nu\,\forall E\in\mathscr{R}_{\mu,i}^{\nu+1}\,\forall F\in\mathscr{R}_{\mu,j}^{\nu+1}\quad|E-F|\\\ge C_\nu(\mu)\bigg(1-\frac13-\dots-\frac{1}{3^{\nu-\mu+1}}-\frac{1}{3^{(\nu+1)-\mu+1}}\bigg)\text{ при }|i-j|>1,\ i,j=0,1,\dots,5^\mu-1\Bigg).\quad(22)$$

Ниже мы всегда будем считать выполненным условие $\delta\in[0,\delta_2)$. Тогда формулу (22) в силу определения $\mathscr{R}_{\mu,i}^{\nu+1}$ можно переписать в виде

11$'$a) если $u_1\in\big[A_i^\mu,A_{i+1}^\mu\big]$, $u_2\in\big[A_j^\mu,A_{j+1}^\mu\big]$, где $\mu=1,\dots,\nu$ и $|i-j|>1$, то $\big|\gamma^{\nu+1}(u_1)-\gamma^{\nu+1}(u_2)\big|\ge C_\nu(\mu)\big(1-\frac13-\dots-\frac{1}{3^{\nu-\mu+1}}-\frac{1}{3^{(\nu+1)-\mu+1}}\big)$.

Теперь докажем инъективность отображения $\gamma^{\nu+1}$ при достаточно малых положительных значениях параметра δ, т. е. что для любой пары чисел u_1,$u_2\in[0,1]$ таких, что $u_1\ne u_2$, выполняется утверждение

$$|\gamma^{\nu+1}(u_1)-\gamma^{\nu+1}(u_2)|>0.\quad(23)$$

Разумеется, достаточно доказать формулу (23) для случая, когда $u_1<u_2$. Рассмотрим все возможные варианты расположения чисел u_1, u_2.

(i) Пусть $u_1\in\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$, $u_2\in\big[A_j^\nu,A_{j+1}^\nu\big]$, причем $|i-j|>1$. Тогда неравенство (23) прямо следует из уже доказанного свойства 11$'$a) отображения $\gamma^{\nu+1}$.

(ii) Пусть $u_1\in\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$, $u_2\in\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$. По свойству 9$'$ на промежутке $\big[A_i^\nu,A_{i+1}^\nu\big]$ кривая, определяемая функцией $\gamma^{\nu+1}$, является ломаной, состоящей из пяти звеньев, с вершинами в точках плоскости $\gamma^{\nu+1}\big(A_{5i+\kappa}^{\nu+1}\big)$, $\kappa=0,1,2,3,4,5$. В силу свойств 9, 10 отображения γ^ν и формулы (16) первое и пятое звенья указанной ломаной не пересекаются и лежат на одной прямой. По построению функции $\gamma^{\nu+1}$ (см. формулы (8), (9) и (14)) легко проверяется, что три средних звена указанной ломаной не параллельны упомянутой прямой при любом положительном значении параметра δ, кроме того, второе звено всегда параллельно четвертому. Отсюда геометрически очевидно, что при $\delta > 0$ указанная ломаная не имеет самопересечений, в частности, справедлива формула (23).

(iii) Пусть $u_1 \in \bigl[A^\nu_{i-1}, A^\nu_i\bigr)$, $u_2 \in \bigl[A^\nu_i, A^\nu_{i+1}\bigr]$. Этот вариант чуть сложнее технически, поэтому разобьем его на два случая.

(iiia) Предположим сначала, что

$$u_1 \in \bigl(A^{\nu+1}_{5(i-1)+4}, A^{\nu+1}_{5(i-1)+5}\bigr). \tag{24}$$

Тогда по формуле (16) точка $\gamma^{\nu+1}(u_1) = \gamma^\nu(u_1)$ является внутренней точкой отрезка I_- (см. свойство (Δ)), а значит, содержится внутри полуплоскости P_-. С другой стороны, снова по формуле (16) точки $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+\kappa}\bigr)$ при $\kappa = 0,1,4,5$ лежат на отрезке I_+, а отрезки с концами $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+1}\bigr)$, $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+2}\bigr)$ и $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+3}\bigr)$, $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+4}\bigr)$ параллельны прямой L по построению (см. формулы (8), (9), (14) и свойство (Δ)). Тогда геометрически очевидно, что у ломаной $\gamma^{\nu+1}$ все вершины $\gamma^{\nu+1}\bigl(A^{\nu+1}_{5i+\kappa}\bigr)$, $\kappa = 0,1,2,3,4,5$, лежат в полуплоскости P_+ (см. свойство (Δ)). Значит, и сама ломаная $\gamma^{\nu+1}(u)$, $u \in \bigl[A^\nu_i, A^\nu_{i+1}\bigr]$, лежит в полуплоскости P_+, в частности, $\gamma^{\nu+1}(u_2) \in P_+$. Поскольку точки $\gamma^{\nu+1}(u_1)$, $\gamma^{\nu+1}(u_2)$ лежат в разных полуплоскостях, справедлива искомая формула (23).

(iiib) Допустим теперь, что условие (24) не выполнено. Тогда имеем включения $u_1 \in \bigl[A^{\nu+1}_{5(i-1)}, A^{\nu+1}_{5(i-1)+4}\bigr]$ и $u_2 \in \bigl[A^\nu_i, A^\nu_{i+1}\bigr]$. Легко видеть, что для определенной выше вспомогательной функции ψ справедливы утверждения

$$\inf_{t\in[0,\frac45]} \psi(t) = \psi(0) = \psi\left(\frac35\right) = 0, \qquad \sup_{t\in[0,\frac45]} \psi(t) = \psi\left(\frac25\right) = \psi\left(\frac45\right) = \frac45. \tag{25}$$

Отсюда и из процедуры построения функции $\gamma_1^{\nu+1}$ следует, что когда u пробегает промежуток $\bigl[A^{\nu+1}_{5(i-1)}, A^{\nu+1}_{5(i-1)+4}\bigr] = \bigl\{(1-t)A^\nu_{i-1} + tA^\nu_i \mid t \in \bigl[0, \frac45\bigr]\bigr\}$, множество значений, принимаемых функцией $\gamma_1^{\nu+1}(u)$, совпадает с множеством значений, принимаемых функцией $\gamma_1^\nu(u)$. Из последнего утверждения и из формул (19), (20) немедленно вытекает равенство

$$\delta = 0 \Rightarrow \mathscr{R}^{\nu+1}_{i-1} = \mathscr{R}^\nu_{i-1}, \tag{26}$$

где мы обозначили $\mathscr{R}^{\nu+1}_{i-1} = \bigl\{\gamma^{\nu+1}(u) \mid u \in \bigl[A^{\nu+1}_{5(i-1)}, A^{\nu+1}_{5(i-1)+4}\bigr]\bigr\}$, $\mathscr{R}^\nu_{i-1} = \bigl\{\gamma^\nu(u) \mid u \in \bigl[A^{\nu+1}_{5(i-1)}, A^{\nu+1}_{5(i-1)+4}\bigr]\bigr\}$. В силу инъективности и непрерывности отображения γ^ν найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\forall E \in \mathscr{R}^\nu_{i-1}\, \forall F \in \mathscr{R}^\nu_{\nu,i} \quad |E - F| \ge \varepsilon_0.$$

Из последней формулы, используя также формулы (26), (21) и соображения непрерывности, получаем, что существует $\delta_3 > 0$, для которого справедливо утверждение

$$\delta \in (0, \delta_3) \Rightarrow \bigl(\forall E \in \mathscr{R}^{\nu+1}_{i-1}\, \forall F \in \mathscr{R}^{\nu+1}_{\nu,i} \quad |E - F| \ge \varepsilon_0/2\bigr).$$

В частности, $|\gamma^{\nu+1}(u_1) - \gamma^{\nu+1}(u_2)| \ge \frac{\varepsilon_0}{2}$, что означает справедливость искомой формулы (23) для случая (iiib).

Мы перебрали все возможные варианты расположения точек u_1 и u_2 на отрезке $[0,1]$. Тем самым мы доказали, что если выбрать параметр $\delta \in (0, \delta_3)$, то для любой пары чисел u_1,$u_2 \in [0,1]$ таких, что $u_1 \ne u_2$, выполняется неравенство

(23). Ниже мы будем считать, что включение $\delta \in (0, \delta_3)$ выполнено, тогда получаем свойство

10′) ломаная $\gamma^{\nu+1}$ не имеет самопересечений, т. е. отображение $\gamma^{\nu+1}$ инъективно.

Прямым следствием только что доказанного свойства 10′ является утверждение

11′b) если $u_1 \in \left[A_i^{\nu+1}, A_{i+1}^{\nu+1}\right]$, $u_2 \in \left[A_j^{\nu+1}, A_{j+1}^{\nu+1}\right]$, где $|i-j| > 1$, то $|\gamma^{\nu+1}(u_1) - \gamma^{\nu+1}(u_2)| \geq \frac{2}{3}C(\nu+1)$, где $C(\nu+1)$ — некоторая положительная константа, зависящая только от номера $\nu+1$.

Объединяя свойство 11′b) с доказанным ранее свойством 11′a), получаем в итоге нужное нам свойство

11′) если $u_1 \in \left[A_i^{\mu}, A_{i+1}^{\mu}\right]$, $u_2 \in \left[A_j^{\mu}, A_{j+1}^{\mu}\right]$, где $\mu = 1, \ldots, \nu, \nu+1$ и $|i-j| > 1$, то

$$|\gamma^{\nu+1}(u_1) - \gamma^{\nu+1}(u_2)| \geq C_{\nu+1}(\mu)\left(1 - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{3^{\nu-\mu+1}} - \frac{1}{3^{(\nu+1)-\mu+1}}\right),$$

где $C_{\nu+1}(\mu) > 0$ — некоторая константа, причем справедливо равенство

$$C_{\nu+1}(\mu) = C_\nu(\mu) \quad \text{при } \mu \leq \nu. \tag{27}$$

Наконец, положим $\delta_4 = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)$ и зафиксируем произвольно параметр $\delta \in (0, \delta_4)$. В силу доказанного выше при таком выборе параметра δ построенные функции $\gamma_1^{\nu+1}$, $l^{\nu+1}$, $\gamma_2^{\nu+1}$ и $\gamma^{\nu+1}$ будут обладать свойствами 1′–11′.

Теперь, когда построение на индукционном шаге проделано, основные трудности остались позади. Перейдем к последнему этапу доказательства теоремы 1. В силу принципа математической индукции мы можем построить последовательность четверок функций γ_1^ν, l^ν, γ_2^ν и $\gamma^\nu = (\gamma_1^\nu, \gamma_2^\nu)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, обладающих для каждого номера ν свойствами 1–11, причем ввиду равенства (27) константа $C_\nu(\mu)$ в свойстве 11 не зависит от номера ν, т. е. мы можем переписать свойство 11 следующим образом:

11″) если $u_1 \in [A_i^\mu, A_{i+1}^\mu]$, $u_2 \in [A_j^\mu, A_{j+1}^\mu]$, где $\mu = 1, \ldots, \nu$ и $|i-j| > 1$, то

$$|\gamma^\nu(u_1) - \gamma^\nu(u_2)| \geq C(\mu)\left(1 - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{3^{\nu-\mu+1}}\right),$$

где $C(\mu) > 0$ — некоторая константа, зависящая только от μ.

Нам понадобятся далее еще некоторые свойства указанной последовательности четверок функций, вытекающие из индукционного построения. Из формул (7) и (17) следует, что

$$\forall \nu \geq \mu\, \forall i = 0, 1, \ldots, 5^\mu \quad l^\nu\big(A_i^\mu\big) = l^\mu\big(A_i^\mu\big), \tag{28}$$

$$\forall \nu \geq \mu\, \forall i = 0, 1, \ldots, 5^\mu \quad \gamma^\nu\big(A_i^\mu\big) = \gamma^\mu\big(A_i^\mu\big). \tag{29}$$

Кроме того, из (6) получаем, что

$$\forall \nu \geq \mu\, \forall i = 0, 1, \ldots, 5^\mu - 1\, \forall u \in [A_i^\mu, A_{i+1}^\mu] \text{ число } \gamma_1^\nu(u) \text{ лежит между числами } \gamma_1^\mu\big(A_i^\mu\big),\ \gamma_1^\mu\big(A_{i+1}^\mu\big). \tag{30}$$

Из (29), (30) и свойства 3 построенных последовательностей следует, что последовательность функций γ_1^ν равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$. Далее, из формул (28), (12) и свойств 4–6 вытекает, что последовательность функций l^ν равномерно сходится к некоторой функции $l : [0,1] \to \mathbb{R}$, причем функция l непрерывна слева на $[0,1]$, и справедливы утверждения

$$\operatorname{Var} l \le 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^\nu} + \dots = 2 < \infty, \quad \operatorname{Var}(l - l_\nu) \to 0 \text{ при } \nu \to \infty.$$

Теперь, привлекая формулу (4), автоматически получаем, что последовательность функций γ_2^ν равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$, причем справедлива формула

$$\forall u \in [0,1] \quad \gamma_2(u) = \gamma_1(u) l(u) - \int\limits_0^{u-0} \gamma_1(\tau)\, dl(\tau). \tag{31}$$

Из равномерной сходимости функций γ_1^ν и γ_2^ν следует, что задаваемые ими вектор-функции $\gamma^\nu = (\gamma_1^\nu, \gamma_2^\nu)$ равномерно сходятся к непрерывной функции $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Если в свойстве $11''$ мы устремим $\nu \to \infty$ при фиксированном μ, то немедленно получим справедливость следующего утверждения:

$11'''$) для любого натурального числа μ если $u_1 \in [A_i^\mu, A_{i+1}^\mu]$, $u_2 \in [A_j^\mu, A_{j+1}^\mu]$, где $|i-j| > 1$, то $|\gamma(u_1) - \gamma(u_2)| \ge \frac{C(\mu)}{2} > 0$.

Элементарно проверяется, что полученное свойство $11'''$ эквивалентно инъективности функции γ.

Суммируя сказанное, мы построили непрерывное инъективное отображение (дугу) $\gamma : [0,1] \ni u \mapsto (\gamma_1(u), \gamma_2(u)) \in \mathbb{R}^2$ и функцию l ограниченной вариации такие, что координатные функции отображения γ удовлетворяют формуле (31). Тогда γ обладает свойством (Γ_1) из [3]. Учитывая замечания, сделанные в начале доказательства теоремы 1, нам осталось проверить, что построенная дуга γ не имеет касательной ни в одной точке интервала $(0,1)$. Для этого проведем еще несколько предварительных наблюдений.

Переходя к пределу при $\nu \to \infty$ в соотношениях (29), (30), получаем, что

$$\forall \mu\, \forall i = 0, 1, \dots, 5^\mu \quad \gamma(A_i^\mu) = \gamma^\mu(A_i^\mu), \tag{32}$$

$$\forall \mu\, \forall i = 0, 1, \dots, 5^\mu - 1\, \forall u \in [A_i^\mu, A_{i+1}^\mu] \text{ число } \gamma_1(u) \text{ лежит}$$
$$\text{между числами } \gamma_1^\mu(A_i^\mu) \text{ и } \gamma_1^\mu(A_{i+1}^\mu).$$

Из этих утверждений нетрудно вывести, что

$$\forall \nu\, \forall i, j = 0, 1, \dots, 5^\nu \quad \{\gamma_1(u) \mid u \in [A_i^\nu, A_j^\nu]\} = \{\gamma_1^\nu(u) \mid u \in [A_i^\nu, A_j^\nu]\}. \tag{33}$$

Далее, из соотношений (25) и процедуры построения функции $\gamma_1^{\nu+1}$ вытекает, что

$$\forall \nu\, \forall i = 0, 1, \dots, 5^\nu - 1\, \forall u \in [A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+4}^{\nu+1}] \text{ число } \gamma_1^{\nu+1}(u) \text{ лежит}$$
$$\text{между числами } \gamma_1^{\nu+1}(A_{5i}^{\nu+1}) = \gamma_1^{\nu+1}(A_{5i+3}^{\nu+1}),\ \gamma_1^{\nu+1}(A_{5i+2}^{\nu+1}) = \gamma_1^{\nu+1}(A_{5i+4}^{\nu+1}).$$

Отсюда и из формул (32), (33) получаем, что

$$\forall \nu\, \forall i = 0, 1, \dots, 5^\nu - 1\, \forall u \in [A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+4}^{\nu+1}] \text{ число } \gamma_1(u) \text{ лежит}$$
$$\text{между числами } \gamma_1(A_{5i}^{\nu+1}) = \gamma_1(A_{5i+3}^{\nu+1}),\ \gamma_1(A_{5i+2}^{\nu+1}) = \gamma_1(A_{5i+4}^{\nu+1}). \tag{34}$$

Так как промежутки $\left[A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+2}^{\nu+1}\right]$ и $\left[A_{5i+3}^{\nu+1}, A_{5i+4}^{\nu+1}\right]$ не пересекаются, то из утверждения (34) следует, что

$$\forall\nu\,\forall i = 0, 1, \ldots, 5^\nu - 1\,\forall u \in \left[A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+4}^{\nu+1}\right]\,\exists u^* \in \left[A_{5i}^{\nu+1}, A_{5i+4}^{\nu+1}\right] \text{ такое, что } u^* \neq u,\ \gamma_1(u) = \gamma_1(u^*). \quad (35)$$

Перейдем к доказательству того, что построенная дуга γ не имеет касательной ни в одной точке интервала $(0,1)$. Предположим противное, т. е. что существует точка $u_0 \in (0,1)$, в которой определена касательная к дуге γ. Тогда эта касательная совпадает с σ-касательной (определение см. в [3]) в точке u_0, а значит, по свойству (Γ_3) из [3] касательная параллельна вектору $(1, l(u_0))$ (при этом замены координат, о которой говорится в свойстве (Γ_3) из [3], делать не нужно, так как в уже имеющейся настоящей системе координат справедлива формула (31)). Возьмем теперь «пятеричное» разложение $u_0 = \frac{i_1}{5} + \frac{i_2}{25} + \cdots + \frac{i_\nu}{5^\nu} + \ldots$, где $i_\nu \in \{0,1,2,3,4\}$. Чтобы устранить двусмысленность (которая имеет место и в десятичном разложении), мы будем считать без потери общности, что это разложение не имеет «хвоста», состоящего из бесконечной последовательности одних только четверок, т. е. существует бесконечная последовательность номеров ν_κ, удовлетворяющих условию

$$i_{(\nu_\kappa+1)} < 4. \quad (36)$$

Положим

$$u_\nu = \frac{i_1}{5} + \frac{i_2}{25} + \cdots + \frac{i_\nu}{5^\nu}, \quad j_\nu = 5^{\nu-1} i_1 + \cdots + 5 i_{\nu-1} + i_\nu.$$

Имеют место тривиальные формулы

$$u_\nu = \frac{j_\nu}{5^\nu}, \quad j_{\nu+1} = 5 j_\nu + i_{\nu+1}.$$

Поэтому, используя обычные свойства «пятеричного» разложения и определение чисел A_i^ν, получаем включения $\forall\nu \geq 1\ u_0 \in \left[u_\nu, u_\nu + \frac{1}{5^\nu}\right] = \left[A_{j_\nu}^\nu, A_{j_\nu+1}^\nu\right]$. Тогда в силу (36) имеем включения

$$\forall\kappa\ u_0 \in \left[A_{j_{(\nu_\kappa+1)}}^{\nu_\kappa+1}, A_{j_{(\nu_\kappa+1)}+1}^{\nu_\kappa+1}\right] = \left[A_{5j_{\nu_\kappa}+i_{(\nu_\kappa+1)}}^{\nu_\kappa+1}, A_{5j_{\nu_\kappa}+i_{(\nu_\kappa+1)}+1}^{\nu_\kappa+1}\right] \subset \left[A_{5j_{\nu_\kappa}}^{\nu_\kappa+1}, A_{5j_{\nu_\kappa}+4}^{\nu_\kappa+1}\right].$$

Отсюда и из формулы (35) непосредственно вытекает, что

$$\forall\kappa\ \exists u_\kappa^* \in \left[A_{5j_{\nu_\kappa}}^{\nu_\kappa+1}, A_{5j_{\nu_\kappa}+4}^{\nu_\kappa+1}\right] \text{ такое, что } u_\kappa^* \neq u_0,\ \gamma_1(u_0) = \gamma_1(u_\kappa^*).$$

Из последнего получаем, что $u_0 \neq u_\kappa^* \to u_0$, а также ввиду инъективности отображения γ вектор $\frac{\gamma(u_\kappa^*)-\gamma(u_0)}{|\gamma(u_\kappa^*)-\gamma(u_0)|}$ параллелен вектору $(0,1)$. С другой стороны, в силу высказанных ранее замечаний при $\kappa \to \infty$ направление вектора $\frac{\gamma(u_\kappa^*)-\gamma(u_0)}{|\gamma(u_\kappa^*)-\gamma(u_0)|}$ должно стремиться к направлению $(1, l(u_0))$. Получили противоречие. Тем самым мы доказали, что построенная дуга γ не имеет касательной ни в одной точке.

Это означает, согласно сделанным в начале доказательства теоремы 1 замечаниям, что теорема 1 полностью доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коробков М. В.* Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1083–1091.
2. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 5. С. 99–124.
3. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась множеством значений градиента C^1-гладкой функции // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 789–810.
4. *Коробков М. В.* Свойства C^1-гладких функций, множество значений градиента которых является нигде не плотным множеством // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1272–1284.

Статья поступила 2 февраля 2006 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
korob@math.nsc.ru