Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.540+510.5

О КВАЗИРЕЗОЛЬВЕНТНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

А. Н. Хисамиев

Аннотация. Работа является продолжением [1]. В ней введено понятие примарно квазирезольвентной периодической абелевой группы и описаны примарно квазирезольвентные и 1-квазирезольвентные периодические абелевы группы. Построен пример квазирезольвентной, но не примарно квазирезольвентной периодической абелевой группы. Для абелевой группы, являющейся прямой суммой циклических групп простых порядков, получены критерии квазирезольвентности, 1-квазирезольвентности и резольвентности и установлены соотношения между ними. Построено такое множество S простых чисел, что группа, являющаяся прямой суммой циклических групп порядка $p \in S$, не является квазирезольвентной.

Ключевые слова: допустимое множество, квазирезольвентность, примарная квазирезольвентность, периодическая абелева группа, вычислимость.

В монографии Ю. Л. Ершова [2] введено важное понятие квазирезольвентного допустимого множества и доказано, что наследственно конечное допустимое множество над моделью регулярной теории квазирезольвентно. Там же установлено, что в квазирезольвентном допустимом множестве существует универсальная Σ-функция и справедлив принцип редукции. По аналогии с этим понятием в [1, 3] дано определение квазирезольвентной и 1-квазирезольвентной модели (определения A и B). Неформально квазирезольвентность модели означает, что существует ее эффективное представление в виде возрастающей последовательности подмоделей, которая называется *квазирезольвентой* данной модели.

В связи с вышесказанным представляет интерес нахождение богатых классов квазирезольвентных моделей среди классических алгебр, допускающих «хорошее» описание.

В [1] описаны квазирезольвентные абелевы p-группы и алгебры Ершова.

Цель данной статьи — нахождение широких классов квазирезольвентных периодических абелевых групп. Для решения этой задачи введены новые классы квазирезольвентных групп с помощью наложения тех или иных естественных ограничений на квазирезольвенту.

В работе даны достаточные условия квазирезольвентности модели (предложение 1) и необходимое условие квазирезольвентности периодической абелевой группы (теорема 1). Введены понятия примарно квазирезольвентной и

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ (№ МК–3721.2007.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 05–01–00819), Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4413.2006.1).

G-квазирезольвентной периодической абелевой группы (определения 1, 2). G-квазирезольвентность группы означает существование такой квазирезольвенты, что каждый ее член является подгруппой, а примарная квазирезольвентность — что для любого простого числа p каждый член либо пересекается с p-примарной компонентой по нулю, либо ее содержит. С их помощью удалось получить достаточно простые описания классов примарно квазирезольвентных периодических абелевых групп и G-квазирезольвентных счетных редуцированных периодических абелевых групп на языке числовых множеств. Таким образом, найден довольно богатый класс квазирезольвентных периодических абелевых групп. Как следствие этих результатов, получены: 1) модельная полнота квазирезольвентной периодической абелевой группы (следствие 2); 2) критерий 1-квазирезольвентности периодической абелевой группы (следствие 3); 3) пример G-квазирезольвентной, но не примарной квазирезольвентной периодической абелевой группы (следствие 6); 4) критерий квазирезольвентности, 1-квазирезольвентности и резольвентности группы, являющейся прямой суммой циклических групп различных простых порядков (следствия 7–10); 5) тот факт, что необходимое условие из предложения A для квазирезольвентности периодической абелевой группы не является достаточным (следствие 12).

Мы придерживаемся терминологии и обозначений по допустимым множествам [2] и группам [4]. В дальнейшем рассматриваются модели конечных сигнатур.

Пусть дана конечная чисто предикатная сигнатура σ и $\sigma' = \sigma \cup \{\in, \cup, \varnothing\}$. Через Γ обозначим гёделеву нумерацию всех формул сигнатуры σ'. Формулу номера m также будем обозначать через Φ_m. Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая модель сигнатуры σ. Через $\Sigma(\mathbb{HF}(\mathfrak{M}))$ $(\Delta(\mathbb{HF}(\mathfrak{M})))$ обозначаются соответственно семейство всех Σ- (Δ)-предикатов в допустимом множестве $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Через W_n обозначается n-е вычислимо перечислимое множество, D_n — n-е конечное множество, т. е. $D_n = \{a_1, \dots, a_k\}$, если $n = \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{a_i}$, ω — множество всех натуральных чисел, $\omega^+ = \omega \setminus \{0\}$. Сводимость по перечислению (сокращенно e-сводимость) определяется следующим образом:

$$A \leq_e B \Leftrightarrow \exists n \forall t\ (t \in A \Leftrightarrow \exists m(\langle t, m\rangle \in W_n \ \&\ D_m \subseteq B)).$$

В [3] и [1] введены следующие понятия квазирезольвентной и 1-квазирезольвентной модели.

Определение A [3]. Модель $\mathfrak{M}$ называется *квазирезольвентной*, если существует возрастающая последовательность подмножеств $M_n \subseteq M$, $n \in \omega$, называемая *квазирезольвентой*, такая, что

1) $\bigcup M_i = M$,

2) предикаты $P = \{\langle n, a\rangle \mid a \in M_n\}$, $\mathrm{Tr}_{\mathfrak{M}} = \{\langle n, m, \bar{a}\rangle \mid M_n \models \Phi_m(\bar{a}),\ \bar{a} \in M_n^{<\omega}\}$ являются Δ-предикатами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Определение B [1]. Модель $\mathfrak{M}$ называют 1-*квазирезольвентной*, если предикат $\mathrm{Tr}^1_{\mathfrak{M}} = \{\langle n, \bar{a}\rangle \mid \mathfrak{M} \models \Phi_n(\bar{a}),\ n \in \omega,\ \bar{a} \in M^{<\omega}\}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Замечание 1. Если существует конечная последовательность элементов $\bar{a} \in M^{<\omega}$ такая, что модель $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$ квазирезольвентна (1-квазирезольвентна), то и модель $\mathfrak{M}$ квазирезольвентна (1-квазирезольвентна). Обратно, если $\mathfrak{M}$ квазирезольвентна (1-квазирезольвентна), то любое ее конечное константное обогащение $\langle \mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$ является квазирезольвентной моделью (1-квазирезольвентной моделью).

Приведем достаточное условие квазирезольвентности модели.

Предложение 1. *Пусть для модели $\mathfrak{M}$ существует последовательность подмножеств*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots \tag{1}$$

такая, что выполнены условия:

1) $\bigcup M_n = M$;

2) *существует Σ-подмножество $A \subseteq \omega^2$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ такое, что*

$$A_n = \{m \mid \langle n, m\rangle \in A\}$$

является множеством номеров аксиом теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_n)$, где $\mathfrak{M}_n \rightleftharpoons \mathfrak{M} \restriction M_n$;

3) *теория $T_n = \mathrm{Th}(\mathfrak{M}_n)$ модельно полна;*

4) *множество $\{\langle n, x\rangle \mid x \in M_n\}$ является Δ-подмножеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Тогда последовательность (1) *является квазирезольвентой для модели $\mathfrak{M}$.*

Обратно, если последовательность (1) *является квазирезольвентой, то выполнены условия* 1, 2, 4.

Доказательство. Пусть для модели $\mathfrak{M}$ и последовательности (1) справедливы условия 1–4. Тогда легко заметить, что $\Gamma^{-1}(T_n) \le_e A_n$, $\overline{\Gamma^{-1}(T_n)} \le_e A_n$. Отсюда и из Σ-определимости множества A_n в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$ следует, что $\Gamma^{-1}(T_n)$ является двуместным Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Пусть B, B' и C — множества номеров всех формул, предложений и $\exists$-формул сигнатуры σ соответственно. Очевидно, что B, B' и C являются Δ-предикатами в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Предикат

$$E = \{\langle n, m, s\rangle \mid (\Phi_m \equiv \Phi_s) \in T_n \ \&\ s \in C\}$$

также является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.

Пусть $\Phi_s^{M_n}$ — формула, полученная из Φ_s специализацией по множеству M_n. Из условия 4 следует, что существует вычислимая функция $h(s, n)$ такая, что $\Phi_s^{M_n} = \Phi_{h(s,n)}$. Пусть $g(s)$ — вычислимая функция такая, что $\Phi_{g(s)} = \neg\Phi_s$ и Tr_Σ — универсальный Σ-предикат [1, с. 62]. Из условия 3 имеем

$$\mathrm{Tr}_\mathfrak{M}(n, m, \bar a) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models m \in B \ \&\ \exists s(\langle n, m, s\rangle \in E \ \&\ \mathrm{Tr}_\Sigma(h(n, s), \bar a)),$$

$$\neg\,\mathrm{Tr}_\mathfrak{M}(n, m, \bar a) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models m \notin B \ \vee\ \exists s(\langle n, g(m), s\rangle \in E \ \&\ \mathrm{Tr}_\Sigma(h(n, s), \bar a)).$$

Отсюда $\mathrm{Tr}_\mathfrak{M}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Поэтому последовательность (1) является квазирезольвентой для модели $\mathfrak{M}$. Достаточность доказана.

Докажем вторую часть предложения. Пусть последовательность (1) является квазирезольвентой для модели $\mathfrak{M}$. Тогда условия 1, 4 выполнены по определению квазирезольвенты модели $\mathfrak{M}$. Справедливость условия 2 вытекает из следующей эквивалентности:

$$m \in \Gamma^{-1}(T_n) \Leftrightarrow \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \mathrm{Tr}_\Sigma(h(n, m), \varnothing) \ \&\ m \in B'. \quad \square$$

Следствие 1. *Пусть для модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ справедливы условия:*

1) *теория $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{M})$ модельно полна;*

2) *множество номеров A аксиом теории T является Σ-множеством в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$.*

Тогда модель $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна.

Обратно, если $\mathfrak{M}$ 1-квазирезольвентна, то справедливо условие 2.

Пусть модель $\mathfrak{M}$ квазирезольвентна, последовательность $\langle M_n \mid n \in \omega\rangle$ является ее квазирезольвентой и предикат $P = \{\langle n, x\rangle \mid x \in M_n\}$ определяется Σ-формулой $\Phi(\bar a, n, x)$ в $\mathbb{HF}(\mathfrak{M})$, где $\bar a \in M^{<\omega}$. Тогда справедлива

Лемма 1. *Пусть даны элементы b, $c \in M$ такие, что существует автоморфизм φ модели $\mathfrak{M}$ такой, что $\varphi b = c$, $\varphi a_i = a_i$, $i < m$. Тогда для любого $n \in \omega$ если $b \in M_n$, то $c \in M_n$.*

Действительно, из условия леммы следует, что $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\bar{a}, n, b)$. Автоморфизм φ продолжается до автоморфизма $\varphi^* : \mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \to \mathbb{HF}(\mathfrak{M})$. Отсюда $\mathbb{HF}(\mathfrak{M}) \models \Phi(\bar{a}, n, c)$. $\square$

В дальнейшем под словом «группа» понимается только абелева группа. Группы рассматриваются в сигнатуре $\sigma = \langle P^3, 0 \rangle$, где $P^3(x, y, z) \rightleftharpoons x + y = z$. Пусть G — группа, P — множество всех простых чисел, $p \in P$, $G[p^m] = \{x \mid p^m x = 0\}$, $p^m G = \{p^m x \mid x \in G\}$. Для элемента $x \in G$ через $|x|$ обозначается порядок элемента, G^α — прямая сумма α экземпляров группы G, C_{p^m} ($C_{p^0} \rightleftharpoons 0$) и C_{p^∞} — циклическая группа порядка p^m и квазициклическая p-группа соответственно.

Определение C [1]. Пусть для модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ справедливо условие: для любой конечной последовательности элементов $\bar{a} \in M^{<\omega}$ существуют Π^0_1-формула $\Theta_{\bar{a}}(\bar{x})$ без параметров сигнатуры σ, Σ^0_1-подмодель $\mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{M}$, $\bar{a} \in N^{<\omega}$, вложение $f : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ модели $\mathfrak{N}$ в себя и последовательность элементов $\bar{b} \in N^{<\omega}$ такие, что

$$f \restriction \bar{a} = \mathrm{id}, \quad \mathfrak{N} \models \Theta_{\bar{a}}(\bar{b}) \wedge \neg\Theta_{\bar{a}}(f\bar{b}).$$

Тогда модель $\mathfrak{M}$ назовем *E-разделяющейся моделью* (или *ER-моделью*).

Предложение A [1]. *Любая ER-модель не квазирезольвентна.*

Теорема A [1]. *Пусть G — абелева p-группа, а R и D — ее редуцированная и делимая части соответственно. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *G 1-квазирезольвентна;*

2) *G квазирезольвентна;*

3) *если ранг $r(D)$ подгруппы D больше или равен ω, то подгруппа R конечна; если же $r(D) < \omega$, то $R = R_0 \oplus R_1$, где R_0 конечна, и существует такое число $n \geq 0$, что $R_1 \simeq C^\alpha_{p^n}$ ($C^\alpha_{p^0} \rightleftharpoons 0$), $\alpha \geq \omega$.*

Из предложения A и доказательства теоремы A вытекает

Предложение 2. *Пусть G — абелева p-группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *G является ER-моделью и формула $\Theta_{\bar{a}}(\bar{x})$ из определения C имеет вид $\forall y \neg(py = x)$;*

2) *G не квазирезольвентна.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2 следует из предложения A. Покажем 2 $\Rightarrow$ 1. Пусть G не квазирезольвентна. Тогда по теореме A группа G имеет вид, описанный в леммах 3.4–3.6 из [1]. Отсюда и из доказательств этих лемм получаем утверждение 1. $\square$

Пусть G — периодическая абелева группа и $G^{(p)}$ — ее примарная p-компонента.

Предложение 3. *Если периодическая абелева группа G квазирезольвентна, то каждая ее примарная компонента $G^{(p)}$ также квазирезольвентна.*

Доказательство. Допустим, что G квазирезольвентна, но некоторая ее p-компонента $G^{(p)}$ не квазирезольвентна. По предложению 2 подгруппа $G^{(p)}$

является ER-моделью. Тогда существует Σ_1^0-подмодель $\mathfrak{N} \prec_1 G^{(p)}$, удовлетворяющая условию определения ER-модели. Рассмотрим подгруппу $G_0 = \mathfrak{N} \oplus \bigoplus\limits_{q \neq p} G^{(q)}$. Легко проверить, что $G_0 \prec_1 G$ и подмодель G_0 также удовлетворяет условию определения ER-модели, т. е. группа G является ER-моделью. Следовательно, по предложению А группа G не квазирезольвентна; получили противоречие. $\square$

Отсюда и из теоремы А вытекает, что если группа G квазирезольвентна, то каждая ее p-компонента изоморфна либо группе

$$R_0^{(p)} \oplus C_{p^\infty}{}^{\alpha}, \tag{2}$$

либо

$$R_0^{(p)} \oplus C_{p^m}{}^{\alpha} \oplus C_{p^\infty}{}^{k}, \tag{3}$$

где $R_0^{(p)}$ — конечная p-группа, $k, m \in \omega$, $\alpha \geq \omega$.

Пусть дана периодическая абелева группа G и каждая ее p-компонента $G^{(p)}$ есть прямая сумма циклических и квазициклических групп:

$$G^{(p)} = \oplus\{C_{p^{m_i}} \mid i \in \omega\} \oplus C_{p^\infty}{}^{\alpha},$$

где α — конечный или бесконечный кардинал.

Характеристикой $\chi(G)$ *группы* G назовем множество

$$\chi(G) = \{\langle p, m, s\rangle \mid (s \in \omega,\ m \in \omega^+,\\ \exists i_0 \dots \exists i_s (m_{i_0} = \dots = m_{i_s} = m)) \vee (m = 0 \ \&\ s < \alpha)\}.$$

По характеристике $\chi \rightleftharpoons \chi(G)$ введем следующие множества:

$$A = \{p \mid \exists m \in \omega^+ \exists s(\langle p, m, s\rangle \in \chi \ \&\ \langle p, m, s+1\rangle \notin \chi)\},$$

$$B = \{p \mid \exists m \in \omega^+ \forall s(\langle p, m, s\rangle \in \chi)\},$$

$$A^0 = \{p \mid \exists s(\langle p, 0, s\rangle \in \chi \ \&\ \langle p, 0, s+1\rangle \notin \chi)\}, \quad B^0 = \{p \mid \forall s(\langle p, 0, s\rangle \in \chi)\}.$$

Для каждого $p \in A$ положим

$$A^{(p)} = \{m > 0 \mid \exists s(\langle p, m, s\rangle \in \chi \ \&\ \langle p, m, s+1\rangle \notin \chi)\},$$

а для каждого $p \in B$ —

$$B^{(p)} = \{m > 0 \mid \forall s(\langle p, m, s\rangle \in \chi)\}.$$

Через a_p обозначим наименьший элемент множества $A^{(p)}$. Тогда справедлива

Теорема 1. *Пусть периодическая группа* G *квазирезольвентна. Тогда справедливы условия:*

1) G *— прямая сумма циклических и квазициклических групп;*

2) *множество* $A^{(p)}$ *конечно, а* $B^{(p)}$ *не более чем одноэлементно; если* $B^{(p)} \neq \varnothing$*, то полагаем* $B^{(p)} \rightleftharpoons \{b_p\}$*;*

3) $B \cap B^0 = \varnothing$*;*

4) *множества* $S = \{p \mid 0 < a_p < b_p\}$ *и* $A \cap B^0$ *конечны.*

Доказательство. Пусть периодическая группа G квазирезольвентна. Справедливость пп. 1–3 легко следует из предложения 3 и теоремы А. Докажем п. 4. Допустим противное, т. е. что множество S бесконечно. Докажем, что тогда группа G является ER-моделью. Пусть дано конечное множество элементов $a_0, \dots, a_{n-1} \in G$. Выберем конечное множество P_0 такое, что $a_i \in G_0 \rightleftharpoons \bigoplus\{G^{(p)} \mid p \in P_0\}$ для любого $i < n$, и положим $G_1 = \bigoplus\{G^{(p)} \mid p \in P \setminus P_0\}$. Тогда $G = G_0 \oplus G_1$. Так как множество S бесконечно, то существует такое наименьшее число $p \in S$, что $G^{(p)} \subseteq G_1$. По определению множества S имеем $0 < a_p < b_p$. Группа $G^{(p)}$ имеет разложение $G^{(p)} = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2$, где $H_0 \cong C_{p^{a_p}}$, $H_1 \cong C^{\omega}_{p^{b_p}}$. Пусть $H_0 = (a)$, $H_1 = \oplus(d_i)$, где $(a) \cong C_{p^{a_p}}$, $(d_i) \cong C_{p^{b_p}}$. Тогда существует изоморфное вложение $\varphi : G \to G$ такое, что

$$\varphi a = p^{b_p - a_p} d_0, \quad \varphi d_i = d_{i+1}, \quad \varphi \upharpoonright H_2 = \varphi \upharpoonright G^{(q)} = \mathrm{id},$$

где $q \neq p$. Через $\Phi(x)$ обозначим формулу $\forall y (\neg py = x)$. Тогда легко проверить, что $G \models \Phi(a) \wedge \neg\Phi(\varphi a)$, т. е. G является ER-моделью. Следовательно, по предложению A группа G не квазирезольвентна. Полученное противоречие показывает, что множество S конечно.

Аналогично доказывается, что множество $A \cap B^0$ конечно. $\square$

Введем некоторое усиление понятия квазирезольвентной группы.

Определение 1. Периодическая абелева группа G называется *примарно квазирезольвентной*, если существует ее квазирезольвента $\langle G_n \mid n \in \omega\rangle$ такая, что для любых чисел p, n справедливо либо $G^{(p)} \cap G_n = 0$, либо $G^{(p)} \subseteq G_n$ и G_n — подгруппа группы G. Последовательность G_n назовем *примарной квазирезольвентой группы* G.

Теорема 2. *Периодическая абелева группа G примарно квазирезольвентна тогда и только тогда, когда*

1) *справедливы условия теоремы* 1;

2) *существует возрастающая последовательность подмножеств $\langle \chi_n \mid n \in \omega\rangle$ такая, что*

(a) $\bigcup \chi_n = \chi(G)$,

(b) $\chi^* = \{\langle n, x\rangle \mid x \in \chi_n\} \in \Delta(\mathbb{HF}(G))$,

(c) *для любых чисел p, n верно: если существует тройка $\langle p, m, s\rangle \in \chi_n$, то любая тройка $\langle p, m', s'\rangle$ из χ также принадлежит множеству χ_n;*

3) $\alpha(n,p) = \max\{m, b_p, 0 \mid m \in A_n^{(p)}, b_p \in B_n^{(p)}\} \in \Sigma(\mathbb{HF}(G))$, *где множества $A_n^{(p)}$, $B_n^{(p)}$ определены по множеству χ_n аналогично определению $A^{(p)}$, $B^{(p)}$ по множеству χ.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа G примарно квазирезольвентна и последовательность $\langle G_n \mid n \in \omega\rangle$ — ее примарная квазирезольвента. По теореме 1 условие 1 справедливо. Положим $\chi_n = \bigcup\{\chi(G^{(p)}) \mid G^{(p)} \subseteq G_n\}$. Пусть вычислимые функции g, h такие, что справедливы следующие равенства:

$$\Phi_{g(p,m)} = \forall x \exists y \exists z\ (x - y = pz \ \&\ p^m y = 0), \quad \Phi_{h(p,m)} = \neg\Phi_{g(p,m)}.$$

Отсюда следует, что для любой группы H справедлива эквивалентность

$$H \models \Phi_{g(p,m)} \Leftrightarrow H/H[p^m]\ p\text{-делима}.$$

Тогда

$$\alpha(n,p) = m \Leftrightarrow \mathbb{HF}(G) \models \mathrm{Tr}_G(n, g(p,m), \varnothing)\ \&\ \forall i < m\ \ \mathrm{Tr}_G(n, h(p,i), \varnothing).$$

Отсюда $\alpha \in \Sigma(\mathbb{HF}(G))$.

Для доказательства условия 2 заметим, что выполнены следующие эквивалентности:

$$\langle p, m, s\rangle \in \chi_n,\ m \in \omega^+ \Leftrightarrow \text{в } G_n \text{ существует сервантная подгруппа, изоморфная } G_{p^m}^{s+1},$$

$$\langle p, 0, s\rangle \in \chi_n \Leftrightarrow \text{в } G_n \text{ существует подгруппа, изоморфная } G^{s+1}_{p^{\alpha(n,p)+1}}.$$

Отсюда вытекает, что $\chi^* \in \Delta(\mathbb{HF}(G))$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для группы G справедливы условия 1–3 и $C_n \rightleftharpoons \{p \mid \exists m \in \omega \exists s \in \omega\ \langle p, m, s\rangle \in \chi_n\}$. Не умаляя общности, можно считать, что справедливо условие

$$S \cup (A \cap B^0) \subseteq C_0.$$

Так как для группы G выполнены условия теоремы 1, то каждая p-компонента $G^{(p)}$ группы G представима либо в виде (2), либо в виде (3). Пусть $G_n = \bigoplus\{G^{(p)} \mid p \in C_n\}$, где $G^{(p)}$ — p-компонента группы G и $G^* = \bigoplus\big\{R_0^{(p)} \mid p \in S \cup (A \cap B^0)\big\}$. Тогда для любого $n \in \omega$ конечная группа G^* сервантна в G_n. В дальнейшем все группы G_n, $n \in \omega$, и G будем рассматривать как модели сигнатуры $\sigma^* = \langle P^3, 0, \{a\}_{a \in G^*}\rangle$. Докажем, что последовательность G_n является примарной квазирезольвентой группы G. Для этого достаточно показать справедливость условий 1–4 предложения 1. Справедливость условия 1 очевидна. Условие 4 вытекает из следующей эквивалентности:

$$x \in G_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(G) \models x = 0\ \vee\ \exists k \forall p < k\ (p \mid k \to \exists m \exists s(\langle p, m, s\rangle \in \chi_n)\ \&\ |x| = k).$$

Докажем справедливость условия 2. Пусть предложения Ψ_p, $\Psi_{p,m,s}$, $\Theta_{p,m,s}$, $\Pi_{p,m}$ сигнатуры σ^* такие, что для любой группы H справедливы эквивалентности:

$$H \models \Psi_p \Leftrightarrow \text{фактор-группа } H/G^* \ p\text{-делима},$$

$$H \models \Psi_{p,m,s} \Leftrightarrow H \text{ содержит сервантную подгруппу, изоморфную } G_{p^m}^{s+1},$$

$$H \models \Theta_{p,m,s} \Leftrightarrow H \text{ содержит подгруппу, изоморфную } G_{p^m}^{s+1},$$

$$H \models \Pi_{p,m} \Leftrightarrow \text{фактор-группа } H/H[p^m]\ p\text{-делима}.$$

В качестве аксиом $Ax^{(n)}$ теории T_n возьмем следующие предложения сигнатуры σ^*.

1. Аксиомы абелевой группы.
2. Открытая диаграмма группы $\langle G^*, \{a\}_{a \in G^*}\rangle$.
3. Предложения, утверждающие сервантность подгруппы G^* в G.

$4_{p \in A \cap B^0}$. Ψ_p.
$5_{\langle p,m,s\rangle \in \chi_n,\ m \neq 0}$. $\Psi_{p,m,s}$.
$6_{\langle p,m,s\rangle \notin \chi_n,\ m \neq 0}$. $\neg\Psi_{p,m,s}$.
$7_{\langle p,0,s\rangle \in \chi_n,\ m \in \omega^+}$. $\Theta_{p,m,s}$.
$8_{m \geq \alpha(n,p),\ \langle p,0,s\rangle \notin \chi_n}$. $\neg\Theta_{p,m,s}$.
$9_{p \in P}$. $\Pi_{p,\alpha(n,p)}$.

Прежде чем привести последнюю аксиому, сделаем следующее предположение, которое не будет умалять общности рассуждения. Пусть множества A_n, B_n, A_n^0, B_n^0 определены по множеству χ_n аналогично определению множеств A, B, A^0, B^0 по множеству χ. Если либо $A^0 \cup B^0 \neq \varnothing$, либо существует такое число n, что $|A_n \cup B_n| \geq \omega$, то будем считать, что либо $A_0^0 \cup B_0^0 \neq \varnothing$, либо $|A_0 \cup B_0| \geq \omega$.

В этом случае любая группа G_n, $n \in \omega$, имеет неограниченный период. Тогда последняя аксиома имеет следующий вид.

10_m. $\exists x\ (mx \neq 0)$.

Если $A^0 \cup B^0 = \varnothing$ и любое множество $A_n \cup B_n$ конечно, то любая группа G_n имеет ограниченный период. Пусть

$$q_n = \max\{p, n \mid p \in A_0 \cup B_0\} + 1, \quad m_n = \prod\{p^{\alpha(n,p)} \mid p < q_n\}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что для любого $p \in C_n$ выполнено $p < q_n$. Тогда последняя аксиома имеет следующий вид.

$10'$. $\forall x\ (m_n x = 0)$.

Пусть на группе H истинны аксиомы $Ax^{(n)}$. Покажем, что инварианты Шмелева [5, с. 308] групп H и G_n совпадают. Вычислим инварианты

$$\alpha_{p,m-1}(H) = \min\{\dim((p^m H)[p]/(p^{m+1}H)[p]), \omega\}.$$

Если p, m такие, что $\langle p, m, 0\rangle \notin \chi_n$, то по аксиоме 6 в H не существует сервантной подгруппы, изоморфной C_{p^m}. Следовательно, $\alpha_{p,m-1}(H) = 0$. Пусть $\langle p, m, 0\rangle \in \chi_n$. Если $m = b_p$, то для любого s имеем $\langle p, m, s\rangle \in \chi_n$. Отсюда по аксиоме 5 $\alpha_{p,m-1}(H) = \omega$. Пусть $m \neq b_p$. Тогда существует число $s_{p,m}$ такое, что $\langle p, m, s_{p,m}\rangle \in \chi_n$, но $\langle p, m, s_{p,m}+1\rangle \notin \chi_n$, следовательно $\alpha_{p,m-1}(H) = s_{p,m}$. Легко проверить, что $\alpha_{p,m-1}(H) = \alpha_{p,m-1}(G_n)$.

Вычислим инварианты

$$\beta_p(H) = \min\{\inf\{\dim(p^m H)[p] \mid m \in \omega\}, \omega\}.$$

Если $p \in B_n^0$, то по аксиоме 7 имеем $\beta_p(H) = \omega$. Пусть $p \in A_n^0$ и $\langle p, 0, c_p\rangle \in \chi_n$, но $\langle p, 0, c_p + 1\rangle \notin \chi_n$, тогда по аксиомам 7, 8 $\beta_p(H) = c_p$. Если $p \notin A^0 \cup B^0$, то $\langle p, 0, 0\rangle \notin \chi_n$. Отсюда по аксиоме 8 $\beta_p(H) = 0$. Легко проверить, что $\beta_p(H) = \beta_p(G_n)$.

По аксиоме 9

$$\gamma_p(H) = \min\{\inf\{\dim\left((H/H[p^m])/p(H/H[p^m])\right) \mid m \in \omega\}, \omega\} = \gamma_p(G_n) = 0.$$

По аксиоме 10 имеем

$$\varepsilon(H) = \min\{\inf\{|m!A| \mid m \in \omega\}, \omega\} = \varepsilon(G_n) = \omega.$$

По аксиоме $10'$ будет $\varepsilon(H) = \varepsilon(G_n) = 0$.

Таким образом, множество аксиом $Ax^{(n)}$ определяет полную теорию T_n. Покажем, что множество аксиом $Ax^{(n)}$ есть Σ-подмножество в $\mathbb{HF}(G)$. Например, покажем, что множество номеров $\Gamma^{-1}(8)$ аксиом 8 есть Σ-множество. Пусть вычислимая функция $f(p, m, s)$ такова, что $\Phi_{f(p,m,s)} = \neg\Theta_{p,m,s}$. Тогда справедлива эквивалентность

$$k \in \Gamma^{-1}(8) \Leftrightarrow \exists p \exists m \exists s \exists q(\alpha(p, n) = q\ \&\ m > q\ \&\ \langle p, 0, s\rangle \notin \chi_n\ \&\ k = f(p, m, s)).$$

Отсюда $\Gamma^{-1}(8) \in \Sigma(\mathbb{HF}(G))$. Аналогично доказывается и для остальных аксиом, т. е. $\Gamma^{-1}(Ax^{(n)}) \in \Sigma(\mathbb{HF}(G))$, следовательно, справедливость условия 2 доказана.

Для доказательства справедливости условия 3 нам нужно показать, что теория T_n модельно полна. Пусть даны две счетные модели $H_0 \subseteq H_1$ этой теории. По теореме из [6, с. 166] достаточно доказать, что подгруппа H_0 сервантна в H_1. Покажем, что для любого $p \in P$ группа H_0 p-сервантна в H_1.

Пусть $p \notin C_n$. Тогда $\alpha(n,p) = 0$. По аксиоме 9 группа H_i, $i < 2$, p-делима. Следовательно, H_0 p-сервантна в H_1.

Пусть $p \in A \cap B^0$. Поскольку по аксиоме 3 конечная подгруппа G^* сервантна в H_i, $i < 2$, то существуют подгруппы $F_i \subseteq H_i$ такие, что $H_i = G^* \oplus F_i$, $F_0 \subseteq F_1$. Отсюда следует, что достаточно доказать p-сервантность F_0 в F_1. По аксиоме 4 $H_i/G^* \cong F_i$ p-делима. Поэтому F_0 p-сервантна в F_1.

В дальнейшем нам необходима следующая

Лемма 2. *Если в группе H истинны аксиомы $Ax^{(n)}$, то существуют конечная p-подгруппа $R_0^{(p)}$, p-делимая подгруппа H'' и число $m \in \omega$ такие, что*

$$H = H' \oplus H'', \quad H' \cong R_0^{(p)} \oplus C_{p^m}^{\omega} \ (C_{p^0}^{\omega} \rightleftharpoons 0).$$

Доказательство. Пусть H' — максимальная сервантная подгруппа в H, содержащаяся в $H[p^{\alpha(n,p)}]$. Тогда существует подгруппа H'' такая, что $H = H' \oplus H''$. Докажем, что в H'' нет сервантной циклической p-подгруппы. Действительно, допустим противное, т. е. существует сервантная циклическая p-подгруппа $(a) \subseteq H''$. Если $|a| \leq \alpha(n,p)$, то H' — не максимальная сервантная подгруппа. Отсюда $|a| > \alpha(n,p)$. По аксиоме 9 существует элемент $c \in H[p^{\alpha(n,p)}]$ такой, что $a - c = pb$. Отсюда $p^{\alpha(n,p)}a = p^{\alpha(n,p)+1}b$, т. е. подгруппа (a) не сервантна. Таким образом, доказано, что в H'' нет сервантной циклической p-подгруппы. Отсюда и из аксиом 5, 6 вытекает, что существуют подгруппа $R_0^{(p)}$ и число $m \in \omega$ такие, что $H' \cong R_0^{(p)} \oplus C_{p^m}^{\omega}$.

Покажем, что фактор-группа $H/H' \cong H''$ p-делима. Рассмотрим произвольный элемент $x = x' + x''$, $x' \in H'$, $x'' \in H''$. Пусть $x \in H[p^{\alpha(n,p)}]$. Если же x'' не делится на p в H'', то в H'' существует сервантная циклическая p-подгруппа, что невозможно. Отсюда x'' делится на p в H. Поэтому и смежный класс $\bar{x}$ делится на p в H/H'. Пусть $x \notin H[p^{\alpha(n,p)}]$. По аксиоме 9 существуют элементы $a \in H[p^{\alpha(n,p)}]$, $y \in H$ такие, что $x - a = py$. По доказанному смежный класс $\bar{a}$, а следовательно, и $\bar{x}$, делятся на p в H/H', т. е. группа H'' p-делима. $\square$

Пусть справедливо условие

$$p \in C_n \setminus (A \cap B^0). \tag{4}$$

По лемме 2 имеем

$$H_i = H_i' \oplus H_i'', \quad i = 0, 1, \tag{5}$$

где H_i'' p-делима. Покажем, что можно считать $H_0' \subseteq H_1'$. Действительно, пусть D — p-компонента группы H_0''. Тогда из леммы 2 и равенства (5) имеем

$$H_0^{(p)} = H_0' \oplus D. \tag{6}$$

Из условия (4) и аксиом 7, 8 следует, что для некоторого $k \in \omega$ группы D и $C_{p^\infty}^k$ изоморфны. Из равенства (5) и делимости группы $D \subseteq H_1$ имеем $D \subseteq H_1''$. Отсюда и из аксиом 7, 8 и леммы 2 вытекает, что

$$H_1^{(p)} = H_1' \oplus D. \tag{7}$$

Положим $E = H_1' \cap H_0$. Легко проверить, что тогда из (6), (7) имеем $H_0^{(p)} = E \oplus D$. Отсюда и из (6) следует, что можно считать $H_0' = E$, $H_0' \subseteq H_1'$.

Таким образом, в равенствах (5) будем считать, что $H_0' \subseteq H_1'$. Легко проверить, что для доказательства p-сервантности H_0 в H_1 достаточно доказать, что H_0' сервантна в H_1'. Докажем это.

Пусть $p \notin S$ и $H_0' = U_0 \oplus V_0 \subseteq H_1' = U_1 \oplus V_1$, $U_i \cong R_0^{(p)}$, $V_0 \cong C_{p^m}^{\omega}$, $i < 2$. Тогда для любого $m \in A_n^{(p)}$ верно $m > b_p$. Покажем, что U_0 сервантна в H_1'. Пусть $t_p = \max\{m \mid m \in A_n^{(p)}\}$. Для $m \in A_n^{(p)}$ положим $s_{p,m} = \max\{s \mid \langle p, m, s\rangle \in \chi_n\}$. Тогда $U_i = U_i' \oplus U_i''$, $i < 2$, где $U_i' \cong C_{p^{t_p}}^{s_{p,t_p}+1}$, $U_i'' = \oplus\{C_{p^m}^{s_{p,m}} \mid m \in A_n^{(p)}, m < t_p\}$. Так как в H_1' нет циклической подгруппы порядка $t_p + 1$, то подгруппа U_0' сервантна в H_1'. Следовательно, $H_1' = U_0' \oplus T_1'$. Отсюда можно считать, что $U_0' \subseteq U_1'$. Так как $\dim U_0'[p] = \dim U_1'[p]$, то $U_0' = U_1'$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что $U_0 = U_1$. Тогда $V_0 \subseteq V_1$. Так как V_0 сервантна в V_1, то H_0' сервантна в H_1'.

Допустим, что $p \in S$. Тогда $H_i' = G^{*^{(p)}} \oplus F_i$, где $F_i \cong C_{p^m}^{\omega}$. Так же, как в рассмотренном случае, доказывается, что F_0 сервантна в F_1. Отсюда H_0 сервантна в H_1, т. е. теория T_n модельно полна. Достаточность доказана. □

Из теоремы 1 и доказательства достаточности теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если периодическая абелева группа G квазирезольвентна, то для любого множества S простых чисел существует конечное константное обогащение G_S' группы $G_S = \bigoplus\{G^{(p)} \mid p \in S\}$ такое, что теория $\mathrm{Th}(G_S')$ модельно полна.*

Следствие 3. *Периодическая абелева группа G 1-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда*

1) *справедливы условия теоремы* 1,
2) $\chi(G) \in \Delta(\mathbb{HF}(G))$,
3) $\alpha(p) = \max\{m, b_p, 0 \mid m \in A^{(p)}\} \in \Sigma(\mathbb{HF}(G))$.

Из следствий 1 и 2 вытекает еще один критерий 1-квазирезольвентности периодической абелевой группы.

Следствие 4. *Периодическая абелева группа G 1-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда существует ее конечное константное обогащение G' такое, что справедливы условия:*

1) *теория $\mathrm{Th}(G')$ модельно полна;*
2) *множество номеров аксиом Ax теории $\mathrm{Th}(G')$ является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(G')$.*

Доказательство. Достаточность следует из следствия 1 и замечания 1. Докажем необходимость. Пусть группа G 1-квазирезольвентна. По следствию 2 существует ее конечное константное обогащение G' такое, что $\mathrm{Th}(G')$ модельно полна. По замечанию 1 G' 1-квазирезольвентна. Отсюда по следствию 1 получаем условие 2. □

Следствие 5. *Периодическая абелева группа G примарно квазирезольвентна тогда и только тогда, когда существуют последовательность подгрупп*

$$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_n \subseteq \dots$$

и последовательность элементов $\bar a \in G^{<\omega}$ такие, что

1) *для любых чисел p, n справедливо либо $G^{(p)} \cap G_n = 0$, либо $G^{(p)} \subseteq G_n$;*
2) $\bigcup G_n = G$;

3) *существует* Σ-*подмножество* $A \subseteq \omega^2$ *в* $\mathbb{HF}(G)$ *такое, что*

$$A_n = \{m \mid \langle n, m\rangle \in A\}$$

является множеством номеров аксиом теории $\mathrm{Th}(\langle G_n, \bar{a}\rangle)$.

4) *теория* $\mathrm{Th}(\langle G_n, \bar{a}\rangle)$ *модельно полна;*

5) *множество* $\{\langle n, x\rangle \mid x \in G_n\}$ *является* Δ-*предикатом в* $\mathbb{HF}(G)$.

Действительно, достаточность следует из предложения 1 и замечания 1. Необходимость условий 1, 2, 3, 5 очевидна. Справедливость условия 4 вытекает из следствия 2. $\square$

Покажем, что существует квазирезольвентная периодическая абелева группа, которая не является примарно квазирезольвентной.

Определение 2. Группа A называется G-*квазирезольвентной*, если существует ее квазирезольвента

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots, \tag{8}$$

где каждый член A_i есть подгруппа группы A. Последовательность (8) назовем G-*квазирезольвентой.*

Пусть дана функция $f : P \to \omega \cup \{\infty\}$. Определим группу A следующим образом:

$$A = \oplus\{A^{(p)} \mid p \in P\}, \quad A^{(p)} \cong C_{p^{f(p)}}.$$

Квазихарактеристикой $\chi^*(A)$ группы A назовем множество

$$\chi^* \rightleftharpoons \chi^*(A) = \{\langle p, s\rangle \mid s \leq f(p),\ s \in \omega^+\}.$$

При этом считаем, что для любого $s \in \omega$ верно $s < \infty$. Тогда справедливо

Предложение 4. *Группа* A G-*квазирезольвентна тогда и только тогда, когда существует последовательность подмножеств*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \tag{9}$$

такая, что справедливы условия:

1) $\bigcup M_n = \chi^*$;

2) *если* $\langle p, s\rangle \in M_n$ & $r \leq s$, *то* $\langle p, r\rangle \in M_n$;

3) $M^* = \{\langle n, p, s\rangle \mid \langle p, s\rangle \in M_n\} \in \Delta(\mathbb{HF}(A))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A G-квазирезольвентна и последовательность подгрупп $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots$ — ее G-квазирезольвента. Положим

$$M_n = \{\langle p, s\rangle \mid \text{в } A_n \text{ существует подгруппа } A' \text{ изоморфная } C_{p^s},\ s \in \omega^+\}.$$

Покажем, что для последовательности $\langle M_n \mid n \in \omega\rangle$ справедливы условия 1–3. Справедливость условий 1, 2 очевидна. Докажем условие 3. Пусть формула $\Theta_{p,s}$, $s \in \omega^+$, утверждает, что в группе существует подгруппа, изоморфная C_{p^s}. Пусть вычислимая функция $h(p, s)$ такова, что $\Phi_{h(p,s)} = \Theta_{p,s}$. Тогда справедлива эквивалентность

$$\langle p, s\rangle \in M_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models \mathrm{Tr}_A(n, h(p, s), \varnothing).$$

Отсюда $M^* \in \Delta(\mathbb{HF}(A))$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для последовательности (9) справедливы условия 1–3. Не умаляя общности, можно считать, что справедливо условие

4) $\langle p,s\rangle \in M_n \;\Rightarrow\; p,s \le n$.

Определим двуместную функцию g, положив

$$g(p,n) = \max\{s \mid \langle p,s\rangle \in M_n\}.$$

Ясно, что $g \in \Sigma(\mathbb{HF}(A))$, $\Gamma_g \in \Delta(\mathbb{HF}(A))$ и $\lambda n g(p,n)$ — неубывающая функция.

По шагам n построим подгруппу $A_n \subset A$. На шаге n будут определены элементы a_p^n, $p \le n$, и группа A_n порождается множеством $\{a_p^n \mid p \le n\} \cup \{0\}$.

Шаг 0. $A_0 = \{0\}$.

Шаг $n+1$. Пусть $p \le n$. Допустим, что элемент a_p^n определен. Тогда через a_p^{n+1} обозначим такой элемент x, что справедливо соотношение

$$p^{g(p,n+1)-g(p,n)}x = a_p^n.$$

Существование x следует из строения группы G и того, что $\langle p, g(p,n+1)\rangle \in \chi^*$. Пусть элемент a_p^n не определен. Если значение $g(p,n+1)$ не определено, то элемент a_p^{n+1} считаем неопределенным. Пусть $g(p,n+1)$ определено, тогда выбираем элемент $x \in A$ порядка $p^{g(p,n+1)}$ и полагаем $a_p^{n+1} = x$. Шаг $n+1$ закончен.

Покажем, что для последовательности

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \tag{10}$$

справедливы условия предложения 1. Справедливость условия 1 очевидна. Справедливость условия 4 вытекает из следующих эквивалентностей:

$$x \in A_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models (x = 0) \;\vee\; \exists k(|x| = k \;\&\; \forall p \le k \forall s \le k(p^s | k \to \langle p,s\rangle \in M_n)),$$

$$x \notin A_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models (x \ne 0) \;\&\; \exists k \exists p \exists s(|x| = k \;\&\; s > 0 \;\&\; p^s | k \;\&\; \langle p,s\rangle \notin M_n).$$

Покажем справедливость условия 2. В качестве аксиом Ax_n теории $T_n = \mathrm{Th}(A_n)$ возьмем следующие.

1. Аксиомы абелевой группы.

$2_{p\le n,\ \langle p,1\rangle \in M_n}$. В A_n существует сервантная подгруппа, изоморфная $C_{p^{g(p,n)}}$.

$3_{p\le n,\ \langle p,1\rangle \in M_n}$. В A_n не существует подгруппы, изоморфной C_p^2.

$4_{\langle p,1\rangle \notin M_n}$. В A_n не существует подгруппы, изоморфной C_p.

Пусть $m_n = \prod\{p^{g(p,n)} \mid p \le n\}$.

5. $\forall x\ (m_n x = 0)$.

Аналогично доказательству теоремы 2 можно проверить, что множество номеров аксиом Ax_n является Σ-подмножеством в $\mathbb{HF}(A)$. Легко проверить, что если на группе G истинны аксиомы Ax_n, то G изоморфна конечной группе $\oplus\{C_{p^{g(p,n)}} \mid p \le n\}$. Отсюда аксиомы Ax_n определяют полную и модельно полную теорию, т. е. справедливы условия 2, 3 предложения 1, и тем самым группа A квазирезольвентна. $\square$

Пусть R — вычислимо перечислимое, но не вычислимое множество, и пусть сильно вычислимая возрастающая последовательность конечных множеств $\langle R^t \mid t \in \omega\rangle$ такова, что $R = \cup R^t$. Обозначим через S дополнение множества R. Пусть $S = \{s_0 < s_1 < \dots\}$ и $0 \notin S$.

Предложение 5. *Группа* $A \cong \bigoplus\limits_{i\in\omega} C_{p_i^{s_i}}$ *конструктивизируема, и множество* $M = \{\langle p_i, s\rangle \mid s \le s_i\}$ *вычислимо перечислимо.*

Доказательство. Пусть $G \rightleftharpoons \bigoplus G_i$, где $G_i \cong C_{p_i^\infty}$, $i \in \omega$, и пусть ν — некоторая конструктивная нумерация группы G такая, что в (G,ν) существует перечислимое подмножество элементов $\{a_i \mid i \in \omega\}$, $a_i \in G_i[p_i]$. По шагам t построим подгруппу $A \subseteq G$. На шаге t будут определены элементы $a_i^t \in G_i$, числа s_i^t, $i \leq t$, $t \in \omega$, и соотношения $p_i^{s_i^t - 1} a_i^t = a_i$. Группа A^t порождается элементами a_i^t, $i \leq t$ и $A = \bigcup\limits_t A^t$.

Шаг 0. $s_0^0 = 1$.

Шаг $t+1$. Проверим, существует ли число $i \leq t$ такое, что $s_i^t \in R^{t+1}$. Если такого числа нет, то для всех $i \leq t$ полагаем $s_i^{t+1} = s_i^t$, $s_{t+1}^{t+1} = s_t^t + 1$. Если такие числа i существуют, то через e обозначим наименьшее из них и положим

$$s_j^t = s_j^t,\ j < e,\ s_e^{t+1} = \min\bigl\{x \mid x > s_e^t,\ x \notin R^{t+1}\bigr\},$$

$$s_j^{t+1} = s_{j-1}^{t+1} + 1, \quad e < j \leq t+1.$$

Для каждого $j \leq t+1$ через a_i^{t+1} обозначим такой элемент из G с наименьшим номером, что справедливы соотношения $p_j^{s_j^{t+1} - s_j^t} a_j^{t+1} = a_j^t$, где $a_{t+1}^t = a_{t+1}$, $s_{t+1}^t = 1$. Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Легко проверить, что для любого i существует шаг t_i такой, что справедливо $\forall t \geq t_i\ (s_i^t = s_i)$, $s_i^t \leq s_i^{t+1}$, группа A, изоморфная $\bigoplus\limits_{i \in \omega} C_{p_i^{s_i}}$, является вычислимо перечислимой подгруппой G и множество $M = \{\langle p_i, s\rangle \mid s \leq s_i\}$ вычислимо перечислимо. $\square$

Следствие 6. *Существует G-квазирезольвентная, но не примарно квазирезольвентная периодическая абелева группа.*

Действительно, пусть множества R, $S = \{s_0 < s_1 < \dots\}$ и группа A такие же, как перед предложением 5. Тогда по этому предложению множество $M = \chi^*(A)$ вычислимо перечислимо. Следовательно, существует сильно вычислимая последовательность множеств $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots$ такая, что

1) $\bigcup M_n = M$;

2) если $\langle p, s\rangle \in M_n$ & $0 < r < s$, то $\langle p, r\rangle \in M_n$.

Тогда множество $M^* = \{\langle n, x\rangle \mid x \in M_n\}$ вычислимо, поэтому $M^* \in \Delta(\mathbb{HF}(A))$. Отсюда и из предложения 4 следует, что группа A G-квазирезольвентна. Покажем, что A не примарно квазирезольвентна. Допустим противное, и пусть последовательность $\langle A_n \mid n \in \omega\rangle$ — ее примарная квазирезольвента. Тогда справедлива эквивалентность

$$s \in S \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models \exists n \exists p \exists x\ (|x| = p^s\ \&\ (A_n/A_n[p^s]\ p\text{-делима})).$$

Отсюда и из определения примарной квазирезольвенты вытекает, что $S \in \Sigma(\mathbb{HF}(A))$. Так как группа A конструктивизируема, множество S вычислимо перечислимо; противоречие. Следовательно, группа A не является примарно квазирезольвентной. $\square$

Пусть S — некоторое множество простых чисел и $A \rightleftharpoons A_S = \bigoplus\{C_p \mid p \in S\}$. Тогда из предложения 4 получаем

Следствие 7. *Группа A_S G-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда для множества S справедливо условие:*

(A) *существует возрастающая последовательность подмножеств $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ такая, что $\bigcup S_n = S$ и множество $S^* = \{\langle n, p\rangle \mid p \in S_n\}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(A)$.*

Следствие 8. *Группа A_S является квазирезольвентной тогда и только тогда, когда она G-квазирезольвентна.*

Действительно, пусть группа A_S квазирезольвентна. Тогда по лемме 1 и доказательству необходимости предложения 4 следует, что для множества S справедливо условие (A) следствия 7. Поэтому группа A_S G-квазирезольвентна. $\square$

Из следствия 3 получаем

Следствие 9. *Группа A_S 1-квазирезольвентна тогда и только тогда, когда множество S является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(A_S)$.*

Теорема 3. *Группа A_S резольвентна тогда и только тогда, когда существует возрастающая последовательность конечных множеств $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ такая, что $\bigcup S_n = S$ и множество $S^* = \{\langle n, p\rangle \mid p \in S_n\}$ является Δ-предикатом в $\mathbb{HF}(A)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть Σ-функция f в $\mathbb{HF}(A)$ такая, что $f(n) = A_n$, $n \in \omega$, является резольвентой для A. Положим

$$S_n = \{p \mid \exists x \in A_n \ (|x| = p)\}.$$

Очевидно, что для последовательности $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ справедливо условие теоремы.

Достаточность. Пусть для последовательности $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ справедливо условие теоремы и Σ-формула $\Psi(n, x)$ такая, что $\Psi^{\mathbb{HF}(A)}[n, x] = S^*$. Определим Σ-функцию f следующим образом:

$$f(n) = m \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models \forall p < n((\Psi(n,p) \to p \mid m) \ \& \ p^2 \nmid m) \ \& \ (\neg\Psi(n,p) \to p \nmid m).$$

Для любого числа $n \in \omega$ определим функцию g:

$$\begin{aligned} g(n) = A_n \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A) \models \exists x \in A_n \ (f(n)x = 0 \ \& \ \forall k < f(n) \ (k \neq 0 \to kx \neq 0) \\ \& \ \forall y \in A_n \exists k < f(n) \ (y = kx \ \& \ \forall y_1 \forall y_2 \in A_n(y_1 - y_2 \in A_n))). \end{aligned}$$

Легко проверить, что последовательность $\langle A_n \mid n \in \omega\rangle$ является резольвентой для A. $\square$

Из следствия 8 и теоремы 3 получаем

Следствие 10. *Группа A_S квазирезольвентна тогда и только тогда, когда она резольвентна.*

Следствие 11. *Существует такое множество S простых чисел, что группа $A_S = \{C_p \mid p \in S\}$ резольвентна, но не является 1-квазирезольвентной.*

Действительно, пусть множество S простых чисел вычислимо перечислимо, но не вычислимо и $A \rightleftharpoons A_S$. Тогда по теореме 3 группа A резольвентна. Допустим, что группа A 1-квазирезольвентна. Тогда по следствию 9 $S \in \Delta(\mathbb{HF}(A))$. Так как группа A конструктивна, множество S вычислимо; противоречие, т. е. группа A не 1-квазирезольвентна. $\square$

В заключение приведем пример такого множества S простых чисел, что группа $A \rightleftharpoons A_S$ не квазирезольвентна.

Определение 3. Пусть $\mathbb{A}$ — допустимое множество и $X \subseteq \mathbb{A}$ является Σ-подмножеством в $\mathbb{A}$. Если существует возрастающая последовательность конечных множеств $\langle X_n \mid n \in \omega\rangle = X$ такая, что справедливы условия

1) $\bigcup X_n = X$,

2) $X^* = \{\langle n, x\rangle \mid x \in X_n\} \in \Delta(\mathbb{A})$,
то множество X назовем Δ-*аппроксимируемым* множеством в $\mathbb{A}$, а последовательность $\langle X_n\rangle$ — Δ-*аппроксимацией*.

Для построения указанного примера по следствию 7 достаточно построить множество S простых чисел, которое не является Δ-аппроксимируемым в $\mathbb{HF}(A_S)$.

Лемма 3. *Пусть бесконечное множество S Δ-аппроксимируемо последовательностью $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ в $\mathbb{HF}(A_S)$. Тогда существует строго возрастающая последовательность множеств $\langle B_n \mid n \in \omega\rangle$, являющаяся Δ-аппроксимацией множества S в $\mathbb{HF}(A_S)$.*

Доказательство. Пусть n_0 — наименьшее число такое, что $S_{n_0} \neq \varnothing$. Определим функцию f следующей Σ-рекурсией в $\mathbb{HF}(A_S)$:
$f(0) = n_0$;

$$f(n+1) = m \Leftrightarrow \mathbb{HF}(A_S) \models \exists x(\langle m, x\rangle \in S^* \ \&\ \langle f(n), x\rangle \notin S^* \\ \&\forall i < m\ \forall x < i(\langle i, x\rangle \in S^* \to (\langle f(n), x\rangle \in S^*))).$$

Ясно, что f — строго монотонная функция. Положим $B_n = S_{f(n)}$. Тогда $\langle B_n \mid n \in \omega\rangle$ — строго возрастающая последовательность конечных множеств и $\bigcup B_n = S$. Из эквивалентностей

$$\langle n, x\rangle \in B^* \Leftrightarrow \mathbb{HF}(G) \models \exists s\ (f(n) = s\ \&\ \langle s, x\rangle \in S^*),$$

$$\langle n, x\rangle \notin B^* \Leftrightarrow \mathbb{HF}(G) \models \exists s\ (f(n) = s\ \&\ \langle s, x\rangle \in \overline{S}^*)$$

следует, что $B^* \in \Delta(\mathbb{HF}(A_S))$, где $B^* = \{\langle n, x\rangle \mid x \in B_n\}$. □

Лемма 4. *Пусть последовательность подмножеств $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ является Δ-аппроксимацией бесконечного множества S в $\mathbb{HF}(A_S)$. Тогда существуют бесконечные Σ-подмножества A, B в $\mathbb{HF}(A_S)$ такие, что $A, B \leq_e S$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$.*

Доказательство. По лемме 3 можно считать, что последовательность $\langle S_n \mid n \in \omega\rangle$ строго возрастающая. Определим множества

$$A = \{x \in S_{2n} \setminus S_{2n-1} \mid n \in \omega\}, \quad B = \{x \in S_{2n+1} \setminus S_{2n} \mid n \in \omega\}.$$

Очевидно, что множества A, B бесконечны, $A \cup B = S$ и $A, B \in \Sigma(\mathbb{HF}(A_S))$. Отсюда по следствию 10 из [7] имеем $A, B \leq_e S$. Покажем, что $A \cap B = \varnothing$. Допустим противное, т. е. что $x \in A \cap B$. Тогда найдутся такие числа n, m, что

$$x \in S_{2n} \setminus S_{2n-1}, \tag{11}$$

$$x \in S_{2m+1} \setminus S_{2m}. \tag{12}$$

Допустим, что $n \leq m$. Тогда $2n \leq 2m < 2m + 1$. Отсюда и из (12) следует, что $x \notin S_{2n}$; противоречие.

Пусть $m < n$. Тогда $m \leq n - 1$ и $2m + 1 \leq 2n - 1$. Отсюда и из (12) имеем $x \notin S_{2m+1}$; противоречие. Следовательно, $A \cap B = \varnothing$. □

Предложение 6. *Существует множество простых чисел $S \subseteq P$ такое, что в наследственно конечном допустимом множестве $\mathbb{HF}(A_S)$ над абелевой группой A_S подмножество S принадлежит $\Sigma(\mathbb{HF}(A_S))$, но не является Δ-аппроксимируемым в $\mathbb{HF}(A_S)$.*

Доказательство. В [8] построено бесконечное множество $C \subseteq \omega$ такое, что для любого множества $M \leq_e C$ одно из множеств $C \setminus M$, $C \cap M$ конечно. Пусть $S = \{p_n \mid n \in C\}$, где p_n — n-е простое число. Покажем, что множество S требуемое. Допустим противное, т. е. что для множества S существует возрастающая последовательность подмножеств $\langle S_n \mid n \in \omega \rangle$, для которой $S^* \in \Delta(\mathbb{HF}(A_S))$. Тогда по лемме 4 существуют бесконечные подмножества $A, B \subseteq S$ такие, что $A, B \leq_e S$, $A \cap B = \varnothing$. Следовательно, множества $A' = \{n \mid p_n \in A\}$, $B' = \{n \mid p_n \in B\}$ бесконечны, $A', B' \leq_e C$, $A' \cap B' = \varnothing$, $A' \cup B' = C$; противоречие. $\square$

Из предложения 6 и следствия 8 получаем

Следствие 12. *Существует множество S простых чисел такое, что группа A_S не является квазирезольвентной.*

Легко проверить, что для любого множества S простых чисел группа A_S не является ER-моделью. Отсюда и из следствия 12 получим

Следствие 13. *Существует периодическая абелева группа G такая, что G не является ER-моделью и не квазирезольвентна.*

Предложение А и следствие 13 показывают, что условие «не быть ER-моделью» является необходимым, но не достаточным для квазирезольвентности модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хисамиев А. Н.* О квазирезольвентных моделях // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 346–354.
2. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Хисамиев А. Н.* О квазирезольвентных моделях и B-моделях // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 4. С. 484–500.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. Л.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
5. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
6. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
7. *Хисамиев А. Н.* О Σ-подмножествах натуральных чисел над абелевыми группами // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 3. С. 695–706.
8. *Морозов А. С., Пузаренко В. Г.* О Σ-подмножествах натуральных чисел // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 291–320.

Статья поступила 16 декабря 2005 г.

Хисамиев Асылхан Назифович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
hisamiev@math.nsc.ru