Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.5

РАВНОСТЕПЕННО НЕПРЕРЫВНЫЕ КЛАССЫ КОЛЬЦЕВЫХ Q–ГОМЕОМОРФИЗМОВ

В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов

Аннотация. Дано описание кольцевых Q-гомеоморфизмов в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и найден ряд условий нормальности семейств кольцевых Q-гомеоморфизмов. В частности, показано, что для нормальности семейства достаточно, чтобы мажоранта $Q(x)$ имела сингулярности логарифмического типа порядка не выше $n-1$. Другое достаточное условие нормальности состоит в том, что функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в каждой точке, к примеру, если $Q(x)$ имеет конечное среднее значение по инфинитезимальным шарам. Определение кольцевых Q-гомеоморфизмов мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу. В частности, отображения с конечным искажением длины удовлетворяют емкостному неравенству, которое положено в основу определения кольцевых Q-гомеоморфизмов. Поэтому в качестве следствий развитой теории получаются критерии нормальности семейств гомеоморфизмов f конечного искажения длины и класса Соболева $W^{1,n}_{\rm loc}$ в терминах внутренней дилатации $K_I(x,f)$. Кроме того, в работе установлена замкнутость класса сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов при локально суммируемой Q.

Ключевые слова: нормальное семейство отображений, Q-гомеоморфизм, конечное среднее колебание, отображение конечного искажения, конформное отображение, квазиконформное отображение.

§ 1. Введение

В последние годы в работах многих ведущих специалистов по теории отображений интенсивно изучаются различные классы отображений с конечным искажением (см., например, [1–7]). В том же контексте следует рассматривать обобщения квазиконформных отображений в терминах весовых пространств Соболева [8]. Аналогично исследуемые нами классы кольцевых Q-гомеоморфизмов используют в своем определении модули с весом. Введение этого понятия мотивировано тем, что неравенства типа (1.1) и (1.3) имеют место во многих современных классах отображений и, в частности, в классах отображений с конечным искажением длины.

Исторически всем этим обобщениям предшествовали отображения с ограниченным искажением по Решетняку, которые принято называть *квазирегулярными отображениями* (см., например, [9–11]). В рамках этого класса также рассматривались отображения с ограниченным искажением длины по Вяйсяля — Мартио [12]. Отображения с конечным искажением длины введены в [5]. Они образуют более широкий класс отображений, чем непостоянные отображения с ограниченным искажением. Отметим, что любой гомеоморфизм $f \in W^{1,n}_{\rm loc}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{\rm loc}$ и, в частности, с локально интегрируемой внутренней дилатацией является отображением с конечным искажением длины (см. [5, теоремы 4.6, 4.7]).

Следующая концепция была предложена профессором О. Мартио [13]. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и $Q : D \to [1, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *Q-гомеоморфизмом,* если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x)\rho^n(x)\,dm(x) \tag{1.1}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$. Напомним, что *модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^n(x)\,dm(x).$$

Борелевскую функцию $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называет *допустимой* для семейства кривых Γ в D и пишут $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$, если

$$\int\limits_\gamma \rho(x)\,|dx| \geq 1 \quad \forall\gamma \in \Gamma.$$

Чтобы определить более широкий класс гомеоморфизмов, напомним следующие термины. Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т. е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Положим $\Gamma(E, F) = \Gamma(E, F, \overline{\mathbb{R}^n})$, если $D = \overline{\mathbb{R}^n}$.

Кольцевой областью или *кольцом* в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется область R в $\overline{\mathbb{R}^n}$, чье дополнение состоит из двух связных компонент. Пусть R — кольцо в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и E и F — связные компоненты множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus R$. В этом случае пишем $R = R(E, F)$. Для тех, кто привык обращаться с емкостью кольца R, напомним [14], что

$$\operatorname{cap} R(E, F) = M(\Gamma(E, F, R)). \tag{1.2}$$

Отметим также, что согласно теореме 11.3 из [15] $M(\Gamma(E, F, R)) = M(\Gamma(E, F))$. В дальнейшем мы работаем только с модульной техникой и, когда встречается обозначение емкости кольца, подразумеваем равенство (1.2).

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая по Лебегу функция. Положим

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\},$$

$$S_i = S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}, \quad i = 1, 2.$$

Следующее понятие мотивировано кольцевым определением квазиконформности по Герингу (см., например, [16]). Будем говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0 \in D$, если соотношение

$$M(\Gamma(fS_1, fS_2)) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x - x_0|)\,dm(x) \tag{1.3}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, и для каждой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr \geq 1.$$

Будем также говорить, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является *кольцевым Q-гомеоморфизмом,* если условие (1.3) выполнено для всех точек $x_0 \in D$.

При $n = 2$ понятие кольцевого гомеоморфизма было впервые введено и плодотворно использовалось для изучения вырожденных уравнений Бельтрами

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z \tag{1.4}$$

в работе [17]. Там установлен целый ряд теорем существования решений (1.4), являющихся кольцевыми Q-гомеоморфизмами в каждой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ с

$$Q(z) = \frac{\left|1 - \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0}\mu(z)\right|^2}{1 - |\mu(z)|^2},$$

ср. [18]. Таким образом, в случае кольцевых Q-гомеоморфизмов может быть $Q(z) < 1$ на множестве положительной меры, что существенно отличает их от Q-гомеоморфизмов.

Наконец, напомним основные определения, связанные с нормальностью семейств отображений между метрическими пространствами.

Пусть (X, d) и (X', d') — метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Говорят, что последовательность отображений $f_k : X \to X'$, $k = 1, 2 \ldots$, сходится *локально равномерно* к отображению $f : X \to X'$, если

$$\sup_{x \in C} d'(f_k(x), f(x)) \to 0$$

при $k \to \infty$ на любом компакте $C \subset X$.

Семейство $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений $f : X \to X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k}, которая сходится локально равномерно в X к непрерывному отображению $f : X \to X'$ (см., например, [15, п. 20.2; 19, п. II.5.1]). Введенное понятие очень тесно связано со следующим. Семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ называется *равностепенно непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для всех $f \in \mathfrak{F}$ и x с $d(x, x_0) < \delta$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ *равностепенно непрерывно*, если $\mathfrak{F}$ равностепенно непрерывно в каждой точке из X. Хорошо известно, что в произвольных метрических пространствах (X, d) и (X', d') любое нормальное семейство $\mathfrak{F}$ отображений $f : X \to X'$ равностепенно непрерывно. Обратное заключение также верно, если (X, d) сепарабельное, а (X', d') компактное. Последнюю версию теоремы Арцела — Асколи см., например, в [15, с. 68]. Класс отображений $f : X \to X'$ называется *секвенциально компактным*, если он нормален и замкнут относительно локально равномерной сходимости.

§ 2. Характеризация кольцевых Q-гомеоморфизмов

Мы придерживаемся следующих стандартных соглашений: $a/\infty = 0$ для $a \neq \infty$ и $a/0 = \infty$ для $a > 0$ и $0 \cdot \infty = 0$ (см., например, [20, с. 6]). Всюду ниже через ω_{n-1} обозначается площадь единичной сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 2.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая функция, $q_{x_0}(r)$ — среднее значение $Q(x)$ на сфере $|x - x_0| = r$. Положим*

$$I = I(x_0, r_1, r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$$

и $S_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_j\}$, $j = 1, 2$, *где* $x_0 \in D$ *и* $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. *Тогда для любого кольцевого* Q*-гомеоморфизма* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в точке* x_0 *выполняется неравенство*

$$M(\Gamma(fS_1, fS_2)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно полагать, что $I \neq 0$, так как в противном случае соотношение (2.1), очевидно, выполнено. Можно также считать, что $I \neq \infty$, ибо в противном случае в соотношении (2.1) можно рассмотреть $Q(x)+\delta$ (со сколь угодно малым δ) вместо $Q(x)$, а затем перейти к пределу при $\delta \to 0$.

Пусть $I \neq \infty$. Тогда $q_{x_0}(r) \neq 0$ п. в. на (r_1, r_2). Положим

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/[tq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(t)], & t \in (r_1, r_2), \\ 0, & t \notin (r_1, r_2). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_A Q(x)\psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} I, \tag{2.2}$$

где $A = A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$. Пусть Γ — семейство всех кривых, соединяющих окружности S_1 и S_2 в A. Пусть также ψ^* — борелевская функция такая, что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для п. в. $t \in [0, \infty]$. Такая функция ψ^* существует по теореме Лузина (см., например, [21, п. 2.3.5; 20, с. 69]). Тогда функция $\rho(x) = \psi^*(|x - x_0|)/I$ допустима для семейства Γ и согласно соотношению (2.2) для любого кольцевого Q-гомеоморфизма будем иметь

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_A Q(x)\rho^n(x)\, dm(x) = \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Следующая лемма показывает, что для кольцевых Q-гомеоморфизмов неравенство (2.1), вообще говоря, не может быть улучшено.

Лемма 2.2. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$, $A = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$, $B = B(x_0, r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r_0\}$, *и пусть* $Q : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — *измеримая функция. Положим*

$$\eta_0(r) = \frac{1}{Irq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}, \tag{2.3}$$

где $q_{x_0}(r)$ — *среднее значение функции* $Q(x)$ *на сфере* $|x - x_0| = r$ *и* I — *величина, определенная в лемме* 2.1. *Тогда*

$$\frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}} = \int\limits_A Q(x)\eta_0^n(|x - x_0|)\, dm(x) \leq \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) \tag{2.4}$$

для любой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$ *такой, что*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\, dr = 1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Если $I = \infty$, то левая часть в соотношении (2.4) равна нулю и неравенство в этом случае очевидно. Если $I = 0$, то $q_{x_0}(r) = \infty$ для п. в. $r \in (r_1, r_2)$ и обе части неравенства (2.4) равны бесконечности. Предположим, что $0 < I < \infty$. Тогда из (2.3) и (2.5) следует, что $q_{x_0}(r) \neq 0$ и $\eta(r) \neq \infty$ п. в. в (r_1, r_2). Положим

$$\alpha(r) = rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)\eta(r), \quad w(r) = 1/rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r).$$

Будем иметь $\eta(r) = \alpha(r)w(r)$ п. в. в (r_1, r_2) и

$$C := \int\limits_A Q(x)\eta^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \omega_{n-1} \int\limits_{r_1}^{r_2} \alpha^n(r)w(r)\, dr.$$

Применяя неравенство Иенсена с весом (см. [22, теорема 2.6.2]) к выпуклой функции $\varphi(t) = t^n$, заданной в интервале $\Omega = (r_1, r_2)$, с вероятностной мерой

$$\nu(E) = \frac{1}{I} \int\limits_E w(r)\, dr,$$

получаем

$$\left(⨍ \alpha^n(r)w(r)\, dr \right)^{1/n} \geq ⨍ \alpha(r)w(r)dr = \frac{1}{I},$$

где мы также использовали тот факт, что $\eta(r) = \alpha(r)\omega(r)$ удовлетворяет соотношению (2.5). Отсюда

$$C \geq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}},$$

что и доказывает (2.4).

Теорема 2.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и пусть $Q : D \to [0, \infty]$ — измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда для любых $0 < r_1 < r_2 < d_0 = \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$ имеет место неравенство*

$$M(\Gamma(fS_1, fS_2)) \leq \frac{\omega_{n-1}}{I^{n-1}},$$

где S_1 и S_2 — сферы $|x - x_0| = r_1$ и $|x - x_0| = r_2$, $I = I(x_0, r_1, r_2) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}$, $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции Q на сфере $|x - x_0| = r$. При этом инфимум в выражении справа в (1.3) достигается для функции

$$\eta_0(r) = \frac{1}{Irq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)}.$$

§ 3. Оценки искажения расстояния

Целью параграфа является получение некоторых оценок искажения сферического расстояния при кольцевых Q-гомеоморфизмах. Напомним, что *сферическое* (*хордальное*) *расстояние* между точками x и y в $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ есть величина

$$h(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|, \tag{3.1}$$

где π — стереографическая проекция $\overline{\mathbb{R}^n}$ на сферу $S^n\left(\frac{1}{2}e_{n+1}, \frac{1}{2}\right)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$h(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, \quad h(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y. \tag{3.2}$$

Отметим, что $h(x,y) \le 1$, $h(x,y) \le |x-y|$.

Хордальным диаметром множества $E \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}$ называется величина

$$h(E) = \sup_{x,y\in E} h(x,y).$$

Следующий результат принадлежит Герингу (см. [23] или [24, п. 7.37]).

Предложение 3.1. *Пусть $R(E,F)$ — произвольное кольцо. Тогда*

$$\operatorname{cap} R(E,F) \ge \operatorname{cap} R_T\left(\frac{1}{h(E)h(F)}\right), \tag{3.3}$$

где $R_T(t) = R([-1,0],[t,\infty])$, $t>1$, — кольцо Тейхмюллера в $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Хорошо известно, что

$$\operatorname{cap} R_T(t) = \frac{\omega_{n-1}}{[\log\Phi(t)]^{n-1}},$$

где Φ удовлетворяет условиям

$$t+1 \le \Phi(t) \le \lambda_n^2(t+1) < 2\lambda_n^2 t, \quad t>1,$$
$$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1}), \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_n^{1/n} \to e \quad \text{при } n\to\infty$$

(см., например, [23, с. 225, 226; 24, (7.19), (7.22)]).

Из соотношения (3.3) вытекает

Предложение 3.2. *Для любых континуумов E и F в $\overline{\mathbb{R}^n}$*

$$\operatorname{cap} R(E,F) \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left[\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right]^{n-1}},$$

где $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n\to\infty$.

Лемма 3.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$, $f: D\to\mathbb{R}^n$ — гомеоморфизм с $h(\overline{\mathbb{R}^n}\setminus f(D)) \ge \Delta > 0$, и пусть $x_0\in D$, $y\in B(x_0,r_0)$, $r_0 \le \rho(x_0,\partial D)$, $S_0 = \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| = r_0\}$ и $S = \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0| = |y-x_0|\}$. Тогда*

$$h(f(y), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\Delta}\exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{M(\Gamma(fS_0, fS, fD))}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\}, \tag{3.4}$$

где $\alpha_n = 2\lambda_n^2$ с $\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n}\to e$ при $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть E — компонента множества $\overline{\mathbb{R}^n}\setminus fA$, содержащая $f(x_0)$, и F — компонента, содержащая ∞, где $A = \{x\in\mathbb{R}^n : |y-x_0| < |x-x_0| < r_0\}$. Согласно предложению 3.2 имеем

$$\operatorname{cap} R(E,F) \ge \frac{\omega_{n-1}}{\left\{\log\frac{2\lambda_n^2}{h(E)h(F)}\right\}^{n-1}}$$

и, значит,

$$h(E) \le \frac{2\lambda_n^2}{h(F)}\exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\operatorname{cap} R(E,F)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\},$$

откуда и следует соотношение (3.4). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — кольцевой Q-гомеоморфизм в точке $x_0 \in D$ такой, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta > 0$. Если для $0 < \varepsilon_0 \leq \rho(x_0, \partial D)$*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) \leq cI^p(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{3.5}$$

где $p \leq n$ и $\psi(t)$ — неотрицательная измеримая функция на $(0, \infty)$ такая, что

$$0 < I(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)\,dt < \infty \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

то для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(|x-x_0|)\}, \tag{3.6}$$

где

$$\alpha_n = 2\lambda_n^2, \quad \beta_n = \left(\frac{\omega_{n-1}}{c}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \gamma_{n,p} = 1 - \frac{p-1}{n-1}, \tag{3.7}$$

$\lambda_n \in [4, 2e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$ и $\lambda_n^{1/n} \to e$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка области D и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 \leq \rho(x_0, \partial D)$. Обозначим $A_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |y - x_0| < \varepsilon_0\}$. Применяя лемму 3.1, имеем

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\int\limits_{A_\varepsilon} Q(y)\eta^n(|y-x_0|)\,dm(y)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\} \tag{3.8}$$

для произвольной измеримой функции $\eta : (\varepsilon, \varepsilon_0) \to [0, \infty]$ с $\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r)\,dr = 1$.

По теореме Лузина (см. [21, п. 2.3.5; 20, с. 69]) существует борелевская функция ψ^* такая, что $\psi^*(t) = \psi(t)$ для п. в. $t \in [0, \infty]$. Положим

$$\eta(t) = \frac{\psi^*(t)}{I(\varepsilon)}.$$

Отметим, что функция η допустима, так как она неотрицательная, борелевская и выполнено равенство

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \eta(r)\,dr = 1.$$

Таким образом, из соотношения (3.8) получаем

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\left(\frac{\omega_{n-1}}{\frac{1}{I^n(\varepsilon)} \int\limits_{A_\varepsilon} Q(y)\psi^n(|y-x_0|)dm(y)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right\},$$

и по условию (3.5)

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{-\frac{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}}{c^{\frac{1}{n-1}} I^{\frac{p-n}{n-1}}(\varepsilon)}\right\}$$

или, в обозначениях (3.7),

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I^{\gamma_{n,p}}(\varepsilon)\}.$$

Наконец, выбирая здесь $\varepsilon = |x - x_0|$, приходим к (3.6).

Следствие 3.1. *В условиях леммы* 3.2 *при* $p = 1$

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\{-\beta_n I(|x - x_0|)\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \ge 2$, *— кольцевой* Q*-гомеоморфизм в точке* $x_0 \in D$ *такой, что* $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \delta > 0$. *Тогда для каждой точки* $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, $\varepsilon(x_0) < \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$, *имеет место неравенство*

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta} \exp\left\{ - \int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} \right\}, \tag{3.9}$$

где постоянная α_n *задается соотношением* (3.7), *а* $q_{x_0}(r)$ *— среднее значение функции* $Q(x)$ *на сфере* $|x - x_0| = r$.

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, \varepsilon(x_0))$, где $\varepsilon(x_0) \le \operatorname{dist}(x_0, \partial D)$. Полагая $r_1 = |x - x_0|$, $r_2 = \varepsilon(x_0)$ и применяя леммы 2.1 и 3.1, получаем (3.9).

Замечание 3.1. Отметим, что среднее значение $q_{x_0}(r)$ функции $Q(x)$ на некоторых сферах $\{|x - x_0| = r\}$ может быть бесконечно.

Однако, скажем, по теореме Фубини $q_{x_0}(r)$ измеримо по r в силу измеримости по x функции Q. Более того, в каждой точке $x \ne x_0$

$$\int\limits_{|x-x_0|}^{\varepsilon(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} < \infty \tag{3.10}$$

для каждого кольцевого Q-гомеоморфизма, так как в противном случае из соотношения (3.9) следовало бы, что $f(x) = f(x_0)$. Это также следует из леммы 2.1, поскольку емкость невырожденного кольца не может быть равна нулю. Интеграл в (3.10) может быть равен нулю в случае, если $q_{x_0}(r) = \infty$ п. в., но тогда соотношение (3.9) очевидно ввиду того, что $\alpha_n \ge 32$ и $\delta \le 1$, и не несет никакой информации об отображении f.

Следствие 3.2. *Если*

$$q_{x_0}(r) \le \left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1} \quad \forall r \in (0, \varepsilon(x_0)), \tag{3.11}$$

то

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{c(x_0)}{\log \frac{1}{|x-x_0|}} \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)), \tag{3.12}$$

где

$$c(x_0) = \frac{\alpha_n}{\delta} \log \frac{1}{\varepsilon(x_0)}.$$

Имеет место аналогичное утверждение, если потребовать соответствующее условие непосредственно для функции $Q(x)$.

Следствие 3.3. *Если*

$$Q(x) \le \left[\log \frac{1}{|x - x_0|}\right]^{n-1} \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon(x_0)), \tag{3.13}$$

то в шаре $B(x_0, \varepsilon(x_0))$ имеет место соотношение (3.12).

Замечание 3.2. Если вместо (3.11) и (3.13) потребовать, чтобы

$$q_{x_0}(r) \le C\left[\log \frac{1}{r}\right]^{n-1}$$

или соответственно

$$Q(x) \le C\left[\log \frac{1}{|x-x_0|}\right]^{n-1},$$

то

$$h(f(x), f(x_0)) \le \frac{\alpha_n}{\delta}\left[\frac{\log \frac{1}{\varepsilon(x_0)}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}}\right]^{1/C^{1/(n-1)}}.$$

Выбирая в лемме 3.2 $\psi(t) = \frac{1}{t}$ и $p = 1$, приходим к следующему заключению.

Следствие 3.4. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ — кольцевой Q-гомеоморфизм в нуле с $f(0) = 0$, и пусть*

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<1} Q(x)\frac{dm(x)}{|x|^n} \le c\log\frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Тогда

$$|f(x)| \le \alpha_n |x|^{\beta_n},$$

где α_n и β_n определены в (3.7).

Замечание 3.3. До сих пор мы просто предполагали, что Q измерима и неотрицательна. Допустим теперь, что $Q(x) \ge 1$ или по меньшей мере $q_{x_0}(r) \ge 1$ п. в. Тогда в неравенствах (3.9) и (3.10) вместо степени $1/(n-1)$ можно использовать любую степень $\beta \ge 1/(n-1)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{tq_{x_0}^{\beta}(t)}, & t \in (0, \varepsilon_0), \\ 0, & t \in [\varepsilon_0, \infty). \end{cases}$$

Тогда

$$\int\limits_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x-x_0|)\,dm(x) = \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\beta n-1}(r)} \le \omega_{n-1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\frac{dr}{rq_{x_0}^{\beta}(r)}$$

и, применяя следствие 3.1, получаем требуемое заключение.

§ 4. О нормальных семействах кольцевых Q-гомеоморфизмов

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $Q : D \to [0,\infty]$ — измеримая функция. Обозначим через $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ класс всех кольцевых Q-гомеоморфизмов $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \ge \Delta > 0$.

Мы рассматриваем $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ как семейство отображений между метрическими пространствами (X, d) и (X', d'), где $X = D$, $X' = \overline{\mathbb{R}^n}$, $d(x, y) = |x-y|$ — евклидова метрика, $d'(x, y) = h(x, y)$ — хордальная метрика (см. введение и (3.1), (3.2)). Поэтому во всех сформулированных ниже теоремах нормальность понимается относительно хордальной метрики.

Везде далее по тексту $\delta(x_0)$ обозначает (евклидово) расстояние от точки $x_0 \in D$ до границы области D, а $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q(x)$ на сфере $|x - x_0| = r$.

Теорема 4.1. *Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \to [0,\infty]$ — измеримая функция такая, что равенство*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{rq_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty$$

справедливо в каждой точке $x_0 \in D$. Тогда класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений.

Заключение теоремы следует из теоремы 3.1 и теоремы Асколи.

Следствие 4.1. *Класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений, если*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left(\log\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right)$$

при $r \to 0$ в каждой точке $x_0 \in D$.

Следствие 4.2. *Класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений, если функция $Q(x)$ имеет в каждой точке $x_0 \in D$ логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.*

Говорят, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ с $\varphi \in L^1_{\rm loc}(D)$ имеет *ограниченное среднее колебание* в области D, и пишут $\varphi \in BMO$, если

$$\|\varphi\|_* = \sup_{B\subset D} \frac{1}{|B|} \int\limits_B |\varphi(x) - \varphi_B|\, dm(x) < \infty,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B \subset D$ и

$$\varphi_B = \frac{1}{|B|} \int\limits_B \varphi(x)\, dm(x)$$

— среднее значение функции φ на шаре B.

Пространство функций ограниченного среднего колебания введено Джоном и Ниренбергом в [25]. Известно, что

$$L^\infty(D) \subset BMO(D) \subset L^p_{\rm loc}(D) \quad \forall p \in [1,\infty) \tag{4.1}$$

(см., например, [25, 26]).

Следуя работе [27], введем следующее определение. Будем говорить, что функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет *конечное среднее колебание* в точке $x_0 \in D$, и писать $\varphi \in FMO$ в x_0, если

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \overline{\varphi}_\varepsilon|\, dm(x) < \infty, \tag{4.2}$$

где $\overline{\varphi}_\varepsilon = \fint\limits_{B(x_0,\varepsilon)} \varphi(x)\, dm(x)$. Также будем говорить, что $\varphi : D \to \mathbb{R}$ — *функция конечного среднего колебания в области* D, и писать $\varphi \in FMO(D)$ или просто $\varphi \in FMO$, если φ имеет конечное среднее колебание в каждой точке $x \in D$. Заметим, что $FMO \neq BMO_{\rm loc}$ (см. в [28] примеры функций класса FMO, которые не принадлежат $L^p_{\rm loc}$ ни для какого $p > 1$, ср. (4.1)).

При выполнении условия (4.2) возможна ситуация, когда $\overline{\varphi}_\varepsilon \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Сформулируем некоторые результаты о функциях конечного среднего колебания (см. [27]).

Предложение 4.1. *Предположим, что для некоторого набора чисел $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, выполнено соотношение*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi_\varepsilon| \, dm(x) < \infty.$$

Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Следствие 4.3. *Пусть в точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x)| \, dm(x) < \infty.$$

Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.

Точка $x_0 \in D$ называется *точкой Лебега* функции $\varphi : D \to \mathbb{R}$, если φ интегрируема в окрестности точки x_0 и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| dm(x) = 0.$$

Следствие 4.4. *Пусть x_0 — точка Лебега для функции φ. Тогда функция φ имеет конечное среднее колебание в точке x_0.*

Известно, что для каждой функции $\varphi \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ почти все точки D являются ее точками Лебега.

Следствие 4.5. *Любая локально интегрируемая функция $\varphi : D \to \mathbb{R}$ имеет конечное среднее колебание почти во всех точках D.*

Следующее утверждение является ключевым для наших приложений функций конечного среднего колебания [27, следствие 2.3].

Предложение 4.2. *Пусть $\varphi : D \to \mathbb{R}$, $n \geq 2$, — неотрицательная функция, имеющая конечное среднее колебание в точке $0 \in D$. Тогда*

$$\int_{\varepsilon<|x|<\varepsilon_0} \frac{\varphi(x)\, dm(x)}{\left(|x| \log \frac{1}{|x|}\right)^n} = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при $\varepsilon \to 0$ для некоторого $\varepsilon_0 \leq \mathrm{dist}(0, \partial D)$.

Лемма 4.1. *Пусть $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, — кольцевой Q-гомеоморфизм такой, что $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(D)) \geq \delta > 0$. Если функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в точке $x_0 \in D$, то*

$$h(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\alpha_n}{\delta} \left\{ \frac{\log \frac{1}{\varepsilon_0}}{\log \frac{1}{|x-x_0|}} \right\}^{\beta_0}$$

для $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$, где α_n зависит только от n, $\varepsilon_0 < \mathrm{dist}(x_0, \partial D)$ и $\beta_0 > 0$ зависит только от функции Q.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 < \min\{e^{-1}, \mathrm{dist}(x_0, \partial D)\}$. Предположим, что функция $Q(x)$ имеет конечное среднее колебание в области D. Тогда на основании предложения 4.2 для функции $\psi(t) = \frac{1}{t \log \frac{1}{t}}$ будем иметь

$$\int_{\varepsilon<|x-x_0|<\varepsilon_0} Q(x)\psi^n(|x - x_0|)\, dm(x) = \int_{\varepsilon<|t|<\varepsilon_0} Q(t + x_0)\psi^n(|t|)\, dm(t)$$

$$= \int_{\varepsilon<|t|<\varepsilon_0} \frac{Q(t + x_0)}{\left(|t| \log \frac{1}{|t|}\right)^n} dm(t) = O\left(\log\log\frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (4.3)$$

Здесь мы воспользовались тем, что функция $Q_1(t) := Q(t+x_0)$ имеет конечное среднее колебание в точке 0.

Заметим также, что

$$I(\varepsilon) := \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t)dt = \log\log\frac{1}{\varepsilon} - \log\log\frac{1}{\varepsilon_0},$$

т. е.

$$\log\log\frac{1}{\varepsilon} = \log\log\frac{1}{\varepsilon_0} + I(\varepsilon) = O(I(\varepsilon)). \tag{4.4}$$

На основании соотношений (4.3) и (4.4) получаем, что для выбранной функции ψ выполнено соотношение (3.5) с $p=1$. Оставшаяся часть утверждения следует теперь из следствия 3.1.

Теорема 4.2. *Если $Q \in FMO$, то класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений.*

Теорема 4.2 следует непосредственно из теоремы Асколи и леммы 4.1. Из теоремы 4.2 и следствия 4.3 также получаем

Следствие 4.6. *Класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ нормален, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \;\; -\!\!\!\!\!\!\int\limits_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in D.$$

В силу следствия 4.4 имеем

Следствие 4.7. *Класс $\mathfrak{R}_{Q,\Delta}(D)$ нормален, если каждая точка $x_0 \in D$ является точкой Лебега для функции $Q(x)$.*

§ 5. Следствия для отображений с конечным искажением

В качестве следствий сформулируем основные результаты для гомеоморфизмов классов $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ и FLD конечного искажения длины (см. [5]). Развитая выше теория применима к семействам отображений $f : D \to \mathbb{R}^n$ с конечным искажением длины, поскольку гомеоморфизмы класса FLD являются Q-гомеоморфизмами и, следовательно, кольцевыми Q-гомеоморфизмами с $Q(x) = K_I(x,f)$, где $K_I(x,f)$ — внутренняя дилатация отображения f в точке $x \in D$ (см. [5, теорема 6.10]). В свою очередь, гомеоморфизмы $f \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ и, в частности, с $K_I \in L^1_{\mathrm{loc}}$ являются отображениями с конечным искажением длины (см. [5, теорема 4.6 и следствие 4.16]). Таким образом, теория применима, в частности, к отображениям класса Соболева $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ с $Q = K_I$.

Напомним, что *внутренняя дилатация* отображения f в точке x есть величина

$$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l(f'(x))^n},$$

если $J(x,f) \neq 0$, $K_I(x,f) = 1$, если $f'(x) = 0$, и $K_I(x,f) = \infty$ в остальных точках, $f'(x)$ — матрица Якоби отображения f в точке x, $J(x,f)$ — якобиан и

$$l(f'(x)) = \min_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{|f'(x)h|}{|h|}.$$

Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обозначим через $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ семейство всех гомеоморфизмов конечного искажения длины, а через $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ — семейство гомеоморфизмов класса $W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$ с $f^{-1} \in W^{1,n}_{\mathrm{loc}}$, $f : D \to \mathbb{R}^n$, таких, что $h(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash f(D)) \geq \Delta > 0$ и $K_I(x,f) \leq Q(x)$ п. в.

Везде далее по тексту $\delta(x_0)$ обозначает (евклидово) расстояние от точки $x_0 \in D$ до границы области D, а $q_{x_0}(r)$ — среднее значение функции $Q(x)$ на сфере $|x - x_0| = r$.

Теорема 5.1. *Пусть $\Delta > 0$ и $Q : D \to [1,\infty]$ — измеримая функция такая, что*

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{r q_{x_0}^{\frac{1}{n-1}}(r)} = \infty \quad \forall x_0 \in D. \tag{5.1}$$

Тогда семейство отображений $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ нормально.

Следствие 5.1. *Класс $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ образует нормальное семейство отображений, если в каждой точке $x_0 \in D$ выполнено соотношение* (5.1).

Следствие 5.2. *Семейства $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ и $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ нормальны, если при $r \to 0$*

$$q_{x_0}(r) = O\left(\left(\log \frac{1}{r}\right)^{n-1}\right) \quad \forall x_0 \in D.$$

Следствие 5.3. *Семейства отображений $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ и $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ нормальны, если функция $Q(x)$ имеет в каждой точке $x_0 \in D$ логарифмические особенности порядка не выше, чем $n-1$.*

Следствие 5.4. *Если $Q \in FMO$, то семейства отображений $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ и $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ нормальны.*

Следствие 5.5. *Семейства отображений $\mathscr{L}_{Q,\Delta}(D)$ и $\mathscr{S}_{Q,\Delta}(D)$ нормальны, если*

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \quad ⨍_{B(x_0,\varepsilon)} Q(x)\,dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in D.$$

§ 6. О замкнутости классов сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов

В данном параграфе изучается подкласс кольцевых Q-гомеоморфизмов, для которого возможно установить замкнутость относительно локально равномерной сходимости. Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$, $D \subset \overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 2$, называется *сильным кольцевым Q-гомеоморфизмом,* если

$$M(\Gamma(fC_1, fC_2, fD)) \leq \int\limits_D \rho^n(x) Q(x)\, dm(x) \tag{6.1}$$

для любых двух континуумов C_1 и C_2 в D и любой $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma(C_1, C_2, D)$.

Аналог следующей леммы был ранее доказан для Q-гомеоморфизмов в работе [13]. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 3.7 в [13] и потому опускается.

Лемма 6.1. *Пусть $f : \mathbb{B}^n \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — сильный кольцевой Q-гомеоморфизм с $Q \in L^1(\mathbb{B}^n)$, $f(0) = 0$, $h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n)) \geq \delta > 0$ и $h(f(z_0), 0) \geq \delta$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{B}^n$. Тогда для всех $|x| < r = \min\left(|z_0|/2, 1 - |z_0|\right)$*

$$h(f(x), f(0)) \geq \psi(|x|), \tag{6.2}$$

где $\psi(t)$ — строго возрастающая непрерывная функция с $\psi(0) = 0$, которая зависит только от n, δ и L^1-нормы функции Q в $\mathbb{B}^n$.

Из неравенства (6.2) вытекает

Следствие 6.1. *Выполнено неравенство*

$$|f(x)| \geq \psi(|x|).$$

Лемма 6.2. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f_m : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — последовательность сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов с $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо f — гомеоморфизм в D, либо $f \equiv \mathrm{const}$ в D.*

Доказательство. Как локально равномерный предел непрерывных отображений f_m отображение f непрерывно. Пусть f не является тождественно постоянным в D.

Покажем сначала, что f — дискретное отображение. Предположим противное. Тогда найдутся точка $x_0 \in D$ и последовательность $x_k \in D$, $x_k \neq x_0$, $k = 1, 2 \ldots$, такие, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$ с $f(x_k) = f(x_0)$. Заметим, что множество $E_0 = \{x \in D : f(x) = f(x_0)\}$ замкнуто в D по непрерывности f и не совпадает с D, так как $f \not\equiv \mathrm{const}$. Поэтому x_0 можно заменить неизолированной граничной точкой множества E_0.

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $x_0 = 0$, $f_m(0) = f(0) = 0$, $\overline{\mathbb{B}^n} \subset D$ и, кроме того, найдется хотя бы одна точка $z_0 \in \mathbb{B}^n$, где $f(z_0) \neq 0$. В силу непрерывности хордальной метрики

$$h(f_m(z_0), 0) \geq \delta_0/2, \quad m \geq M,$$

где $\delta_0 = h(f(z_0), 0) > 0$. Так как $\overline{\mathbb{B}^n}$ — компакт в D, $f_m \to f$ равномерно в $\overline{\mathbb{B}^n}$, для больших m имеем неравенство

$$h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f_m(\overline{\mathbb{B}^n})) \geq \delta_*/2,$$

где $\delta_* = h(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\overline{\mathbb{B}^n}))$. Пусть $\delta = \min(\delta_0/2, \delta_*/2)$. Согласно лемме 6.1 получаем, что для всех $x \in B(0, r)$ и $r = \min\left\{\frac{|z_0|}{2}, 1 - |z_0|\right\}$

$$|f_m(x)| \geq \psi(|x|), \quad m \geq M,$$

где ψ — строго возрастающая функция с $\psi(0) = 0$, которая зависит только от L^1-нормы Q в $\mathbb{B}^n$, n и δ. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем, что

$$|f(x)| \geq \psi(|x|), \quad x \in B(0, r). \tag{6.3}$$

Но тогда, в частности, $0 = |f(x_k)| \geq \psi(|x_k|)$ $\forall k \geq k_0$, т. е. $\psi(|x_k|) = 0$ при всех $k \geq k_0$, что противоречит строгому возрастанию функции ψ. Полученное противоречие показывает, что f дискретно.

Покажем, что f инъективно в D. Предположим противное, а именно, что существуют $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, с $f(x_1) = f(x_2)$. Пусть $x_2 \notin \overline{B(x_1, t)} \subset D$ при $t \in (0, t_0]$. Тогда $f_m(\partial B(x_1, t))$ отделяет $f_m(x_1)$ от $f_m(x_2)$ и, следовательно,

$$h(f_m(x_1), f_m(\partial B(x_1, t)) < h(f_m(x_1), f_m(x_2)). \tag{6.4}$$

Так как $f(x_1) = f(x_2)$, из соотношения (6.4) следует, что существует точка $x_t \in \partial B(x_1, t)$ такая, что $f(x_t) = f(x_1)$ для всех $t \in (0, t_0]$, что противоречит дискретности отображения f, доказанной выше. Непрерывность обратного отображения f^{-1} вытекает также из (6.3). Лемма 6.2 доказана.

Следующий результат является аналогом хорошо известной теоремы Вейерштрасса для аналитических функций.

Теорема 6.1. *Пусть D — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f_m : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ — последовательность сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов с $Q \in L^1_{\mathrm{loc}}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо f — сильный кольцевой Q-гомеоморфизм в D, либо $f \equiv \mathrm{const}$ в D.*

Доказательство. То, что предельное отображение f либо гомеоморфизм, либо постоянно, является утверждением леммы 6.2. Оценка (6.1) вытекает из равномерной сходимости колец $R_m = R(f_m C_1, f_m C_2)$ к кольцу $R = R(fC_1, fC_2)$, что влечет сходимость $\operatorname{cap} R_m \to \operatorname{cap} R$ (см. [23]), а также из того, что правая часть соотношения (6.1) не зависит от m.

Замечание 6.1. Таким образом, к примеру, подклассы RS_Q сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов $\overline{\mathbb{R}^n}$, сохраняющих неподвижными точки 0, $I = (1, 0, \dots, 0)$ и ∞, являются компактными, если Q удовлетворяет хотя бы одному из условий теорем 4.1 и 4.2 и следствий 4.1, 4.2, 4.6 и 4.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным и конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 768–804.
2. *Водопьянов С. К.* Топологические и геометрические свойства отображений класса Соболева с суммируемым якобианом // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 23–48.
3. *Gehring F. W., Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1999. V. 24, N 1. P. 253–264.
4. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical function theory and non–linear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001.
5. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Mappings with finite length distortion // J. Anal. Math. 2004. V. 93. P. 215–236.
6. *Manfredi J. J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. 1995. V. 32, N 2. P. 235–240.
7. *Manfredi J. J., Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem // Indiana Univ. Math. 1998. V. 47, N 3. P. 1131–1145.
8. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Весовые пространства Соболева и квазиконформные отображения // Докл. РАН. 2005. Т. 403, № 5. С. 583–588.
9. *Martio O., Rickman S., Vaisala J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. 1969. N 448. P. 1–40.
10. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
11. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
12. *Martio O., Vaisala J.* Elliptic equations and maps of bounded length distortion // Math. Ann. 1988. V. 282, N 3. P. 423–443.
13. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On Q-homeomorphisms // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1. Math. 2005. V. 30, N 1. P. 49–69.

14. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. Math. 1975. V. 13. P. 131–144.
15. *Vaisala J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 229).
16. *Gehring F. W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 103. P. 353–393.
17. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equations // J. Anal. Math. 2005. V. 96. P. 117–150.
18. *Gutlyanski V., Martio O., Sugava T., Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, N 3. P. 875–900.
19. *Lehto O., Virtanen K.* Quasikonforme Abbildungen. Berlin etc.: Springer-Verl., 1965.
20. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
21. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
22. *Ransford Th.* Potential theory in the complex plane. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
23. *Gehring F. W.* Quasiconformal mappings, complex analysis and its applications. Vienna: Intern. Atomic Energy Agency, 1976. V. 2.
24. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin etc.: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes in Math.; V. 1319).
25. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 415–426.
26. *Reimann H. M., Rychener T.* Funktionen Beschrankter Mittlerer Oscillation. Berlin etc.: Springer-Verl., 1975.
27. *Игнатьев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. мат. вестн. 2005. Т. 2, № 3. С. 395–417.
28. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation and ring homeomorphisms // Укр. мат. вестн. 2007. V. 4, N 1. P. 79–115.

Статья поступила 5 апреля 2006 г., окончательный вариант — 1 марта 2007 г.

Рязанов Владимир Ильич, *Севостьянов Евгений Александрович*
Институт прикладной математики и механики НАН Украины,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 83114, Украина
vlryazanov1@rambler.ru, ryazanov@iamm.ac.donetsk.ua, sevostyanov@skif.net,
e_sevostyanov@rambler.ru, sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua