Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.554.5

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ПЕРВИЧНЫЕ АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Доказано, что всякая исключительная первичная альтернативная алгебра удовлетворяет тождеству $[[x, y], y] = 0$ энгелевости индекса 2.

Ключевые слова: первичная алгебра, альтернативная алгебра.

Введение

По теореме Слейтера всякая первичная невырожденная альтернативная алгебра является либо ассоциативной алгеброй, либо кольцом Кэли — Диксона [1]. Первичные алгебры, отличные от указанных, называют *исключительными*.

В работе [2] автором изучались исключительные первичные алгебры, удовлетворяющие эквивалентным условиям:

(а) в алгебре выполнено тождество $[[x, y], y] = 0$ энгелевости индекса 2;

(б) коммутативный центр отличен от центра.

Такие алгебры были названы *близкими к коммутативным*. Оказалось, что описание алгебр, близких к коммутативным, сводится к изучению деформаций первичных коммутативных алгебр. Примеры различных деформаций указаны в [2].

Предлагаемая статья состоит из пяти параграфов и целиком посвящена доказательству теоремы, подтверждающей одну из гипотез, высказанных в [2].

Основная теорема. *Всякая исключительная первичная альтернативная алгебра A близка к коммутативной.*

Доказывая основную теорему от противного, в § 1 проведем редукцию к ниль-алгебрам без центра. В § 2 покажем, что присоединенная алгебра Ли A^- не может быть разрешима (теорема 1).

Существенную роль в работе играют функции g_a, h_a, p, q, являющиеся аналогами одноименных функций В. Т. Филиппова [3, 4]. В § 3 сначала проверяется, что исключительная первичная ниль-алгебра A удовлетворяет тождествам $g_a = 0$ и $h_a = 0$, а затем доказывается, что алгебра Ли A^- является первичной (теорема 2). В § 4 показано, что если исключительная ниль-алгебра A не является 2-энгелевой, то в ней не может быть выполнено тождество $q = 0$ (теорема 3). Наконец, в § 5 установлено, что для альтернативных алгебр над полем характеристики 3 тождество $q = 0$ является следствием тождества $h_a = 0$. (В. Т. Филиппов [4] доказал, что во всякой алгебре Мальцева характеристики, отличной от 2 и 3, тождества $h_a = 0$ и $q = 0$ эквивалентны.) Тем самым завершается доказательство основной теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00111).

§ 1. Редукция к ниль-алгебрам без центра

1.1. Основные определения, обозначения, тождества. Всюду в работе используются следующие обозначения: $[a, b] = ab - ba$ — коммутатор; $a \circ b = ab + ba$ — йорданово произведение; $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор; $A^\sharp$ — алгебра, полученная из A внешним присоединением единицы; X^∇ — идеал алгебры A, порожденный подмножеством X алгебры A.

Определение 1. Алгебра называется *альтернативной*, если ассоциатор в ней является кососимметрической функцией.

Определение 2. Алгебра называется *первичной*, если произведение ее ненулевых (двусторонних) идеалов отлично от нуля.

Определение 3. Элемент a альтернативной алгебры A называется *абсолютным делителем нуля* (а.д.н.), если $aAa = 0$.

Определение 4. Алгебра называется *невырожденной*, если она не содержат ненулевых а.д.н.

Определение 5. Первичная алгебра называется *исключительной*, если она содержит ненулевые а.д.н.

Известно [1, с. 230], что всякая исключительная первичная альтернативная алгебра является алгеброй над полем характеристики 3.

Всюду ниже, если не оговорено противное, A — исключительная первичная альтернативная алгебра над полем характеристики 3, не являющаяся 2-энгелевой, т. е. $(\exists x, y \in A)[[x, y], y] \neq 0$.

Пусть $A^- = \langle A; +; [,] \rangle$ и $A^+ = \langle A; +; \circ \rangle$ — присоединенные лиева и йорданова алгебры. Алгебра A^- удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

а алгебра A^+ — тождеству Йордана $(a^2, b, a)^+ = 0$, где $(a, b, c)^+$ — ассоциатор в алгебре A^+. Операторы правого умножения на элемент a в алгебрах A, A^+, A^- обозначаются через R_a, R_a^+, R_a^- соответственно.

Напомним основные тождества, выполняющиеся в произвольной альтернативной алгебре характеристики 3 (см., например, [1, 2]):

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \tag{1}$$

$$[ab, c] + [bc, a] + [ca, b] = 0, \tag{2}$$

$$(a, b, c) = (a, b, c)^+ + [[a, c], b], \tag{3}$$

$$(a, x, xb) = (a, x, b)x, (a, x, bx) = x(a, x, b), \tag{4}$$

$$(x \circ y, a, b) = (x, a, b) \circ y + x \circ (y, a, b), \tag{5}$$

$$(ab, r, s) + (a, b, [r, s]) = a(b, r, s) + (a, r, s)b, \tag{6}$$

$$([a, b], r, s) + 2(a, b, [r, s]) = [a, (b, r, s)] + [(a, r, s), b], \tag{7}$$

$$([a, b], c, x) + ([b, c], a, x) + ([c, a], b, x) = 2[(a, b, c), x]. \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 2((a, b, c), r, s) = 2((a, r, s), b, c) + 2(a, (b, r, s), c) + 2(a, b, (c, r, s)) \\ + (a, [b, c], [r, s]) + (a, [b, [r, s]], c) + (a, b, [c, [r, s]]). \end{aligned} \tag{9}$$

Напомним также [1, с. 167–168], что функция Клейнфелда

$$f(a, b, c, d) := (ab, c, d) - b(a, c, d) - (b, c, d)a$$

представима в виде $f(a, b, c, d) = ([a, b], c, d) + (a, b, [c, d])$ и является кососимметрической функцией по всем переменным.

1.2. Редукция к ниль-алгебрам.

Лемма 1. *Пусть I — идеал алгебры A, a — нильпотентный элемент из A. Если $[a, I] = (0)$, то либо $a = 0$, либо $I = (0)$.*

Доказательство. Допустим, что I — ненулевой идеал. В силу тождества (1) имеем $I[a, A] = [a, IA] - [a, I]A = (0)$. Аналогично получаем $[a, A]I = (0)$, т. е. $[a, A] \subseteq \operatorname{Ann} I = (0)$ ввиду первичности алгебры A. Значит, $a \in K(A)$. По предположению A — исключительная первичная альтернативная алгебра, не являющаяся 2-энгелевой. Тогда $K(A) \subseteq Z(A)$ в силу [2, следствие 2.1]. Поскольку центр алгебры $Z(A)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то $a = 0$. $\square$

Лемма 2. *Ненулевой идеал I алгебры A не является 2-энгелевым.*

Доказательство. Допустим, что идеал I удовлетворяет тождеству 2-энгелевости. Тогда идеал I удовлетворяет тождеству $[[[x, y], z], t] = 0$ и $[x, y]^2 = 0$ для любых $x, y \in I$ [2, лемма 2.3б)]. Тогда в силу леммы 1 последовательно получаем $[[I, I], I] = (0)$, $[I, I] = (0)$. Применяя тождество (2), имеем $[A, I^2] = (0)$, откуда в силу (1) $[A, A] \subseteq \operatorname{Ann}(I^2) = (0)$, значит, алгебра A коммутативна. Получили противоречие с предположением, что A не является 2-энгелевой. $\square$

Известно [1, с. 214], что идеал первичной алгебры является первичной алгеброй. Поскольку всякий а.д.н. алгебры A содержится в ниль-радикале $\operatorname{Nil}(A)$ алгебры A, то $\operatorname{Nil}(A)$ является исключительной первичной ниль-алгеброй. Если мы докажем основную теорему для исключительных ниль-алгебр, то в силу леммы 2 она будет доказана и в общем случае. Поэтому можно считать, что A — исключительная первичная ниль-алгебра.

1.3. Редукция к алгебрам без центра. Заметим, что алгебра A является алгеброй без центра, т. е. $K(A) = N(A) = (0)$. Действительно, в силу теоремы Дорофеева [1, с. 330] $D(A) \cdot ZN(A) = (0)$, где $ZN(A)$ обозначает идеал, порожденный множеством $[N(A), A]$. Отсюда в силу первичности и неассоциативности алгебры $ZN(A) = (0)$, т. е . $N(A) = Z(A)$. Учитывая, что центр $Z(A)$ первичной ниль-алгебры A нулевой, получаем $N(A) = 0$.

Равенство нулю коммутативного центра $K(A) = (0)$ вытекает из леммы 1.

Всюду ниже, если не оговорено противное, A — исключительная первичная ниль-алгебра без центра.

§ 2. Исключительные алгебры, удовлетворяющие тождеству лиевой разрешимости

2.1. δ-Инвариантные подпространства. Линейное отображение $'$ алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если $(\forall x, y \in A)(xy)' = x'y + xy'$. Из тождеств (2) и (5) вытекает, что операторы $R_a^- : x \to [x, a]$ и $R(a, b) := R_a R_b - R_{ab} : x \to (x, a, b)$ являются дифференцированиями йордановой алгебры A^+.

Множество операторов вида R_a^- и $R(a, b)$ обозначим через δ_A. Подпространство V алгебры A назовем *δ-инвариантным*, если $V\delta_A \subseteq V$.

Заметим, что йорданово произведение δ-инвариантных подпространств является δ-инвариантным подпространством.

Положим $x' = R_x^-$, $x^{(+)} = R_x^+$. Обозначим через $E_0(A)$ линейную оболочку, порожденную коммутаторами ab'^2, где $a, b \in A$. Ясно, что $a(b' \circ c') \in E_0(a)$.

Лемма 3 [2]. *Если V — δ-инвариантное подпространство алгебры A, то идеал V^{∇}, порожденный множеством V, представим в виде $V^{\nabla} = V \circ A^{\sharp}$. Если V, W — δ-инвариантные подпространства алгебры A, то линейное пространство $E_0(V, W)$, порожденное коммутаторами vw'^2, где $v \in V$, $w \in W$, также является δ-инвариантным подпространством алгебры A.*

Введем по индукции 2-энгелевы степени алгебры A:

$$E_{(0)}(A) = E_0(A), \quad E_{(n+1)}(A) = E_0(E_{(n)}(A)).$$

Заметим, что указанные множества в силу леммы 3 являются δ-инвариантными подпространствами в A.

2.2. Вспомогательные леммы.

Лемма 4. *В произвольной альтернативной алгебре A характеристики 3 справедливо равенство*

$$[x'^2, y^+] = (yx')^+ x' + (yx'^2)^+. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку отображение $x' : a \to ax'$ является дифференцированием присоединенной алгебры A^+, то $[x', y^+] = [x, y]^+$. Используя тождество (1) для алгебры умножений и последнее равенство, получаем

$$[x'^2, y^+] = [x', y^+] \circ x' = [x, y]^+ \circ x' = 2[x, y]^+ x' - [[x, y]^+, x']$$
$$= -[x, y]^+ x' + [x', [x, y]^+] = [y, x]^+ x' + [x, [x, y]]^+ = (yx')^+ x' + (yx'^2)^+. \ \square$$

Лемма 5. *Пусть H, V — идеалы алгебры A^- и $Hv'^2 = (0)$ для любого $v \in V$. Тогда $[H, E_0(V)] = (0)$.*

Доказательство. Пусть $a \in H$; $v, w \in V$. Тогда $av'w' = -aw'v'$. В силу тождества Якоби имеем

$$a(wv'^2)' = a(w'v'^2 + v'^2 w' + v'w'v') = av'w'v' = -aw'v'^2 = 0. \qquad \square$$

Если V — δ-инвариантное подпространство в алгебре A, то определим по индукции линейные подпространства $G_n(V)$, считая

$$G_0(V) = V, \quad G_{n+1}(V) = E_0(G_n(V), V).$$

Лемма 6. *Если V — δ-инвариантное подпространство в A, то $G_n(V)$ также δ-инвариантное подпространство в A. Кроме того, верно включение*

$$G_6(V)^{\nabla} \subseteq E_0(V) + E_0(V) \circ E_0(V).$$

Доказательство. Заметим, что первое утверждение вытекает из леммы 3. Для доказательства второго утверждения достаточно проверить включение $G_6 \circ A \subseteq E_0 + E_0 \circ E_0$, где $G_6 = G_6(V)$, $E_0 = E_0(V)$.

При доказательстве леммы будем использовать сравнение $\equiv$ по модулю пространства $E_0 + E_0 \circ E_0$, которое является δ-инвариантным в алгебре A.

Дальнейшие рассмотрения представим в виде последовательности пунктов, считая, что $u, v, w \in V$; $g_s \in G_s$; $a \in A$.

1°. $au'v'^2 \equiv 0$, поскольку $au'v'^2 \in Vv'^2 \subseteq E_0 \equiv (0)$.

2°. $g_2 u^+ v'^2 \equiv 0$, поскольку в силу п. 1° и равенства (10)

$$g_2 u^+ v'^2 \equiv g_1 w'^2 u^+ v'^2 = g_1\{[w'^2, u^+] + u^+ w'^2\} v'^2$$
$$\equiv g_1 [w'^2, u^+] v'^2 = g_1 [w'^2, u^+] v'^2 = g_1\{(uw')^+ w' + (uw'^2)^+\} v'^2 \equiv 0.$$

3°. $g_3 w^+ \equiv 0$, если $w \in VV'^2$. Поскольку 2-энгелева алгебра Ли нильпотентна индекса ≤ 4, то $wu' \in VV'^3 \subseteq E_0$. Значит, в силу (10) и п. 2° имеем

$$g_3 w^+ = g_2 u'^2 w^+ \equiv g_2[u'^2, w^+] = g_2\{(wu')^+ u' + (wu'^2)^+\} \equiv 0.$$

4°. $g_4 v^+ \equiv 0$, если $v \in VV'$. Ввиду пп. 1°–3° имеем

$$g_4 v^+ = g_3 u'^2 v^+ \equiv g_3 (vu')^+ u' \equiv 0.$$

5°. $g_4[v'^2, a^+]w'^2 \equiv 0$. Согласно равенству (10) будет

$$g_4[v'^2, a^+]w'^2 = g_4\{(av')^+ v' + (av'^2)^+\}w'^2 = g_4(av')^+ v' + g_4(av'^2)^+ w'^2.$$

Осталось заметить, что каждое из двух слагаемых сравнимо с нулем: первое — в силу п. 1°, а второе — в силу п. 4°.

6°. $g_5 w^+ \equiv 0$. Действительно, применяя п. 2°, тождество (10) и п. 4°, имеем

$$\begin{aligned} g_5 w^+ = g_4 v'^2 w^+ &= g_4\{[v'^2 w^+] + w^+ v'^2\} \\ &\equiv g_4[v'^2, w^+] = g_4\{(wv')^+ v' + (wv'^2)^+\} \equiv g_4 (wv')^+ v' \equiv 0. \end{aligned}$$

7°. $g_5[w'^2, a^+] \equiv 0$. В самом деле, в силу тождества (10) и п. 6° получаем

$$g_5[w'^2, a^+] = g_5\{(aw')^+ w' + (aw'^2)^+\} \equiv 0.$$

8°. $g_6 a^+ \equiv 0$. С учетом пп. 1°, 5°, 7° и тождества (1) справедливо

$$\begin{aligned} g_6 a^+ &= g_4 v'^2 w'^2 a^+ = g_4 a^+ v'^2 w'^2 + g_4[v'^2 w'^2, a^+] \equiv g_4[v'^2 w'^2, a^+] \\ &= g_4[v'^2, a^+]w'^2 + g_4 v'^2[w'^2, a^+] \equiv g_4 v'^2 [w'^2, a^+] = g_5[w'^2, a^+] \equiv 0. \ \square \end{aligned}$$

2.3. Исключительные Ли-разрешимые алгебры.

Теорема 1. *Пусть A — исключительная первичная альтернативная ниль-алгебра. Если присоединенная алгебра Ли A^- разрешима, то алгебра A является 2-энгелевой.*

Доказательство представим в виде последовательности пунктов.

1°. Редукция от разрешимости к слабой 2-энгелевости.

Пусть $L = A^-$ — присоединенная алгебра Ли, L_n — ее n-я степень, $L_{(n)}$ — ее n-я разрешимая степень, т. е.

$$L_1 = L,\ L_{n+1} = [L_n, L]; \quad L_{(0)} = L,\ L_{(n+1)} = [L_{(n)}, L_{(n)}].$$

Введем также по индукции 2-энгелевы степени $L_{[n]}$ алгебры L:

$$L_{[0]} = L, \quad L_{[n+1]} = E_0(L_{[n]}).$$

В силу леммы 3 2-энгелевы степени являются δ-инвариантными подпространствами в алгебре A.

Поскольку $E_0(I) \subseteq [I, I]$ для лиева идеала I, то индукцией по n получаем $L_{[n]} \subseteq L_{(n)}$. Значит, в силу разрешимости алгебры L она *слабо 2-энгелева*, т. е. некоторая 2-энгелева степень этой алгебры равна нулю. Поскольку по предположению $L_{[1]} \neq (0)$, можно считать, что для некоторого натурального числа n справедливы соотношения $L_{[n+1]} \neq (0)$, $L_{[n+2]} = (0)$.

Положим $V := L_{[n]}$, $W := E_0(V) = L_{[n+1]} \neq (0)$, $G_s := G_s(V)$. Отметим, что в силу леммы 3 указанные подпространства δ-инвариантны в алгебре A.

2°. Докажем, что $G_6 = (0)$. По предположению $E_0(W) = L_{[n+2]} = (0)$. Поскольку 2-энгелева алгебра Ли нильпотентна индекса ≤ 4, то $W_4 := [W_3, W] = (0)$. Далее, по лемме 6 верно включение $G_6^\nabla \subseteq W + W \circ W$, откуда в силу тождества (1)

$$\left[W_3, G_6^\nabla\right] = [W_3, W + W \circ W] = [W_3, W \circ W] = [W_3, W] \circ W = (0),$$

следовательно, по лемме 1 либо $W_3 = (0)$, либо $G_6 = (0)$. Если $W_3 = (0)$, то

$$\left[W_2, G_6^\nabla\right] = [W_2, W + W \circ W] = [W_2, W \circ W] = [W_2, W] \circ W = (0),$$

откуда по лемме 1 либо $W_2 = (0)$, либо $G_6 = (0)$. Рассуждая аналогично, получаем $G_6 = (0)$ ввиду условия $W \neq (0)$.

3°. Выберем наибольшее число s $(0 \leq s \leq 5)$ такое, что $G := G_s \neq (0)$. С учетом леммы 5 имеем $[G, E_0(V)] = (0)$, значит, $[G, V_4] = (0)$, поскольку $V_4 \subseteq E_0(V)$. В частности, $[G, [V_2, V_2]] = (0)$. Отсюда в силу тождества Якоби $G(v'w' - w'v') = (0)$ для любых $v, w \in V_2$. Поскольку $Ga'^2 = (0)$ для любого $a \in V$, то $G(v'w' + w'v') = (0)$.

Сравнивая два последних равенства, имеем $Gv'w' = (0)$, т. е. $[[G, V_2], V_2] = (0)$. Рассуждая аналогично, получаем $GV'^4 = (0)$.

4°. Положим $F_t := GV'^t$. Допустим, что $F_t \neq (0)$, $[F_t, V] = (0)$. В силу леммы 3 имеем $W^\nabla = W \circ A^\sharp = E_0(V) \circ A^\sharp \subseteq V + V \circ V$, откуда $[F_t, W^\nabla] \subseteq [F_t, V + V \circ V] = (0)$. Следовательно, ввиду леммы 1 и предположения $W \neq 0$ получаем $F_t = (0)$; противоречие. □

2.4. Энгелев центр первичной алгебры. Обозначим через $N_0(A) := \{a \in A \mid (\forall x \in A)[[a, x], x] = 0\}$ энгелев центр. В силу тождества Якоби энгелев центр является δ-инвариантным подпространством в A.

Лемма 7. *Алгебра A имеет нулевой энгелев центр.*

Доказательство. Пусть $a \in N_0(A)$. В силу леммы 5 верно равенство $[a, E_0] = (0)$, где $E_0 = E_0(A)$. Далее, с учетом леммы 3 идеал I, порожденный множеством $E_{(2)}(A)$, представим в виде $E_{(1)}(A) \circ A^\sharp$. Заметим, что $I \neq (0)$ вследствие теоремы 1. Далее, если r, $s \in E_0(A)$, $x \in A$, то $[[r, s], s] \circ x = [[r, s] \circ x, s] - [r, s] \circ [x, s] \in E_0 + E_0 \circ E_0$. Отсюда получаем $[a, I] = (0)$. Тогда в силу леммы 1 $a = 0$. □

§ 3. Первичность присоединенной алгебры Ли

Следуя [5], введем функции

$$g_a(x, y, z, t) := x(R_a^- D(y, a) R(z, t) - R_y^- D(a, z) R(a, t)),$$

$$h_a(x, y, z) := x(R_a^- D(y, a) R_z^- - R_y^- D(a, z) R_a^-),$$

где $D(a, b) := [R_a^+, R_b^+]$ — внутреннее дифференцирование йордановой алгебры A^+.

Заметим, что если A — альтернативное кольцо, то функция $9g_a(x, y, z, t)$ совпадает с функцией Филиппова $g(x, y, z, t, a, a)$ в присоединенном мальцевском кольце A^-, а функция $6h_a(x, y, z)$ совпадает с функцией $h(x, y, z, a, a)$ [4].

Лемма 8. (а) *В первичной алгебре A верно тождество $g_a(x, y, z, t) = 0$.*

(б) *В первичной алгебре A с нулевым ассоциативным центром выполнено тождество $h_a(x, y, z) = 0$.*

Доказательство. (а) Известно [5, основная лемма, п. 7 и лемма 6а], что функция g_a обладает свойством $g_a(x, y, z, t)x'y' = 0$. Тогда в силу муфанговости функции g_a имеем $g_a(xy', y, z, t)t' = 0$. Считая элемент t фиксированным, рассмотрим функцию $f(x, y, z) := g_a(x, y, z, t)t'$. Она обладает свойствами:

(а) $f(x, y, z)$ — кососимметрична по x, y, z;

(б) $f([x, y], y, z) = 0$, тогда в силу [5, лемма 7] получаем $f(W, A, A) = (0)$, где $W = [[A, A], A]$, т. е. $g_a(W, y, z, t)t' = (0)$.

Возьмем теперь фиксированный элемент $w \in W$ и рассмотрим функцию $f(x, y, z) := g_a(x, y, z, w)$. Рассуждая аналогично, имеем $g_a(W, W, A, A) = (0)$.

Учитывая включение $E_{(1)}(A)^{\nabla} \subseteq E_0 + E_0 \circ E_0$ [2, лемма 3а] и муфанговость функции g_a [5, теорема 1], последовательно для $I = E_{(1)}(A)^{\nabla}$ приходим к соотношению

$$g_a(E_0, I, A, A) \subseteq g_a(E_0, E_0 + E_0 \circ E_0, A, A) \subseteq g_a(E_0, E_0, A, A) + g_a(E_0, E_0, A, A) \circ E_0 = (0),$$

поскольку

$$g_a(E_0, E_0, A, A) \subseteq g_a(W, W, A, A);$$

$$g_a(I, I, A, A) \subseteq g_a(E_0 + E_0 \circ E_0, I, A, A) \subseteq g_a(E_0, I, A, A) + g_a(E_0, I, A, A) \circ E_0 = (0);$$

$$g_a(I, A, A, A) \cdot I \subseteq g_a(I, IA, A, A) + g_a(I, AA, I, A) - g_a(I, I, A, A) \cdot A = (0),$$

откуда $g_a(I, A, A, A) \subseteq \mathrm{Ann}(I) = (0)$. Аналогично $g_a(A, A, A, A) \subseteq \mathrm{Ann}(I) = (0)$.

(б) Из определения функции g_a и тождества (6) получаем, что значения функции h_a содержатся в ассоциативном центре, значит, $h_a = 0$ является тождеством алгебры A. $\square$

В силу леммы 8 можем считать, что в алгебре A выполнено тождество $h_a = 0$.

Целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть A — исключительная первичная альтернативная ниль-алгебра, удовлетворяющая тождеству $h_a = 0$. Если алгебра A не является 2-энгелевой, то присоединенная алгебра Ли A^- также первична.*

Доказательство теоремы представим в виде ряда лемм.

Лемма 9. *В алгебре с тождеством $h_a = 0$ многочлен*

$$[([x, a], y, a), z] - [([x, y], a, z), a]$$

является лиевым относительно указанных переменных.

Доказательство. Положим $\{x, y, z\} := xD(y, z)$ и запишем тождество $h_a(x, y, z) = 0$ в виде

$$\{xa', y, a\}z' = \{xy', a, z\}a'. \tag{11}$$

Так как в силу (3) верно равенство $\{x, y, z\} = (y, x, z)^+ = -(x, y, z) + [x, [y, z]]$, то

$$-[([x, a], y, a), z] + [[[x, a], [y, a]], z] = -[([x, y], a, z), a] + [[[x, y], [a, z]], a],$$

т. е. многочлен $[([x, a], y, a), z] - [([x, y], a, z), a]$ является лиевым относительно указанных переменных. $\square$

Обозначим через ρ^* подалгебру алгебры умножений A^*, порожденную тождественным отображением и операторами R_a^-, $R_{a,b}$ $(a, b \in A)$. Тогда δ-пространство $\delta(X)$, порожденное множеством X, имеет вид $\delta(X) = X\rho^*$.

Лемма 10. *Если P, Q — коммутирующие лиевы идеалы, то* $(P, Q, A) = (0)$.

Доказательство. Пусть $p \in P$, $q \in Q$, $a, x, y, z, t \in A$. В силу тождества (8)

$$([p, x], q, y) + ([x, q], p, y) = 2[(p, x, q), y]. \tag{12}$$

Используя лемму 9, получаем $[([q, a], p, a), z] = 0$ для любых a, z, значит,

$$([q, a], p, a) = 0, \tag{13}$$

поскольку коммутативный центр алгебры нулевой. Равенство (13) означает, что функция $([q, x], p, y)$ кососимметрична по x, y. Отсюда получаем

$$([x, q], p, y) = -([y, q], p, x) = ([q, y], p, x) = (p, x, [q, y]),$$

следовательно, в силу (12) и кососимметричности функции Клейнфелда имеем

$$\begin{aligned} 2[(p, x, q), y] &= ([p, x], q, y) + ([x, q], p, y) = ([p, x], q, y) + (p, x, [q, y]) \\ &= f(p, x, q, y) = -f(p, q, x, y) = 2f(p, q, x, y), \end{aligned}$$

т. е. $f(p, q, x, y) = [(p, x, q), y]$. Тогда

$$(p, q, [x, y]) = -[(p, q, x), y]. \tag{14}$$

Используя дважды последнее равенство, приходим к равенству

$$(p, q, [[x, y], y]) = -[(p, q, [x, y]), y] = [[(p, q, x), y], y],$$

т. е.

$$[[x, y], y]^\delta = [[x^\delta, y], y], \quad \text{где } x^\delta = (p, q, x). \tag{15}$$

Заметим, что в силу тождеств Муфанг и равенства (13) верно

$$[y^\delta, y] = [(p, q, y), y] = -(p, [q, y], y) = 0. \tag{16}$$

Учитывая, что δ — дифференцирование алгебры A^+, а $[[x, y], y]$ — йорданов многочлен, в силу равенств (15), (16) и тождества Якоби получаем

$$0 = [[x, y^\delta], y] + [[x, y], y^\delta] = [[x, y], y^\delta] + [[x, y], y^\delta] = 2[[x, y], y^\delta],$$

откуда на основании (14)

$$\begin{aligned} 0 = [[x, y], y^\delta] &= [[x, y], (p, q, y)] = -[(p, q, y), [x, y]] \\ &= (p, q, [y, [x, y]]) = -[[x, y], y]^\delta. \end{aligned}$$

Из последнего равенства и (15) вытекает $x^\delta \in N_0(A) = (0)$ в силу леммы 7. $\square$

Лемма 11. *Пусть P, Q — коммутирующие лиевы идеалы. Тогда δ-пространства $\delta(P)$ и $\delta(Q)$, порожденные P и Q, также коммутируют.*

Доказательство представим в виде двух пунктов, считая, как и в лемме 10, $p \in P$; $q \in Q$; $a, x, y, z, t \in A$.

1°. $[(P, A, A)\eta^*, Q] = (0)$, где η^* — подалгебра алгебры умножений A^*, порожденная тождественным отображением и операторами R_a^-, $a \in A$.

Заметим сначала, что в силу тождества (8) и леммы 10

$$2[(p, x, y), q] = ([p, x], y, q) + ([x, y], p, q) + ([y, p], x, q) = 0.$$

Учитывая тождество Якоби, имеем

$$[(p,x,y)x'_1\dots x'_k z',q]=[(p,x,y)x'_1\dots x'_k q',z]+[(p,x,y)x'_1\dots x'_k,[z,q]],$$

откуда индукцией по k получаем требуемое, ибо Q — лиев идеал алгебры A.

2°. Заметим теперь, что в силу п. 1° лиевы идеалы $(PR_{A,A})\eta^*$ и Q коммутируют: $[(PR_{A,A})\eta^*,Q]=(0)$, и, значит, для них также верно равенство $[(((PR_{A,A})\eta^*)R_{A,A})\eta^*,Q]=(0)$, и т. д. Таким образом, $[\delta(P),Q]=(0)$. Аналогично получаем $[\delta(P),\delta(Q)]=(0)$. $\square$

Пусть P, Q — коммутирующие лиевы идеалы алгебры A, причем $P\neq(0)$. Тогда по лемме 11 верно равенство $[\delta(P),\delta(Q)]=(0)$, и можно считать в силу леммы 10, что P, Q — коммутирующие δ-пространства такие, что $(P,Q,A)=(0)$.

Далее, поскольку отображение $x\to[x,a]$ является дифференцированием ввиду тождества (1), то (Q,Q,A) — лиев идеал. С учетом тождества (9) пространство (Q,Q,A) инвариантно относительно отображения $x\to(x,r,s)$:

$$\begin{aligned}2((Q,Q,c),r,s)\subseteq 2((Q,r,s),Q,c)+2(Q,(Q,r,s),c)+2(Q,Q,(c,r,s))\\ +(Q,[Q,c],[r,s])+(Q,[Q,[r,s]],c)+(Q,Q,[c,[r,s]]),\end{aligned}$$

следовательно, если Q — δ-пространство, то (Q,Q,A) также δ-пространство.

Лемма 12. $[Q,Q]=(Q,Q,A)=(0)$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что на основании тождества (6)

$$(Q,Q,A)A+A(Q,Q,A)\subseteq Q+Q^2.$$

Значит, $(Q,Q,A)^\nabla\subseteq Q+Q^2$ ввиду леммы 3. Тогда

$$\lfloor P,(Q,Q,A)^\nabla\rfloor\subseteq[P,Q]+[P,Q^2]=(0),$$

откуда по лемме 1 $(Q,Q,A)=(0)$. В силу тождеств (1) и (7) линейное пространство $[Q,Q]$ является δ-пространством и, стало быть,

$$[Q,Q]^\nabla\subseteq Q+[Q,Q]A\subseteq Q+Q^2,$$

откуда $\lfloor P,[Q,Q]^\nabla\rfloor=(0)$ и $[Q,Q]=(0)$. $\square$

Обозначим через $\overline{X}$ идеал алгебры A^-, порожденный множеством X.

Лемма 13. *Пусть $q\in Q$; $x,x_i\in A$; $q_0=qx'^2$; $S=\lfloor\overline{q,A}\rfloor$. Тогда $q_0\cdot S=(0)$.*

Доказательство представим в виде последовательности пунктов, считая, что $p,q\in Q$; $x,x_i,y,z\in A$; $q_n=qx'_1\dots x'_n$.

1°. $[p,x]\circ[q,x]=0$.

В самом деле, учитывая тождество (1) и условие $[Q,Q]=(0)$, имеем

$$[p,x]\circ[q,x]=[p,x\circ[q,x]]=[p,[q,x^2]]=0.$$

Докажем индукцией по n, что $q_0\circ q_n=0$. Основанием индукции является следующий пункт.

2°. $q_0\circ q_1=0$. Заметим, что в альтернативной алгебре $[[x,y]^2,x]\in N(A)$. Поскольку $N(A)=(0)$, то $[[x,y]^2,x]=0$. Рассуждая аналогично п. 1° и используя линеаризацию последнего тождества, получаем

$$\begin{aligned}[[q,x],x]\circ[q,y]=[[q,x]\circ[q,y],x]-[q,x]\circ[[q,y],x]\\ =[[q,x]\circ[q,y],x]=-[[q,x]^2,y]=0.\end{aligned}$$

3°. Предположим, что $q_0\circ q_n=0$. Тогда

$$q_0\circ[[q_{n-1},y],y]=[q_0\circ[q_{n-1},y],y]-[q_0,y]\circ[q_{n-1},y]=0.$$

Применив теперь тождество Якоби и предположение индукции, получаем $q_0\circ[[q_{n-1},y],z]=0$, т. е. $q_0\circ q_{n+1}=0$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 14. *Если* $q \cdot S = (0)$ *для некоторого* $q \in Q$, *то* $\delta(q) \cdot S = (0)$.

Доказательство. Поскольку S — лиев идеал, то $[q, a] \cdot S = (0)$ и достаточно проверить справедливость равенства $(q, a, b) \cdot S = (0)$.

Дальнейшие рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1°. $(E_{(1)}(A), A, q) \equiv (0)$, где $a \equiv 0$ означает $a \in \mathrm{Ann}(S)$.

Используя лемму 9, получаем, что $(xy', t, q)t' \equiv 0$, откуда в силу тождеств Муфанг $(xy't', t, q) \equiv 0$. Точно так же $(xy't', t, [q, a]) \equiv 0$. Тогда ввиду тождества (7) имеем $(xy't'^2, z, q) \equiv 0$, откуда и вытекает требуемое сравнение.

Положим $I = E_{(2)}(A)^\nabla$.

2°. $(q, A, I) \equiv (0)$. Достаточно воспользоваться п. 1°, леммой 3 и тождеством $(q, a, b \circ c) + (q, b, c \circ a) + (q, c, a \circ b) = 0$.

Положим $R = (q, A, A)$.

3°. $[R, S] = (R, S, A) = (0)$ ввиду лемм 10 и 11.

4°. $RS = (0)$. В силу первичности A достаточно проверить, что $RS \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. С учетом п. 3°, тождества Муфанг (4) и п. 2° имеем

$$(RS)I = S(RI) = S((q, A, A)I) \subseteq S\{(q, A, IA) + (q, I, A) - (q, A, I)A\} = (0).$$

Аналогично $I(RS) = (0)$, значит, $RS \subseteq \mathrm{Ann}(I)$. $\square$

Лемма 15. $Q = (0)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в силу тождества (7) справедлива переработка: $R_a^- R(b, c) = R(x, y) + R_z^- + R(x', y')R_{z'}^-$. Значит, δ-пространство $\delta(s)$ представимо в виде

$$\delta(s) = \sum sR(a_1, b_1) \dots R(a_n, b_n)R^-(c_1) \dots R^-(c_m).$$

Из лемм 14 и 15 вытекает равенство $\delta(S) \cdot S = (0)$. Далее, $\delta(S) \subseteq Q$, и ввиду леммы 12 верно равенство $(\delta(S), S, A) = (0)$, значит, на основании леммы 3 $S \subseteq \mathrm{Ann}(S^\nabla)$. Отсюда вытекает $S = (0)$ и, стало быть, $Q = (0)$. $\square$

Вместе с леммой 15 завершено доказательство теоремы 2.

§ 4. Первичные ниль-алгебры с тождеством $q(a, x, y, z, b) = 0$

4.1. Первичные алгебры с тождеством $[x, y]^2 = 0$.

Лемма 16. *Исключительная первичная альтернативная алгебра* A *с тождеством* $[x, y]^2 = 0$ *является* 2*-энгелевой.*

Доказательство. Согласно [6, лемма 3, тождество (15)] в алгебре A выполнено тождество $xy'^2 \circ zt'^2 = 0$. По лемме 3 линейное пространство $E_{(1)}(A)$ является δ-инвариантным. Ввиду указанного тождества верно включение $E_{(1)}(A)^\nabla \subseteq E_{(0)}(A)$ и идеал $E_{(1)}(A)^\nabla$ удовлетворяет тождеству антикоммутативности $x^2 = 0$, стало быть, он разрешим индекса 2. Тогда $E_{(1)}(A) = (0)$ и по теореме 1 алгебра A является 2-энгелевой. $\square$

4.2. Одно свойство функции $p(a, x, y, z)$**.** Напомним, что $\{x, y, z\} = xD(y, z)$. Легко понять, что выполнены тождества

$$\{x, y, z\} + \{x, z, y\} = 0, \tag{17}$$

$$\{xa', x, a\} = 0. \tag{18}$$

Введем функции

$$p(a,x,y,z) = \{az',x,y\} - \{yz',a,x\} - \{xz',y,a\},$$

$$q(a,x,y,z,b) = p(a,x,y,z)b' - p(ab',x,y,z).$$

Если A — альтернативное кольцо, то функции $3p(a,x,y,z)$ и $3q(a,x,y,z,b)$ совпадают с одноименными функциями Филиппова в мальцевском кольце A^- [4].

Лемма 17. *Пусть $w=[a,b]$. Тогда в исключительной первичной алгебре верно тождество $p(w^2,y,z,w^2)=0$.*

Доказательство. Напомним [1, с. 177], что во всякой альтернативной алгебре справедливы тождества Клейнфелда

$$(w^2,y,z)w = w(w^2,y,z) = 0. \tag{19}$$

Проверим сначала, что выполнены тождества

$$(x,[w^2,y],w^2) = 0, \tag{20}$$

$$(x,y,[w^2,[w^2,z]]) = 0, \tag{21}$$

$$([[w^2,x],x],y,w^2) = 0, \tag{22}$$

$$([[w^2,x],y],z,w^2) = 0, \tag{23}$$

$$(x,[w^2,y],[w^2,z]) = 0. \tag{24}$$

1°. Учитывая тождества (1) и (19), приходим к равенствам

$$(x,[w^2,y],w^2) = (x,[w,y]\circ w,w^2) = (x,[w,y],w^2)\circ w = 0.$$

Применяя к тождеству (20) тождество (6), получим тождество (21).

2°. Используя тождества (8) и (21), имеем

$$([[w^2,x],x],y,w^2) = -([[w^2,x],x],w^2,y) = ([x,w^2],[w^2,x],y) \\ + ([w^2,[w^2,x]],x,y) - 2[([w^2,x],x,w^2),y] = 0.$$

3°. Согласно линеаризации тождества (22) и тождеству Якоби

$$0 = ([[w^2,x],y] + [[w^2,y],x],z,w^2) = ([[w^2,x],y] - [[y,x],w^2] \\ - [[x,w^2],y],z,w^2) = 2([[w^2,x],y],z,w^2)$$

в силу (20). Значит, справедливо тождество (23).

4°. Применяя вновь тождество (8) и учитывая тождества (20), (23) и (21), получаем

$$([y,w^2],[w^2,x],z) = -([[w^2,x],y],w^2,z) - ([w^2,[w^2,x]],y,z) \\ + 2[([w^2,x],y,w^2),z] = -([[w^2,x],y],w^2,z) - ([w^2,[w^2,x]],y,z) = 0.$$

Тем самым доказано тождество (24).

Докажем теперь справедливость тождества $\{[y,w^2],w^2,z\}=0$, из которого, очевидно, вытекает утверждение леммы. В силу (16) и (20) имеем

$$\{[y,w^2],w^2,z\} = -([y,w^2],w^2,z) + [[y,w^2],[w^2,z]] = -[[w^2,y],[w^2,z]].$$

Из (24) и (6) следует, что $[[w^2,y],[w^2,z]] \in N(A)$. Однако по доказанному в § 1 алгебра A имеет нулевой ассоциативный центр, значит, $[[w^2,y],[w^2,z]]=0$, но тогда верно равенство $\{[y,w^2],w^2,z\}=0$. $\square$

4.3. Исключительные алгебры с тождеством $q(a,x,y,z,b)=0$**.**

Теорема 3. *Исключительная первичная альтернативная ниль-алгебра с тождествами* $h_a=0$ *и* $q=0$ *является* 2*-энгелевой.*

Доказательство. Допустим, что алгебра A не является 2-энгелевой. Тогда в силу леммы 17 $p(w^2x_1'\dots x_n',y,z,w^2)=p(w^2,y,z,w^2)x_1'\dots x_n'=0$. Следовательно, $\lfloor p(x,y,z,w^2),\overline{w^2}\rfloor\subseteq p(\overline{w^2},y,z,w^2)=(0)$. Отсюда на основании тождества Якоби коммутатор $[p(x,y,z,w^2)y_1'\dots y_t',\,w^2x_1'\dots x_n']$ является суммой элементов $[p(x,y,z,w^2),w^2x_1'\dots x_n'z_1'\dots z_r']z_{r+1}'\dots z_t'$, каждый из которых по доказанному равен нулю.

Так как по теореме 2 присоединенная алгебра A^- первична, то $p(x,y,z,w^2)=0$ или $w^2=0$, т. е. в любом случае выполнено тождество

$$p(x,y,z,w^2)=0, \tag{25}$$

в частности, $p(x,x,y,w^2)=0$. Поскольку ввиду тождеств (17) и (18)

$$p(x,x,y,z)=\{xz',x,y\}-\{yz',x,x\}-\{xz',y,x\}=2\{xz',x,y\},$$

имеем $\{w^2x',x,y\}=0$. Тогда из определения функции p и тождества (25) получаем

$$\{w^2x',y,z\}=0. \tag{26}$$

Обозначим теперь через V линейное подпространство в A, порожденное элементами вида $[a,b]^2$, где $a,b\in A$. Поскольку V линейно порождается элементами вида $[a,b]\circ[a,c]$, то V — лиев идеал. В самом деле,

$$[[a,b]^2,x]=[a,b]\circ[[a,b],x]=[a,b]\circ([[a,x],b]+[a,[b,x]])\in V.$$

Тогда лиев идеал $[V,A]$ в силу (26) удовлетворяет тождеству $\{x,x,y\}=0$, а значит, с учетом (3) удовлетворяет тождеству 2-энгелевости. Таким образом, лиев идеал $[V,A]$ нильпотентен индекса ≤ 4. Отсюда ввиду первичности алгебры A^- получаем $[V,A]=(0)$. Поскольку A — алгебра без центра, то $V=(0)$, т. е. алгебра A удовлетворяет тождеству «квадрата коммутатора» $[x,y]^2=0$ и в силу леммы 16 является 2-энгелевой; противоречие. $\square$

§ 5. Алгебры с тождеством $h_a(x,y,z)=0$

Всюду в этом параграфе предполагается, что альтернативная алгебра над полем характеристики 3 удовлетворяет тождеству $h_a(x,y,z)=0$ или (11). Справедливы линеаризации тождества (18):

$$\{xa',y,a\}=-\{ya',x,a\}, \tag{18$'$}$$

$$\{xa',y,b\}+\{xb',y,a\}=-(\{ya',x,b\}+\{yb',x,a\}). \tag{18$''$}$$

Всюду ниже используется следующее обозначение. Если $f(x,y,z)$ — многочлен, линейный по переменным x, y, z, то введем функцию Якоби для f:

$$\sum_{x,y,z}f(x,y,z):=f(x,y,z)+f(y,z,x)f(z,x,y).$$

Поскольку четные подстановки образуют группу, справедливо следующее равенство:

$$\sum_{x,y,z}f(x,y,z)=\sum_{x,y,z}f(z,x,y),$$

которое в дальнейшем используется без дополнительных пояснений.

5.1. Некоторые следствия из тождества $h_a=0$**.** Отметим, что справедливость доказанных ниже тождеств была проверена сначала с помощью компьютерной программы «Мальцев» [7].

Лемма 18. $\sum\limits_{x,y,z}(\{xa'b',y,z\}+\{ax'y',z,b\}-\{bx'y',z,a\})=0.$

Доказательство. Из тождества (11) вытекает $\{ba',x,a\}y'+\{bx',y,a\}a'=0$, значит, в силу тождеств (1) и (18′) имеем

$$\begin{aligned}0&=\{ba'y',x,a\}+\{ba',xy',a\}+\{ba',x,ay'\}+\{bx'a',y,a\}+\{bx',ya',a\}\\&=\{ba'y',x,a\}-\{xy'a',b,a\}+\{bx'a',y,a\}+(\{ba',x,ay'\}+\{bx',a,ay'\})\\&=\{ba'y',x,a\}-\{xy'a',b,a\}+\{bx'a',y,a\}-(\{ay'a',x,b\}+\{ay'x',a,b\}),\end{aligned}$$

т. е.

$$\{ba'y',x,a\}-\{xy'a',b,a\}+\{bx'a',y,a\}+\{ya'^2,x,b\}-\{ay'x',a,b\}=0.$$

Линеаризуем теперь это тождество подстановкой $a\to z$:

$$\begin{aligned}&\{ba'y',x,z\}+\{bz'y',x,a\}-\{xy'a',b,z\}-\{xy'z',b,a\}+\{bx'a',y,z\}\\&\qquad+\{bx'z',y,a\}+\{ya'\circ z',x,b\}-\{ay'x',z,b\}-\{zy'x',a,b\}=0.\end{aligned}$$

Подействуем на последнее тождество оператором $\sum:=\sum\limits_{x,y,z}$ суммирования:

$$\begin{aligned}&\sum\{ba'y',x,z\}+\sum\{bz'y',x,a\}-\sum\{xy'a',b,z\}\\&\qquad-\sum\{xy'z',b,a\}+\sum\{bx'a',y,z\}+\sum\{bx'z',y,a\}\\&\qquad\qquad+\sum\{ya'\circ z',x,b\}-\sum\{ay'x',z,b\}-\sum\{zy'x',a,b\}=0.\end{aligned}$$

Учитывая тождество Якоби, имеем

$$\begin{aligned}0&=\sum\{ba'y',x,z\}+\sum\{bz'y',x,a\}-\sum\{xy'a',b,z\}-\sum\{xy'z',b,a\}\\&\quad+\sum\{bx'a',y,z\}+\sum\{bx'z',y,a\}+\sum\{ya'\circ z',x,b\}-\sum\{ay'x',z,b\}\\&\quad-\sum\{zy'x',a,b\}=\sum\{ba'x',z,y\}+2\sum\{bx'z'y,a\}-\sum\{xy'a',b,z\}\\&\quad+\sum\{bx'a',y,z,\}+\sum\{ya'\circ z',x,b\}+\sum\{xy'a',z,b\}\\&=\sum\{ba'x',z,y\}-\sum\{bx'z',y,a\}-\sum\{zx'a',b,y\}-\sum\{bx'a',z,y\}\\&\quad+\sum\{ya'\circ z',x,b\}+\sum\{yz'a',x,b\}=\sum\{ba'x',z,y\}-\sum\{bx'z',y,a\}\\&\quad+\sum\{xz'a',b,y\}-\sum\{bx'a',z,y\}+\sum\{xa'\circ y'-ay'x',z,b\}\\&=\sum\{ba'x'-bx'a',z,y\}-\sum\{bx'z',y,a\}+\sum\{yx'a',b,z\}+\sum\{xa'\circ y'-ay'x',z,b\}\\&=\sum\{ba'x'-bx'a',z,y\}-\sum\{bx'z',y,a\}+\sum\{xa'\circ y'-ay'x'-yx'a',z,b\}.\end{aligned}$$

Поскольку справедливы равенства

$$ba'x'-bx'a'=xa'b';$$

$$\begin{aligned}xa'\circ y'-ay'x'-yx'a'&=xa'y'+xy'a'-ay'x'-yx'a'\\&=xa'y'+yx'a'-ay'x'=-2ay'x'=ay'x',\end{aligned}$$

то

$$\sum\{xa'b',z,y\}-\sum\{bx'z',y,a\}+\sum\{ax'z',y,b)=0,$$

но это равенство с точностью до обозначения переменных совпадает с равенством, указанным в лемме. □

Из леммы 18 вытекает тождество

$$\{xa'^2,y,z\}+\{ya'^2,z,x\}+\{za'^2,x,y\}=0. \tag{27}$$

Лемма 19.

$$\sum_{x,y,z}(\{ax'y',z,b\}-\{bx'y',z,a\})=\sum_{x,y,z}(\{xy'a',z,b\}-\{xy'b',z,a\}).$$

Доказательство. Поскольку в силу тождества (27) функция $\{ax'^2,b,x\}$ симметрична по a, b, то, полагая $\sum:=\sum\limits_{x,y,z}$, имеем

$$\sum\{ax'y'+ay'x',b,z\}=\sum\{bx'y'+by'x',a,z\}.$$

На основании тождества Якоби

$$\sum\{-xy'a'-ya'x'+ay'x',b,z\}=\sum\{-xy'b'-yb'x'+by'x',a,z\}$$

или

$$\sum\{-xy'a'+2ay'x',b,z\}=\sum\{-xy'b'+2by'x',a,z\}.$$

Поскольку характеристика 3, имеем

$$\sum\{-xy'a'-ay'x',b,z\}=\sum\{-xy'b'-by'x',a,z\},$$

откуда

$$\sum\{xy'a'+ay'x',b,z\}=\sum\{xy'b'+by'x',a,z\}.$$

Так как

$$xy'a'+ay'x'=xy'a'-yx'a'-xa'y'=2xy'a'+ax'y'=-xy'a'+ax'y',$$

то

$$\sum\{-xy'a'+ax'y',z,b\}=\sum\{-xy'b'+bx'y',z,a\},$$

откуда

$$\sum(\{ax'y',z,b\}-\{bx'y',z,a\})=\sum(\{xy'a',z,b\}-\{xy'b',z,a\}),$$

что и требовалось. □

5.2. Завершение доказательства основной теоремы. Наряду с функциями p и q введем в рассмотрение еще одну функцию

$$r(a,x,y,z,b)=p(a,xb',y,z)+p(a,x,yb',z)+p(a,x,y,zb').$$

Поскольку отображение $\beta: x\to xb'$ является дифференцированием, то

$$p(a,x,y,z)^\beta=p(a^\beta,x,y,z)+p(a,x^\beta,y,z)+p(a,x,y^\beta,z)+p(a,x,y,z^\beta),$$

откуда

$$q(a,x,y,z,b)=r(a,x,y,z,b). \tag{28}$$

Используя тождества (18) и (18′), легко понять, что функция $p(a,x,y,z)$ кососимметрична по переменным x, y, z. Но тогда кососимметричными по переменным x, y, z являются функции $q(a,x,y,z,b)$ и $r(a,x,y,z,b)$. Отсюда вытекает представление

$$r(a,x,y,z,b)=p(a,xb',y,z)+p(a,yb',z,x)+p(a,zb',x,y). \tag{29}$$

Лемма 20. *Функция $q(a,x,y,z,b)$ кососимметрична по переменным a, b.*

Доказательство. Подставляя в (11) $z = a$, получим тождество

$$\{xa', y, a\}a' = h_a(x,y,a) = 0,$$

линеаризация которого подстановкой $a \to z$ имеет вид

$$\{xz', y, a\}a' + \{xa', y, z\}a' + \{xa', y, a\}z' = 0. \tag{30}$$

В самом деле, учитывая тождества (18), имеем

$$\begin{aligned}
q(a,x,y,z,a) &= p(a,x,y,z)a' - p(aa',x,y,z) = p(a,x,y,z)a' \\
&= (\{az',x,y\} - \{yz',a,x\} - \{xz',y,a\})a' \\
&= \{az',x,y\}a' - \{yz',a,x\}a' - \{xz',y,a\}a' \\
&= \{az',x,y\}a' - \{yz',a,x\}a' - \{zx',a,y\}a' \\
&= \{az',x,y\}a' - \{yz',a,x\}a' - \{za',x,a\}y' \quad \text{в силу (11)} \\
&= -\{za',x,y\}a' - \{zy',x,a\}a' - \{za',x,a\}y' = 0 \quad \text{в силу (30).} \ \square
\end{aligned}$$

Лемма 21. $r(a,x,y,z,b) = -\sum\limits_{x,y,z}\{xb'a',y,z\} - \sum\limits_{x,y,z}\{xy'b',a,z\}$.

Доказательство. Выполняя далее преобразования, будем группировать слагаемые, используя одноименные нижние индексы для слагаемых, относящихся к одной группе. Используя представление (29), преобразуем функцию:

$$\begin{aligned}
r(a,x,y,z,b) &= p(a,xb',y,z) + p(a,yb',z,x) + p(a,zb',x,y) \\
&= \{az',xb',y\} + \{yz',xb',a\} + \{xb'z',a,y\} + \{ax',yb,z\} \\
&+ \{zx',yb',a\} + \{yb'x',a,z\} + \{ay',zb',x\} + \{xy',zb',a\} + \{zb'y',a,x\} \quad \text{в силу (18)} \\
&= -\{a(xb')',z,y\} - \{y(xb')',z,a\} + \{xb'z',a,y\} \\
&- \{a(yb')',x,z\} - \{z(yb')',x,a\} + \{yb'x',a,z\} \\
&- \{a(zb')',y,x\} - \{x(zb')',y,a\} + \{zb'y',a,x\} \quad \text{в силу (18}''\text{)} \\
&= \{xb'a',z,y\}_1 + \{xb'y',z,a\}_2 + \{xb'z',a,y\}_3 + \{yb'z',x,z\}_1 + \{yb'z',x,a\}_4 \\
&+ \{yb'x',a,z\}_2 + \{zb'a',y,x\}_1 + \{zb'x',y,a\}_3 + \{zb'y',a,x\}_4 \\
&= (\{xb'a',z,y\} + \{yb'a',x,z\}) + \{zb'a',y,x\})_1 \\
&+ (\{xb'y',z,a\} + \{yb'x',a,z\})_2 + (\{xb'z',a,y\} + \{zb'x',y,a\})_3 \\
&+ (\{yb'z',x,a\} + \{zb'y',a,x\})_4 \\
&= \sum_{x,y,z}(\{xb'a',z,y\} + \{bx'y' - by'x',a,z\} + \{bz'x' - bx'z',a,y\} + \{by'z' - bz'y',a,x\}) \\
&= -\sum_{x,y,z}\{xb'a',y,z\} - \sum_{x,y,z}\{xy'b',a,z\},
\end{aligned}$$

поскольку в силу тождества Якоби

$$bx'y' - by'x' = b[x,y]' = -[x,y]b' = -xy'b'. \qquad \square$$

Лемма 22. $q(a,x,y,z,b)=0$.

Доказательство. Линеаризуем (27) подстановкой $a\to b$:

$$0=\sum\{xa'b'+xb'a',y,z\}=\sum\{xa'b'-ba'x'-ax'b',y,z\}$$
$$=\sum\{2xa'b'-ba'x',y,z\}=\sum\{-xa'b'+ab'x',y,z\}$$
$$=-\sum\{xa'b'+x(ab')',y,z\},$$

т. е.

$$\sum\{xa'b',y,z\}=-\sum\{x(ab')',y,z\}. \tag{31}$$

Поскольку в силу (28) функции q и r равны, на основании лемм 20 и 21 и тождества (27) имеем

$$\sum\{xy'a',a,z\}=0, \tag{32}$$

$$q(a,x,y,z,b)=\sum\{xa'b',y,z\}-\sum\{xy'a',z,b\}. \tag{33}$$

Наконец, в силу леммы 19 и тождества (32)

$$\sum(\{ax'y',z,b\}-\{bx'y',z,a\})=2\sum\{xy'a',z,b\}=-\sum\{xy'a',z,b\},$$

следовательно, согласно лемме 18

$$\sum\{xa'b',y,z\}=-\sum(\{ax'y',z,b\}-\{bx'y',z,a\})=\sum\{xy'a',z,b\}. \tag{34}$$

Из равенств (33) и (34) вытекает требуемое $q(a,x,y,z,b)=0$. $\square$

Поскольку ввиду леммы 22 тождество $q=0$ следует из тождества $h_a=0$, на основании леммы 8 и теоремы 3 доказательство основной теоремы также завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
2. *Пчелинцев С. В.* Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным // Изв. РАН. Математика. 2004. Т. 68, № 1. С. 183–206.
3. *Филиппов В. Т.* Об энгелевых алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 89–109.
4. *Филиппов В. Т.* Первичные алгебры Мальцева // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 5. С. 669–677.
5. *Пчелинцев С. В.* О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 142–149.
6. *Пчелинцев С. В.* О бэровых цепочках альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 6. С. 636–648.
7. *Buchnev A. A., Filippov V. T., Shestakov I. P.* Checking identities of nonassociative algebras by computer // Siberian congr. on applied and industrial mathematics (INPRIM-98). Novosibirsk, 1998. P. 9.

Статья поступила 5 июня 2006 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович
Финансовая академия при Правительстве Российской Федерации,
Ленинградский пр., 49, Москва 125468