Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.95

СВОЙСТВА C^1–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ, МНОЖЕСТВО ЗНАЧЕНИЙ ГРАДИЕНТА КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ НИГДЕ НЕ ПЛОТНЫМ МНОЖЕСТВОМ

М. В. Коробков

Аннотация. Одним из основных результатов настоящей статьи является

Теорема. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция на области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что $\operatorname{Int} \nabla v(\Omega) = \varnothing$. Тогда для любой точки $z \in \Omega$ найдется прямая $L \ni z$ такая, что $\nabla v \equiv \mathrm{const}$ на компоненте связности множества $L \cap \Omega$, содержащей точку z.*

Доказано также, что при выполнении условий теоремы множество значений градиента $\nabla v(\Omega)$ локально представляет собой кривую, причем у этой кривой имеются касательные в слабом смысле и направление этих касательных есть функция ограниченной вариации.

Ключевые слова: C^1-гладкая функция, множество значений градиента, нигде не плотное множество.

Введение

Как известно, если C^2-гладкая функция $v = v(x,t)$, определенная в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяет дифференциальному уравнению $v_t = \varphi(v_x)$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — C^1-гладкая функция, то через каждую точку $z_0 \in \Omega$ проходит прямая линия (характеристика), на которой $\nabla v = \mathrm{const}$ (см., например, [1, § 55]). В настоящей статье показано (см. ниже теорему 1.1), что это свойство имеет место в гораздо более общей ситуации: когда v есть произвольная C^1-гладкая функция двух переменных, множество значений градиента которой не имеет внутренних точек. Оказалось также, что все такие функции являются решением некоторого нелинейного дифференциального уравнения (см. ниже теорему 1.4).

В последние годы ряд математиков (Болл (J. M. Ball), Мюллер (S. Müller), Шверак (V. Šverák), Кирхейм (B. Kirchheim), М. А. Сычев и др., см., например, [2]) изучали следующую проблему: каким условиям должно удовлетворять множество K, чтобы дифференциальное соотношение $\nabla v \in K$ имело нетривиальные липшицевы решения? Мы изучаем сходную проблему для C^1-гладких (не только липшицевых) решений дифференциальных соотношений. Из наших результатов, в частности, следует, что если нигде не плотное множество $K \subset \mathbb{R}^2$ является множеством значений градиента C^1-гладкой функции, то локально K

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00482–а), гранта Фонда содействия отечественной науке для молодых кандидатов, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант НШ–8526.2006.1), Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (№ 117, 2006) и Лаврентьевского гранта для молодых ученых СО РАН (№ 5).

представляет собой кривую, причем у этой кривой имеются касательные в некотором слабом смысле и направление этих слабых касательных меняется как функция ограниченной вариации (см. ниже теоремы 1.4, 1.9).

В качестве следствия полученных результатов доказано, что множество значений градиента произвольной непостоянной C^1-гладкой финитной функции двух переменных является замыканием своей внутренности (см. ниже следствие 1.3).

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в работах [3–5].

Всюду в дальнейшем символом ∇v обозначается градиент $\nabla v = (v_x, v_t)$ функции $v = v(x,t)$. Через $C^k(\Omega)$ обозначается множество функций из Ω в $\mathbb{R}$ класса гладкости C^k. Для функции $v \in C^1(\Omega)$ символом $\nabla v^{-1}(W)$ обозначается прообраз $\{(x,t) \in \Omega \mid \nabla v(x,t) \in W\}$. *Областью* называется открытое связное множество. Всюду в дальнейшем $\operatorname{Int} E$ — внутренность множества E, $\operatorname{Cl} E$ — замыкание множества E (иногда для той же цели служит значок $\overline{E}$), ∂E — граница множества E, $\operatorname{meas}(E)$ — мера Лебега множества E (мы используем общее обозначение meas для всех размерностей). Символом $a \cdot b$ обозначается скалярное произведение векторов a, b, а символом $B(z,r)$ — открытый шар $\{w \mid |w-z| < r\}$. *Кривой* мы называем непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \ni s \mapsto (\gamma_1(s), \gamma_2(s)) \in \mathbb{R}^2$. Если отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ непрерывно и инъективно, то будем называть его также *дугой*. Под *связностью* мы понимаем связность в смысле понятий общей топологии. Некоторые другие обозначения будут вводиться по ходу работы.

1. Основные результаты

Теорема 1.1. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что*

$$\operatorname{Int} \nabla v(\Omega) = \varnothing. \tag{1}$$

Тогда для любой точки $z \in \Omega$ найдется прямая $L \ni z$ такая, что $\nabla v \equiv \mathrm{const}$ на компоненте связности множества $L \cap \Omega$, содержащей точку z.

Следствие 1.2. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что справедливо равенство* (1)*. Тогда для любого подмножества $W \subset \nabla v(\Omega)$ каждая компонента связности K граничного множества $\Omega \cap \partial(\nabla v^{-1}(W))$ лежит на некоторой прямой линии L, причем концы K (если они существуют, т. е. если $K \neq L$) принадлежат $\partial\Omega$.*

Напомним, что функция $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ называется *финитной*, если ее носитель (т. е. замыкание множества $\{z \in \mathbb{R}^n \mid v(z) \neq 0\}$) есть компактное множество. Из теоремы 1.1 также вытекает

Следствие 1.3. *Пусть $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ — финитная функция, $v \neq \mathrm{const}$. Тогда множество значений градиента $\nabla v(\mathbb{R}^2)$ является регулярно замкнутым множеством, т. е. $\nabla v(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Cl} \operatorname{Int} \nabla v(\mathbb{R}^2)$.*

Отметим, что при дополнительных условиях (типа гёльдеровости) на модуль непрерывности градиента ∇v утверждение следствия 1.3 доказано в [6].

Теорема 1.4. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что справедливо равенство* (1)*. Тогда для любой точки $z_0 \in \Omega$ найдутся ее открытая связная окрестность Ω_0 и непрерывные функции $u : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ такие, что функция γ не постоянна ни на каком интервале и*

$$\nabla v(z) \equiv \gamma(u(z)) \quad \text{при } z \in \Omega_0. \tag{2}$$

Из теоремы 1.4 и результатов статьи [5] вытекает следующий результат.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4. *Обозначим* $J = u(\Omega_0)$. *Тогда функция* γ *обладает следующим свойством на множестве* J*:*

(Γ_1) *для каждой точки* $a_0 \in J$ *существуют ее окрестность* $V = V(a_0)$ *и непрерывная слева функция* $l : V \to \mathbb{R}$ *ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *имеет место формула*

$$\forall [s_1, s_2] \subset V \cap J \quad \gamma_2(s)|_{s_1}^{s_2} = \gamma_1(s) l(s)|_{s_1}^{s_2} - \int\limits_{s_1}^{s_2 - 0} \gamma_1(s)\, dl(s), \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по полуоткрытому интервалу $[s_1, s_2)$ *и используется стандартное обозначение* $f(s)|_{s_1}^{s_2} := f(s_2) - f(s_1)$.

Замечание 1.6. Если γ — график функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, т. е. $\gamma(s) = (s, \varphi(s))$, где $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, то функция $l(s)$ из теоремы 1.5 вычисляется по формуле $l(s) \equiv \varphi'(s)$, а формула (3) превращается в обычную формулу интегрирования по частям.

Замечание 1.7. Свойство (Γ_1) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$(\widetilde{\Gamma}_1)$ для каждой точки $a_0 \in J$ существуют окрестность $V = V(a_0)$, непрерывная слева функция $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации и единичный вектор $\bar{e} \in \mathbb{R}^2$ такие, что справедлива формула

$$\forall [s_1, s_2] \subset V \cap J \quad \bar{e} \cdot \gamma(s)|_{s_1}^{s_2} = \bar{e}^{\perp} \cdot \gamma(s) l(s)|_{s_1}^{s_2} - \int\limits_{s_1}^{s_2 - 0} \bar{e}^{\perp} \cdot \gamma(s)\, dl(s),$$

где символом $\bar{e}^{\perp}$ обозначается единичный вектор, ортогональный к $\bar{e}$.

Нам понадобятся еще некоторые понятия и обозначения из работы [5]. Обозначим через $\mathbb{R}P^1$ множество прямых линий плоскости $\mathbb{R}^2$, проходящих через точку 0, т. е. $\mathbb{R}P^1$ — одномерное проективное пространство. Иногда мы будем естественным образом отождествлять прямую из $\mathbb{R}P^1$ с вектором из $\mathbb{R}^2$, параллельным этой прямой.

Определение 1.8. Пусть $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение (кривая), не постоянное ни на каком интервале. Будем говорить, что прямая $p \in \mathbb{R}P^1$ является *σ-касательной справа* к кривой γ в точке s_0 (обозначается $p = \gamma'_+(s_0)$), если для любой последовательности $s_\nu \to s_0 + 0$ такой, что

$$\sup_{\nu} \sup_{s \in [s_0, s_\nu]} \frac{|\gamma(s) - \gamma(s_0)|}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)|} < \infty,$$

имеет место сходимость (понимаемая в естественном смысле)

$$\frac{\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(s_0)|} \to p.$$

Аналогично вводятся понятия *σ-касательной* $\gamma'_-(s_0)$ *слева* в точке s_0 и просто *σ-касательной* $\gamma'(s_0)$ в точке s_0. Очевидно, что если кривая γ имеет обычную касательную в точке, то она будет также и σ-касательной. Однако обратное утверждение неверно.

Из теоремы 1.4 и результатов статьи [5] вытекает следующий результат.

Теорема 1.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.4. *Обозначим* $J = u(\Omega_0)$, $a = \inf J$, $b = \sup J$. *Тогда помимо свойства* (Γ_1) *функция* γ *обладает также следующим свойством:*

(Γ_3) *для каждой точки* $a_0 \in J$ *существуют окрестность* $V = V(a_0)$ *и непрерывная слева функция* $l : V \to \mathbb{R}$ *ограниченной вариации такие, что после соответствующей линейной ортонормированной замены координат*[1] *в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *справедливы равенства*

$$\forall s \in V \cap J \setminus \{b\}\ \gamma'_+(s) = (1, l(s+0)), \quad \forall s \in V \cap J \setminus \{a\}\ \gamma'_-(s) = (1, l(s)),$$

т. е. указанные σ*-касательные существуют и параллельны векторам* $(1, l(s+0))$, $(1, l(s))$ *соответственно*[2]. *Таким образом,* $\gamma'_+(s)$ *непрерывна справа в каждой точке* $s \in V \cap J \setminus \{b\}$, *а* $\gamma'_-(s)$ *непрерывна слева в каждой точке* $s \in V \cap J \setminus \{a\}$, *причем* $\gamma'_+(s) = \gamma'_-(s) = \gamma'(s)$ *для всех точек* $s \in (a, b) \setminus E_\sigma$, *где исключительное множество* E_σ *не более чем счетно.*

2. Доказательства основных результатов

Мы начнем с доказательства простых вспомогательных утверждений. Отметим, что формулировки и доказательства лемм 2.1, 2.2 настоящей статьи (см. ниже) близки по духу леммам 3–5 статьи [6].

Лемма 2.1. *Пусть* $C \subset \mathbb{R}^2$ — *компактное множество такое, что* $\operatorname{Int} C = \varnothing$. *Тогда для любого числа* $r > 0$ *и любой точки* $a \in C$ *существует ее открытая окрестность* $V_r(a)$, *удовлетворяющая следующим двум условиям:*

1) *пересечение* $C \cap \partial V_r(a)$ *является вполне несвязным*[3] *множеством;*

2) $B(a, r) \subset V_r(a) \subset B(a, 2r)$.

Доказательство. Зафиксируем $a \in C$ и $r > 0$. Согласно [7, § 59.IV, теорема 12] топологическая размерность множества C не превосходит 1. Отсюда по определению топологической размерности (см. [8, § 25]) вытекает, что для любого $d \in C$ найдется открытая окрестность $V'_r(d)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1′) пересечение $C \cap \partial V'_r(d)$ является вполне несвязным множеством;

2′) $V'_r(d) \subset B(d, r)$.

Вследствие определения компактного множества найдется конечное число точек $d_i \in C \cap \partial B(a, r)$, $i = 1, \dots, N = N_{a,r}$, таких, что $C \cap \partial B(a, r) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} V'_r(d_i)$. Теперь в качестве искомого множества $V_r(a)$ можно взять $V_r(a) = B(a, r) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{N} V'_r(d_i)\right)$. $\square$

В нескольких следующих леммах будем рассматривать упрощенную ситуацию, когда область Ω удовлетворяет следующему условию:

(P_*) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная односвязная область, граница которой является простой (т. е. без самопересечений) ломаной с конечным числом звеньев.

---

[1] Здесь окрестность V, функция l и замена координат те же самые, о которых шла речь в свойстве (Γ_1).

[2] Мы обозначаем через $l(s+0)$ соответствующий односторонний предел функции l.

[3] Напомним, что множество называется *вполне несвязным*, если каждое его непустое связное подмножество состоит из одной точки.

Лемма 2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область со свойством (P_*) и $G \subset \Omega$ — ее подобласть. Тогда для каждой компоненты связности Ω_i открытого множества $\Omega \setminus \overline{G}$ справедливо утверждение: пересечение $\Omega \cap \partial\Omega_i$ является связным множеством.*

Доказательство. Эта простая лемма прямо следует из [7, § 49.V, теорема 2; § 57.III, теорема 1] (возможность применения последней теоремы вытекает из [7, § 57.I, теорема 9(i)]). □

Для функции v будем обозначать через Z_v множество критических точек: $Z_v = \{(x,t) \in \Omega \mid \nabla v(x,t) = 0\}$[4)]. Важным инструментом в наших исследованиях будет следующий результат, являющийся аналогом теоремы Сарда.

Теорема A [3]. *Пусть $v \in C^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^2$. Предположим, что $0 \notin \operatorname{Cl}\operatorname{Int}\nabla v(\Omega)$. Тогда $\operatorname{meas} v(Z_v) = 0$.*

Лемма 2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область со свойством (P_*) и отображение $v \in C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию (1). Пусть, далее, $K \subset \overline{\Omega}$ — связное множество такое, что $\exists a \in \mathbb{R}^2$ $\nabla v(z) \equiv a$ для всех $z \in K$. Тогда $v(z'') - v(z') = a \cdot (z'' - z')$ для любых $z', z'' \in K$.*

Доказательство. Вычитая из отображения v линейную функцию, можем считать без потери общности, что $a = 0$. Как следует из классической теоремы Морса — Сарда (см., например, [9, теорема 1.3]), почти все $y \in \mathbb{R}$ являются регулярными (в классическом смысле) значениями v на границе $\partial\Omega$, т. е.

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}(z) \neq 0 \quad \forall z \in v^{-1}(y) \cap \partial\Omega,$$

где $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{s}}$ — производная по касательной к границе $\partial\Omega$ (при этом мы считаем, что для регулярных значений y прообраз $v^{-1}(y)$ не содержит вершин ломаной, составляющей $\partial\Omega$). Суммируя этот факт с теоремой A, получаем требуемое в лемме 2.3 утверждение. □

Лемма 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область со свойством (P_*) и отображение $v \in C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию (1). Пусть, далее, имеется семейство (конечное или счетное) попарно не пересекающихся открытых множеств $\Omega_i \subset \Omega$, для каждого из которых существуют связное множество $K_i \subset \overline{\Omega}$ и точка $a_i \in \mathbb{R}^2$ такие, что $\Omega \cap \partial\Omega_i \subset K_i$ и $\nabla v(z) \equiv a_i$ для всех $z \in K_i$. Тогда существует отображение $\tilde{v} \in C^1(\overline{\Omega})$, градиент которого вычисляется по формуле*

$$\nabla\tilde{v}(z) = \begin{cases} a_i, & z \in \overline{\Omega}_i; \\ \nabla v(z), & z \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_i \overline{\Omega}_i. \end{cases}$$

Доказательство леммы 2.4 основано на лемме 2.3. Ввиду простоты выкладок мы их опускаем. □

Введем некоторые вспомогательные определения. Пусть $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Для $a \in \nabla v(\Omega)$ положим $\nabla v^{-1}(a) = \{z \in \overline{\Omega} \mid \nabla v(z) = a\}$. Точку $a \in \nabla v(\Omega)$ будем называть *нормальной*, если $\operatorname{meas} \nabla v^{-1}(a) = 0$. Ясно, что все точки $a \in \nabla v(\Omega)$, за исключением не более чем счетного множества, являются нормальными. Точку $z \in \Omega$ будем называть *нормальной*, если значение $\nabla v(z)$ является нормальным. Для $z \in \Omega$ обозначим через $K(z)$ компоненту связности прообраза $\nabla v^{-1}(\nabla v(z))$, содержащую точку z.

[4)] Здесь и в дальнейшем значение градиента $(0,0)$ мы обозначаем упрощенным символом 0.

Лемма 2.5. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область со свойством (P_*), и пусть отображение $v \in C^1(\overline{\Omega})$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Int} \nabla v(\overline{\Omega}) = \varnothing. \tag{4}$$

Тогда для любой нормальной точки $z_0 \in \Omega$ множество $K(z_0)$ является прямолинейным отрезком с концами на $\partial\Omega$.

Доказательство. По построению

$$K(z_0) \text{ является связным компактным множеством,} \tag{5}$$

$$\operatorname{meas} K(z_0) = 0. \tag{6}$$

Положим $C = \nabla v(\overline{\Omega})$. Вычитая из отображения v линейную функцию, можем считать без потери общности, что $\nabla v(z_0) = 0$. Тогда по построению

$$\forall z \in K(z_0) \quad \nabla v(z) = 0. \tag{7}$$

Для $r > 0$ рассмотрим открытую окрестность $V_r(0)$, существование которой утверждается в лемме 2.1. Так как множество значений градиента $\nabla v(z)$, не являющихся нормальными, не более чем счетно, то можно без потери общности считать, что кроме свойств 1, 2 из леммы 2.1 окрестность $V_r(0)$ обладает также свойством

$$\forall a \in C \cap \partial V_r(0) \quad \operatorname{meas} \nabla v^{-1}(a) = 0, \tag{8}$$

т. е. a является нормальным значением градиента. Обозначим через $G_r(z_0)$ компоненту связности открытого множества $\Omega \cap \nabla v^{-1}(V_r(0))$, содержащую множество $K(z_0) \cap \Omega$[5]. Тогда открытое множество $\Omega \setminus \operatorname{Cl} G_r(z_0)$ разлагается в объединение попарно не пересекающихся областей $\Omega'_{r,j}$. По построению $\nabla v(z) \in C \cap \partial V_r(0)$ для любого $z \in \Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$. В силу леммы 2.2

$$\forall r > 0 \, \forall j \quad \Omega \cap \partial\Omega'_{r,j} \text{ является связным множеством.} \tag{9}$$

Суммируя два последних предложения, а также учитывая свойство 1 из леммы 2.1, получаем, что

$$\forall r > 0 \, \forall j \, \exists a_{r,j} \in C \cap \partial V_r(0) \quad \nabla v(z) \equiv a_{r,j} \text{ для всех } z \in \Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}. \tag{10}$$

Возьмем произвольно компоненту связности Ω' открытого множества $\Omega \setminus K(z_0)$. Тогда Ω' является областью. Зафиксируем произвольно $z_1 \in \Omega'$. Легко видеть, что

$$\operatorname{Cl} G_r(z_0) \to K(z_0) \text{ в метрике Хаусдорфа при } r \to 0. \tag{11}$$

Поэтому $\exists r_1 > 0 \; \forall r \in (0, r_1) \; z_1 \notin \operatorname{Cl} G_r(z_0)$. Тогда, не умаляя общности, можно считать, что $z_1 \in \Omega'_{r,1}$ при $r \in (0, r_1)$. Ясно, что

$$\forall r \in (0, r_1) \quad \Omega'_{r,1} \subset \Omega',$$

$$\forall z \in \Omega' \, \exists r(z) > 0 \, \forall r \in (0, r(z)) \quad z \in \Omega'_{r,1}. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что $\operatorname{Cl}(\Omega \cap \partial\Omega'_{r,1}) \to K(z_0) \cap \overline{\Omega}'$ в метрике Хаусдорфа, откуда с учетом (9) получаем, что

$$K(z_0) \cap \overline{\Omega}' \text{ является связным компактным множеством.} \tag{13}$$

[5] То, что такая компонента связности существует (хотя само множество $K(z_0) \cap \Omega$ может и не быть связным), легко доказывается с использованием простого строения области Ω, см. свойство (P_*).

Обозначим $J_r = \{j \mid \Omega'_{r,j} \cap \Omega' \neq \varnothing\}$. По построению имеем соотношения

$$\forall r \in (0, r_1) \quad 1 \in J_r, \tag{14}$$

$$\forall r \in (0, r_1)\, \forall j \in J_r \quad \Omega'_{r,j} \subset \Omega',$$

$$\forall r \in (0, r_1)\, \forall j_1, j_2 \in J_r \quad \Omega'_{r,j_1} \cap \Omega'_{r,j_2} = \varnothing \text{ при } j_1 \neq j_2.$$

Теперь для $r \in (0, r_1)$ определим непрерывное отображение $g_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ по формуле

$$g_r(z) = \begin{cases} 0, & z \in \mathrm{Cl}(\Omega \setminus \overline{\Omega}'); \\ a_{r,j}, & z \in \overline{\Omega}'_{r,j},\ j \in J_r; \\ \nabla v(z), & z \in \overline{\Omega}' \setminus \big(\bigcup\limits_{j \in J_r} \overline{\Omega}'_{r,j}\big). \end{cases} \tag{15}$$

По лемме 2.4[6)] существует отображение $\tilde{v}_r \in C^1(\overline{\Omega})$ такое, что $\nabla \tilde{v}_r(z) \equiv g_r(z)$ для всех $z \in \overline{\Omega}$. В частности,

$$\forall z \in K(z_0) \quad \nabla \tilde{v}_r(z) = 0.$$

Применяя лемму 2.3 к отображению $\tilde{v}_r$, не умаляя общности, можем считать, что

$$\forall z \in K(z_0) \quad \tilde{v}_r(z) = 0. \tag{16}$$

По свойству 2 из леммы 2.1 справедливы включения

$$\forall r \in (0, r_1)\, \forall j \in J_r \quad a_{r,j} \in \overline{B}(0, 2r) \setminus B(0, r). \tag{17}$$

Легко проверяется, что

$$\forall r \in (0, r_1) \quad \overline{\Omega}' \cap \mathrm{Cl}\, G_r(z_0) \supset \overline{\Omega}' \setminus \Big(\bigcup_{j \in J_r} \overline{\Omega}'_{r,j}\Big).$$

Отсюда, из формулы (15) и свойства 2 леммы 2.1 вытекают включения

$$\forall r \in (0, r_1)\, \forall z \in \overline{\Omega} \quad \nabla \tilde{v}_r(z) \in \mathrm{Cl}\, V_r(0) \subset \overline{B}(0, 2r). \tag{18}$$

Положим $v_r(z) = \frac{\tilde{v}_r(z)}{r}$. По определению $v_r \in C^1(\overline{\Omega})$, причем из (16), (18) получаем, что

$$\forall z \in K(z_0) \quad v_r(z) = 0, \tag{19}$$

$$\forall r \in (0, r_1)\, \forall z \in \overline{\Omega} \quad |\nabla v_r(z)| \leq 2. \tag{20}$$

Отсюда и из свойства (P_*) имеем, что отображения $v_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ равномерно ограничены и удовлетворяют условию Липшица с единой константой. В частности, отображения $v_r : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ равностепенно непрерывны. По теореме Арцела — Асколи существует убывающая последовательность радиусов $r_\nu \to 0$ такая, что

$$v_{r_\nu} \rightrightarrows v_0 \quad \text{при } \nu \to \infty,$$

где $v_0 : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ — некоторая липшицева функция, причем из (19) немедленно получаем, что

$$\forall z \in K(z_0) \quad v_0(z) = 0. \tag{21}$$

[6)] Здесь роль открытых множеств Ω_i из леммы 2.4 играют множества $\Omega \setminus \overline{\Omega}'$ и $\Omega'_{r,j}$, $j \in J_r$, а роль связных множеств K_i из леммы 2.4 — соответственно множества $K(z_0)$ и $\Omega \cap \partial \Omega'_{r,j}$ (см. формулы (5), (7), (9), (10)).

В силу (17) справедливы оценки

$$\forall \nu \, \forall j \in J_{r_\nu} \quad 1 \le \frac{|a_{r_\nu,j}|}{r_\nu} \le 2,$$

поэтому без потери общности можем считать, что

$$\frac{a_{r_\nu,1}}{r_\nu} \to a_1 \neq 0. \tag{22}$$

Из последнего предположения и из построения (см. формулы (15), (14), (12)) следует поточечная сходимость

$$\forall z \in \Omega \quad \nabla v_{r_\nu}(z) \to g_0(z) = \begin{cases} 0, & z \in \Omega \setminus \Omega'; \\ a_1, & z \in \Omega' \end{cases}$$

при $\nu \to \infty$. По формуле (20) и теореме Лебега $\|\nabla v_{r_\nu} - g_0\|_{L_1} \to 0$ при $\nu \to \infty$. Следовательно,

$$\nabla v_0(z) = g_0(z) \quad \text{для п. в. } z \in \Omega.$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$\forall z', z'' \in \overline{\Omega}' \quad v_0(z'') - v_0(z') = a_1 \cdot (z'' - z').$$

Из последней формулы и формул (21), (13), (22) следует, что множество $K(z_0) \cap \overline{\Omega}'$ является отрезком (прямолинейным). Учитывая произвольность выбора компоненты связности Ω', заключаем, что и само множество $K(z_0)$ — отрезок.

Итак, мы доказали, что для любой нормальной точки $z_0 \in \Omega$ множество $K(z_0)$ является отрезком. Осталось доказать, что его концы принадлежат границе $\partial\Omega$. В силу формул (8), (10) каждая точка $z \in \Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ нормальна, поэтому $K(z)$ — отрезок. Ввиду формул (9), (10) для любого $z \in \Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ множество $\Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ представляет собой связное подмножество отрезка $K(z)$, поэтому само множество $\Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ является отрезком. По построению множество $\Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ разделяет область Ω на несколько (не менее двух) компонент связности. Суммируя два последних предложения, получаем, что каждое множество $\Omega \cap \partial\Omega'_{r,j}$ — незамкнутый отрезок, концы которого принадлежат границе $\partial\Omega$. Отсюда и из формул (11), (6) следует искомое утверждение леммы 2.5. $\square$

Далее будем рассматривать общий случай, когда Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^2$ и $v \in C^1(\Omega)$. Предыдущие вспомогательные определения без труда переносятся и на этот общий случай.

Из леммы 2.5 легко следует

Лемма 2.6. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область и отображение $v \in C^1(\Omega)$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой нормальной точки $z_0 \in \Omega$ существует прямая $L \ni z_0$ такая, что множество $K(z_0)$ совпадает с компонентой связности множества $L \cap \Omega$, содержащей точку z_0.*

Имеет место следующая тривиальная

Лемма 2.7. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — произвольная область и $v \in C^1(\Omega)$. Тогда для любого значения $a \in \nabla v(\Omega)$ и для каждой точки $z \in \Omega \cap \partial(\nabla v^{-1}(a))$ существует последовательность нормальных точек $z_\nu \to z$.*

Из лемм 2.6, 2.7 легко выводятся теорема 1.1 и следствие 1.2. Для доказательства следствия 1.3 нам понадобится еще одна

Лемма 2.8 [6]. *Пусть* $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$ — *финитная функция,* $v \neq \mathrm{const}$. *Тогда* $0 \in \operatorname{Int} \nabla v(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство следствия 1.3. Предположим противное. Тогда существуют точки $w_0, z_0 \in \mathbb{R}^2$ и число $r > 0$ такие, что $w_0 = \nabla v(z_0)$ и $\operatorname{Int}(B(w_0, r) \cap \nabla v(\mathbb{R}^2)) = \varnothing$. Положим $G = B(w_0, r) \cap \nabla v(\mathbb{R}^2)$. По лемме 2.8

$$0 \notin G. \tag{23}$$

Пусть $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \nabla v(z) \in G\}$. Из формулы (23) и определения финитной функции следует, что Ω — ограниченное открытое множество. Тогда по теореме 1.1 существует прямая линия $L \ni z_0$ такая, что $\nabla v(z) \equiv w_0$ на компоненте связности множества $L \cap \Omega$, содержащей точку z_0. Ясно, что эта компонента связности является ограниченным открытым интервалом на прямой L. Пусть z_1 — один из концов этого интервала. Тогда $z_1 \in \partial\Omega$ и $\nabla v(z_1) = w_0$, что противоречит выбору Ω. Полученное противоречие завершает доказательство следствия 1.3. $\square$

Доказательство теоремы 1.4. Пусть выполнены условия теоремы 1.4. Ввиду локальности утверждения этой теоремы без потери общности можем считать, что Ω является квадратом: $\Omega = (-1, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $z_0 = (0, 0)$ и $v \in C^1(\overline{\Omega})$, причем выполнена формула (4). Вычитая из функции v линейную функцию, мы можем также считать, что

$$\nabla v(z_0) = 0.$$

В случае, когда существует окрестность точки z_0, в которой $\nabla v = \mathrm{const}$, утверждение доказываемой теоремы 1.4 тривиально. Разберем случай, когда это не так. Тогда

$$\text{существует последовательность нормальных точек } z_\nu \to z_0. \tag{24}$$

Рассмотрим отрезки $K(z_\nu)$, существование которых утверждается в лемме 2.5 (определение множеств $K(z_\nu)$ см. перед леммой 2.5). Из определения множеств $K(z)$, в частности, вытекает, что

$$\forall z', z'' \in \Omega \text{ либо } K(z') = K(z''), \text{ либо } K(z') \cap K(z'') = \varnothing. \tag{25}$$

Отсюда легко вывести, что отрезки $K(z_\nu)$ имеют предел

$$K(z_\nu) \to K_0 \tag{26}$$

относительно метрики Хаусдорфа. Ясно, что K_0 является отрезком с концами на $\partial\Omega$, причем $z_0 \in K_0$ и $\nabla v(z) \equiv 0$ при $z \in K_0$. Совершив поворот системы координат и вновь воспользовавшись локальностью утверждения доказываемой теоремы 1.4, без потери общности можем считать, что отрезок K_0 параллелен вертикальному направлению $(0, 1)$, т. е. что K_0 соединяет точки $(0, -1)$ и $(0, 1)$.

Далее возможны два варианта. Разберем сначала вариант, когда

$$\operatorname{Int}(K(z_0)) \neq \varnothing. \tag{27}$$

Вследствие (24)–(26) справедливо включение $K_0 \subset \partial K(z_0)$, причем существует $R > 0$ такое, что $B(z_0, R) \cap \partial K(z_0) = B(z_0, R) \cap K_0$. В силу локальности утверждения доказываемой теоремы 1.4 без потери общности можно считать, что $\Omega \cap \partial K(z_0) = \Omega \cap K_0 = K_0 \setminus \{(0, -1), (0, 1)\}$. Поэтому с учетом

(27) либо $K(z_0) = \overline{\Omega}_+$, либо $K(z_0) = \overline{\Omega}_-$, где $\overline{\Omega}_+ = \{(x,t) \in \overline{\Omega} \mid x \geq 0\}$, $\overline{\Omega}_- = \{(x,t) \in \overline{\Omega} \mid x \leq 0\}$. Далее без потери общности считаем, что

$$K(z_0) = \overline{\Omega}_+.$$

Тогда из следствия 1.2, сходимости отрезков (26) и формулы (25) вытекает существование такого $R_1 > 0$, что для любого $z \in B(z_0, R_1) \setminus \overline{\Omega}_+$ найдутся отрезки $K_-(z)$, $K_+(z)$, обладающие следующими свойствами:

(i) каждый из отрезков $K_-(z)$, $K_+(z)$ имеет верхний конец на множестве $\{(x,1) \mid x \in (-1,0)\}$, а нижний конец на множестве $\{(x,-1) \mid x \in (-1,0)\}$;

(ii) множество $K(z)$ является трапецией, левая сторона которой равна $K_-(z)$, правая — $K_+(z)$, а верхнее и нижнее основания содержатся в множествах $\{(x,1) \mid x \in (-1,0)\}$, $\{(x,-1) \mid x \in (-1,0)\}$ соответственно[7)].

Обозначим через H горизонтальный отрезок $H = \{(x,0) \mid x \in (-1,0)\}$. Из перечисленных выше свойств, следует, в частности, что для любого $z \in B(z_0, R_1) \setminus \overline{\Omega}_+$

(iii) пересечение $K(z) \cap H$ является непустым замкнутым промежутком, причем этот промежуток стремится к точке z_0 в метрике Хаусдорфа при $z \to \overline{\Omega}_+$.

Тогда элементарно можно построить непрерывную функцию $h : [-R_1, 0] \to [-1, 0]$ со следующими свойствами:

(iv) функция h является неубывающей, $h(-R_1) = -1$, $h(0) = 0$, причем $h(x') = h(x'')$ тогда и только тогда, когда $K((x',0)) = K((x'',0))$.

Теперь определим множество

$$\Omega_0 = \mathrm{Int}\Big(\overline{\Omega}_+ \bigcup \Big(\bigcup_{x \in (-R_1, 0)} K((x,0)) \Big)\Big)$$

и зададим на нем функцию $u : \Omega_0 \to [0,1]$ по правилу

$$u(z) = \begin{cases} 0, & z \in \overline{\Omega}_+; \\ h(x), & z \in K((x,0)),\ x \in (-R_1, 0). \end{cases}$$

Из свойства (iii) вытекает, что множество Ω_0 является окрестностью точки $z_0 = (0,0)$. Корректность определения функции $u(z)$ следует из свойства (iv). Также из построения ясно, что u непрерывна, причем

$$\forall z', z'' \in \Omega_0 \quad (u(z') = u(z'') \Leftrightarrow K(z') = K(z'')).$$

Определим непрерывную функцию $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ по правилу

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} (0, \tau), & \tau \geq 0; \\ \nabla v(x, 0), & \tau = h(x),\ x \in (-R_1, 0); \\ \nabla v(-R_1, 0) + (0, 1+\tau), & \tau \leq -1. \end{cases}$$

Корректность определения функции γ следует из свойства (iv). Из построения вытекают искомое равенство (2) и тот факт, что γ не постоянна ни на каком интервале.

Итак, мы доказали утверждение теоремы 1.4 для случая, когда выполнена формула (27). Если же вместо формулы (27) справедлива формула

$$\mathrm{Int}(K(z_0)) = \varnothing,$$

[7)] Отрезки $K_-(z)$ и $K_+(z)$ могут совпадать, тогда $K(z)$ является вырожденной трапецией: $K(z) = K_-(z) = K_+(z)$.

то $K(z_0) = K_0$ и выкладки проводятся аналогично, с очевидными упрощениями. Доказательство теоремы 1.4 завершено. $\square$.

Доказательство теорем 1.5, 1.9. Если в формулировке теоремы 1.5 условие $a_0 \in u(\Omega_0)$ заменить условием $a_0 \in \operatorname{Int} u(\Omega_0)$, то получившееся утверждение прямо следует из теоремы 1.4 настоящей статьи и теорем 1.4.2, 1.4.3 статьи [5]. В полном объеме (с учетом возможности $a_0 = \sup u(\Omega_0) \in u(\Omega_0)$ или $a_0 = \inf u(\Omega_0) \in u(\Omega_0)$) утверждение теоремы 1.5 доказывается с помощью тех же рассуждений, которые применялись при доказательстве теоремы 1.4.3 статьи [5]. Ввиду отсутствия принципиальных новых моментов мы не будем повторять здесь соответствующие выкладки из [5].

Теперь теорема 1.9 немедленно вытекает из теоремы 1.5 и следующего утверждения.

Лемма 2.9 [5]. *Пусть непрерывное отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ обладает свойством (Γ_1) на связном множестве $J \subset \mathbb{R}$. Предположим, что отображение γ не постоянно ни на каком интервале. Тогда γ имеет также свойство (Γ_3) на J.*

Лемма 2.9 (с незначительными отличиями) опубликована в статье [5] без доказательства. В настоящей работе впервые публикуется доказательство данной леммы.

Доказательство леммы 2.9. Обозначим, как и в формулировке свойства (Γ_3), $a = \inf J$, $b = \sup J$. Можно считать, что $a < b$ (в противном случае доказывать нечего). Предположим для простоты, что $J = (a, b)$ (в противном случае, когда $a \in J$ или $b \in J$, проверка существования σ-касательных в концевых точках осуществляется точно таким же образом, как и проведенная ниже проверка во внутренних точках).

Итак, пусть кривая $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ обладает свойством (Γ_1) на интервале (a, b). Нам требуется доказать, что γ имеет также свойство (Γ_3) на том же интервале. Зафиксируем произвольно точку $a_0 \in (a, b)$. Возьмем ее окрестность $V = V(a_0)$ и непрерывную слева функцию $l : V \to \mathbb{R}$ ограниченной вариации, существование которых утверждается в свойстве (Γ_1). Без потери общности мы будем считать, что V является открытым интервалом, лежащим в (a, b) и содержащим точку a_0. Совершив замену координат в плоскости $\mathbb{R}^2$, о которой говорится в свойстве (Γ_1), будем также считать далее, что координатные функции γ_1, γ_2 удовлетворяют формуле (3). Так как свойство (Γ_3) имеет локальный характер, достаточно доказать, что для любой точки $w \in V$ существуют σ-касательные справа и слева в точке w, параллельные векторам $(1, l(w + 0))$ и $(1, l(w))$ соответственно. Мы докажем только утверждение про σ-касательную справа, ибо утверждение про σ-касательную слева доказывается аналогично. Зафиксируем точку $w \in V$. Возьмем произвольную последовательность $V \ni s_\nu \to w + 0$ такую, что

$$\sup_{\nu} \sup_{s \in [w, s_\nu]} \frac{|\gamma(s) - \gamma(w)|}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(w)|} < \infty \tag{28}$$

(такие последовательности существуют, так как по условию леммы 2.9 функция γ не постоянна ни на каком интервале). Из формулы (28), в частности, следует, что

$$\exists C_0 > 0 \ \forall \nu \ \sup_{s \in [w, s_\nu]} \frac{|\gamma_1(s) - \gamma_1(w)|}{|\gamma(s_\nu) - \gamma(w)|} \le C_0. \tag{29}$$

Оценим разность $\gamma_2(s_\nu)-\gamma_2(w)$. По формуле (3) имеем

$$\gamma_2(s_\nu)-\gamma_2(w)=l(s_\nu)\gamma_1(s_\nu)-l(w)\gamma_1(w)-\int\limits_{w}^{s_\nu-0}\gamma_1(s)\,dl(s)$$

$$=l(s_\nu)\gamma_1(s_\nu)-l(w+0)\gamma_1(w)+[l(w+0)-l(w)]\gamma_1(w)-\int\limits_{w}^{s_\nu-0}\gamma_1(s)\,dl(s)$$

$$=l(s_\nu)\gamma_1(s_\nu)-l(w+0)\gamma_1(w)-\int\limits_{w+0}^{s_\nu-0}\gamma_1(s)\,dl(s),$$

где в последнем равенстве интеграл понимается в смысле Лебега — Стилтьеса по открытому интервалу (w,s_ν). Преобразовывая далее это равенство, получаем

$$\gamma_2(s_\nu)-\gamma_2(w)=l(s_\nu)[\gamma_1(s_\nu)-\gamma_1(w)]+[l(s_\nu)-l(w+0)]\gamma_1(w)$$
$$-\int\limits_{w+0}^{s_\nu-0}\gamma_1(s)\,dl(s)=l(s_\nu)[\gamma_1(s_\nu)-\gamma_1(w)]-\int\limits_{w+0}^{s_\nu-0}[\gamma_1(s)-\gamma_1(w)]\,dl(s), \tag{30}$$

где при переходе к последнему равенству мы используем непрерывность слева функции l. Оценим интеграл в полученной формуле. Применяя обычные неравенства для интегралов, а также формулу (29), имеем

$$\left|\int\limits_{w+0}^{s_\nu-0}[\gamma_1(s)-\gamma_1(w)]\,dl(s)\right|\le \operatorname{Var} l|_{(w,s_\nu)}\sup_{s\in(w,s_\nu)}|\gamma_1(s)-\gamma_1(w)|\le\omega_\nu|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|, \tag{31}$$

где $\omega_\nu=C_0\operatorname{Var} l|_{(w,s_\nu)}$. Из того факта, что функция l имеет ограниченную вариацию, вытекает сходимость

$$\omega_\nu\to 0\quad \text{при } \nu\to\infty. \tag{32}$$

Теперь исследуем сходимость направления $\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}$. Используя формулы (30)–(32), имеем

$$\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}=\frac{(\gamma_1(s_\nu)-\gamma_1(w),\gamma_2(s_\nu)-\gamma_2(w))}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}$$
$$=\frac{\gamma_1(s_\nu)-\gamma_1(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}(1,l(s_\nu))+\vec{\omega}_\nu=\alpha_\nu\frac{(1,l(s_\nu))}{|(1,l(s_\nu))|}+\vec{\omega}_\nu, \tag{33}$$

где $\alpha_\nu=\frac{\gamma_1(s_\nu)-\gamma_1(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}|(1,l(s_\nu))|\in\mathbb{R}$, а для вектора $\vec{\omega}_\nu$ справедливо неравенство $|\vec{\omega}_\nu|\le\omega_\nu$. Из того факта, что вектор $\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}$ имеет единичную длину, и из формул (32), (33) вытекает, что $\alpha_\nu\to\pm1$ при $\nu\to\infty$. Тогда по формуле (33) получаем, что

$$\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}\to\pm\frac{(1,l(w+0))}{|(1,l(w+0))|}.$$

Поскольку проективное пространство $\mathbb{R}P^1$ образуется отождествлением ненулевых векторов из $\mathbb{R}^2$, лежащих на одной прямой, проходящей через 0, то направление вектора $\frac{\gamma(s_\nu)-\gamma(w)}{|\gamma(s_\nu)-\gamma(w)|}$ сходится в проективном пространстве $\mathbb{R}P^1$ к направлению вектора $(1,l(w+0))$. Отсюда (ввиду произвольности выбора последовательности $s_\nu\to w+0$, удовлетворяющей условию (28)) получаем, что существует σ-касательная справа в точке w, параллельная вектору $(1,l(w+0))$. С учетом сделанных ранее замечаний лемма 2.9 полностью доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
2. *Müller S.* Variational models for microstructure and phase transitions. Leipzig: Max-Plank-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, 1998. (Lecture notes; N 2. http://www.mis.mpg.de/jump/publications.html).
3. *Коробков М. В.* Об одном аналоге теоремы Сарда для C^1-гладких функций двух переменных // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1083–1091.
4. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* Об изэнтропических решениях квазилинейных уравнений первого порядка // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 5. С. 99–124.
5. *Коробков М. В., Панов Е. Ю.* О необходимых и достаточных условиях на кривую для того, чтобы она являлась множеством значений градиента C^1-гладкой функции // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 38, № 4. С. 789–810.
6. *Kolar J., Kristensen J.* Gradient ranges of bumps on the plane // Proc. Amer. Math. Soc. 2005. V. 133, N 5. P. 1699–1706.
7. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. II.
8. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966. Т. I.
9. *Хирш М.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.

Статья поступила 2 февраля 2006 г.

Коробков Михаил Вячеславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090
korob@math.nsc.ru