Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.54:517.813.52

СЛЕДЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА НА МНОЖЕСТВАХ АЛЬФОРСА ГРУПП КАРНО

С. К. Водопьянов, И. М. Пупышев

Аннотация. Доказана обратная теорема о следах функций из пространств Соболева W_p^l, заданных на группе Карно, на регулярных замкнутых подмножествах, называемых d-множествами Альфорса (прямая теорема о следах получена в другой работе авторов). Теорема обобщает результаты А. Йонссона и Х. Валлина для функций классов Соболева в евклидовом пространстве. В качестве следствия приводится теорема о граничных значениях функций из пространств Соболева, заданных в области с гладкой границей на двухступенчатой группе Карно. Рассматривается пример применения полученных теорем к разрешимости краевой задачи для одного уравнения с частными производными.

Ключевые слова: группа Карно, пространство Соболева, теорема вложения, след функции, продолжение функций, теорема Уитни.

Введение

Интенсивное развитие теории субэллиптических уравнений стимулирует развитие теории пространств Соболева в неголономной геометрии. В частности, вопросы корректной постановки и разрешимости краевых задач для субэллиптических уравнений приводят к задаче описания следов пространств Соболева на группах Карно. Основная цель настоящей работы — доказать следующее утверждение.

Теорема 0.1. *Пусть F — d-множество Альфорса с d-мерой μ на группе Карно $\mathbb{G}$ хаусдорфовой размерности Q, $0 < d < Q$. Пусть $1 < p < \infty$, $l > 0$ целое и $\beta = l - (Q-d)/p > 0$ нецелое. Тогда*

$$W_p^l(\mathbb{G})\big|_F = B_{p,\mu}^{\beta}(F).$$

Операторы следа и продолжения линейные и ограниченные.

Один из первых результатов, связанных с описанием следов функций классов Соболева на группах Карно, получен в работе Дерриджи [1].

В [2] Даниелли, Гарофало и Нхеу изучают следы функций из пространства $W_p^1(\Omega)$, $1 < p < \infty$, где Ω — область в пространстве Карно — Каратеодори, на множествах Альфорса. Они доказывают теоремы о следах и продолжении, а также приводят примеры множеств Альфорса на группах Карно, определяя

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 06–01–00735) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (код проекта НШ–8526.2006.1).

соответствующую меру Альфорса. Так, множеством Альфорса будет граница области Ω класса C^2 двухступенчатой группы Карно, если рассмотреть на ней определенную специальным образом периметрическую меру. В качестве следствия в [2] получена теорема о граничных значениях функций из пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$, где Ω — ограниченная область класса C^2 двухступенчатой группы Карно. В работе [3] доказано, что это утверждение верно и для областей класса $C^{1,1}$.

В работе [4] доказана теорема о следах функций из пространств Соболева $W_p^l(\mathbb{G})$ ($1 < p < \infty$, $l > 0$ целое) и бесселевых потенциалов L_p^α, $\alpha > 0$, определенных на всей группе Карно $\mathbb{G}$, на d-множествах Альфорса. В ней утверждается ограниченность оператора следа $\mathrm{tr} : W_p^l(\mathbb{G}) \to B_p^\beta(F)$, где $B_p^\beta(F)$ — обобщенное пространство Бесова на множестве Альфорса F.

В данной работе мы доказываем обратимость этой характеристики для функций из пространств Соболева в теореме 2.2 о продолжении функций с множества Альфорса на всю группу Карно. Мы продолжаем исследования, начатые в работах [4–7]. Основные результаты работы сформулированы в [8].

Из теоремы 2.2 и теоремы о следах в [4] непосредственно следует обратимая характеристика следов функций из пространства $W_p^l(\mathbb{G})$ (теорема 0.1).

В качестве следствия из теоремы 0.1 и теоремы о продолжении функций классов Соболева, определенных в областях с гладкими границами, за границу области (см. [7]) мы получаем теорему 3.1 о граничных значениях функций из пространств Соболева $W_p^l(\Omega)$ в ограниченной области Ω с границей класса C^2 на двухступенчатой группе Карно.

Приводится пример применения доказанных теорем о следах к вопросам разрешимости краевой задачи для одного уравнения с частными производными.

Настоящей работе предшествует длинная история развития теорем вложения разных размерностей в евклидовых пространствах. Не претендуя на полноту, укажем здесь работы [9–16], в которых отражены основные этапы теории и история вопроса.

1. Обозначения и предварительные сведения

Определение группы Карно можно найти в [17]. Мы приведем основные обозначения, используемые в работе (более подробно см. [4, 6]).

Группой Карно называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ с нильпотентной и градуированной алгеброй Ли $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. Пусть $\mathbf{N}$ — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \ldots, X_{\mathbf{N}}$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если $X_i \in V_{d_i}$, то число d_i называется *степенью поля* X_i. Хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ равна $Q = \sum\limits_{i=1}^{\mathbf{N}} d_i$.

Если $I = (i_1, \ldots, i_{\mathbf{N}})$ — мультииндекс, то через X^I мы обозначаем дифференциальный оператор $X^I = X_1^{i_1} \ldots X_{\mathbf{N}}^{i_{\mathbf{N}}}$, где $|I| = i_1 + \cdots + i_{\mathbf{N}}$, а $d(I) = d_1 i_1 + \cdots + d_{\mathbf{N}} i_{\mathbf{N}}$ — однородный порядок оператора.

Однородная норма ρ — это гладкая на $\mathbb{G} \setminus \{0\}$ функция, удовлетворяющая аксиомам квазинормы, в частности, обобщенному неравенству треугольника: $\rho(xy) \le \kappa(\rho(x) + \rho(y))$, где $\kappa \ge 1$. Мы будем обозначать через $B(x, r) = \{y : \rho(y^{-1}x) < r\}$ и $\overline{B}(x, r) = \{y : \rho(y^{-1}x) \le r\}$ соответственно открытый и замкнутый шары в норме ρ.

Экспоненциальное отображение $x = \exp \sum\limits_{i=1}^{\mathbf{N}} x_i X_i$ будет диффеоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ на группу $\mathbb{G}$, посредством которого объекты, определенные на алгебре, переносятся на группу. С его помощью на группе $\mathbb{G}$ определяются координатные функции $\eta_i(x) = x_i$, $i = 1, \dots, \mathbf{N}$, для которых справедлива оценка $|\eta_i(x)| \leq \rho(x)^{d_i}$. Выражение $\eta^I = \eta_1^{i_1} \dots \eta_{\mathbf{N}}^{i_{\mathbf{N}}}$ будем называть *мономом однородной степени* $d(I)$, а линейную комбинацию таких мономов — *многочленом* соответствующей однородной степени. Очевидно, $|\eta^I(x)| \leq \rho(x)^{d(I)}$.

Экспоненциальное отображение позволяет перенести стандартную $\mathbf{N}$-мерную меру Лебега с алгебры $\mathfrak{g}$ на группу $\mathbb{G}$ (см. [17]). Полученная мера, которую будем обозначать через $\operatorname{mes}(\cdot)$ или dx, будет биинвариантной мерой Хаара. Для любых $x \in \mathbb{G}$ и $r > 0$ справедливо равенство $\operatorname{mes} B(x, r) = \operatorname{mes} \overline{B}(x, r) = r^Q$.

Пространство $L_p(\mathbb{G})$ или $L_p(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{G}$ — область) определяется стандартным образом, и норму в этом пространстве будем обозначать через $\|\cdot\|_{L_p(\mathbb{G})}$ или $\|\cdot\|_p$ (соответственно $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ или $\|\cdot\|_{p,\Omega}$).

Определим пространство Соболева функций, заданных на всей группе Карно $\mathbb{G}$ или в области $\Omega \subset \mathbb{G}$.

Определение 1.1. Пусть функции f и g локально суммируемы в области $\Omega \subset \mathbb{G}$. Функция g называется *обобщенной производной* $X^J f$ функции f в области Ω, если для любой функции φ класса $C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\int\limits_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_\Omega f(x)(X^J)^*\varphi(x)\,dx,$$

где для оператора $X^J = X_1^{j_1} \dots X_{\mathbf{N}}^{j_{\mathbf{N}}}$ мы обозначили символом $(X^J)^*$ сопряженный ему оператор $(X^J)^* = (-1)^{|J|} X_{\mathbf{N}}^{j_{\mathbf{N}}} \dots X_1^{j_1}$.

Определение 1.2. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, а $l > 0$ — целое число. Функция f, заданная в области $\Omega \subset \mathbb{G}$, *принадлежит пространству Соболева* $W_p^l(\Omega)$, если для всех $d(J) \leq l$ в Ω существуют обобщенные производные $X^J f$ и конечна норма $\|f\|_{W_p^l(\Omega)} = \sum\limits_{d(J) \leq l} \|X^J f\|_{L_p(\Omega)}$.

Если $\Omega = \mathbb{G}$, то получаем пространство Соболева $W_p^l(\mathbb{G})$ функций, определенных на всей группе Карно $\mathbb{G}$.

Мы изучаем следы функций из пространств $W_p^l(\mathbb{G})$ на замкнутых множествах с некоторыми условиями регулярности, называемых d-множествами Альфорса.

Определение 1.3. Пусть $0 < d < Q$. Замкнутое множество F называется *d-множеством Альфорса*, если существует такая мера μ, заданная на F, что для некоторого $r_0 > 0$ имеем

$$\mu(\overline{B}(x, r)) \leq C_1 r^d, \ x \in \mathbb{G}, \ r \leq r_0, \quad \mu(\overline{B}(x, r)) \geq C_2 r^d, \ x \in F, \ r \leq r_0, \tag{1.1}$$

где C_1 и C_2 — константы. Константу r_0 можно взять сколь угодно большой, в зависимости от этого лишь изменятся константы C_1 и C_2. Кроме того, замкнутый шар в определении можно заменить открытым.

Простым примером d-множеств Альфорса на группах Карно являются гиперплоскости $\eta_i(x) = C$ (здесь $d = Q - d_i$). Нетривиальные примеры приведены в работе [2]. Там доказано, что $(Q-1)$-множеством Альфорса будет граница любой ограниченной области класса C^2 на двухступенчатой группе Карно.

В [4] доказана следующая лемма об интегрировании по d-мере Альфорса.

Лемма 1.1. *Пусть μ — d-мера Альфорса. Тогда*

$$\int\limits_{\rho(x^{-1}t)\le a} \rho(x^{-1}t)^{-\gamma}\,d\mu(t) \le Ca^{d-\gamma}, \quad d>\gamma,\ a\le r_0;$$

$$\int\limits_{a<\rho(x^{-1}t)\le b} \rho(x^{-1}t)^{-\gamma}\,d\mu(t) \le Ca^{d-\gamma}, \quad d<\gamma,\ b\le r_0.$$

Здесь C — константа, зависящая только от C_1 в (1.1), γ и d.

Определение 1.4. Пусть F — d-множество Альфорса, μ — d-мера на нем, $1\le p<\infty$ и $k<\beta<k+1$, где $k\ge 0$ целое. Набор функций $\{f_J\}$, $d(J)\le k$, определенных μ-п. в., *принадлежит обобщенному пространству Бесова* $B^{\beta}_{p,\mu}(F)$, если конечна норма

$$\|\{f_J\}\|_{B^{\beta}_{p,\mu}(F)} = \sum_{d(J)\le k}\left(\|f_J\|_{p,\mu} + \left(\iint\limits_{\rho(y^{-1}x)<1} \frac{|r_J(x,y)|^p\,d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(y^{-1}x)^{d+(\beta-d(J))p}}\right)^{1/p}\right),$$

где $r_J(x,y)=f_J(x)-P_J(x,y)$, а

$$P_J(x,y) = \sum_{d(J)+d(L)\le k}\Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J)+d(K)}\gamma_{KJS}f_S(y)\Bigg)\frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}, \quad y\in F,\ x\in\mathbb{G}, \tag{1.2}$$

— многочлен тейлоровского типа, построенный по набору $\{f_J\}$ (см. [6]). Здесь β_{LK} и γ_{KJS} — константы, зависящие от характеристик группы $\mathbb{G}$. При $J=0$ обозначим

$$P(x,y)=P_0(x,y)=\sum_{d(L)\le k}\Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}f_K(y)\Bigg)\frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}, \quad y\in F,\ x\in\mathbb{G},$$

и $r(x,y)=r_0(x,y)=f_0(x)-P(x,y)=f(x)-P(x,y)$.

Далее через C, C_1, C_2 и т. д. будем обозначать, вообще говоря, различные константы, зависящие от Q, d, меры μ, геометрических и алгебраических характеристик группы $\mathbb{G}$ и показателей дифференцируемости и суммируемости рассматриваемых функциональных пространств.

2. Теорема о продолжении

В работе [4] доказана следующая теорема о следах функций классов Соболева на группах Карно.

Теорема 2.1 (о следах). *Пусть $1<p<\infty$, $l>0$ — целое число, $0<d<Q$, $\beta=l-(Q-d)/p$, $k<\beta<k+1$, где $k\ge 0$ — целое число, и пусть μ — d-мера на множестве Альфорса F. Тогда для всех $f\in W^l_p(\mathbb{G})$*

$$\|\{X^Jf|_F\}_{d(J)\le k}\|_{B^{\beta}_{p,\mu}(F)} \le C\|f\|_{W^l_p(\mathbb{G})},$$

где производные X^Jf определены μ-п. в. для $d(J)\le k$, а константа C зависит только от l, β, μ, d, p, Q и геометрических и алгебраических характеристик группы $\mathbb{G}$.

Мы покажем, что данная характеристика следов обратима. Это вытекает из следующей теоремы о продолжении функций классов Соболева.

Теорема 2.2 (о продолжении). *Пусть $1 \le p < \infty$, пусть l, β, d и k такие же, как в теореме 2.1. Пусть F — d-множество Альфорса с d-мерой μ. Тогда существует линейный оператор $E : B^{\beta}_{p,\mu}(F) \to W^{l}_{p}(\mathbb{G})$ такой, что для любого набора функций $f = \{f_J\}_{d(J)\le k} \in B^{\beta}_{p,\mu}(F)$*

1) $\|Ef\|_{W^l_p(\mathbb{G})} \le C\|f\|_{B^{\beta}_{p,\mu}(F)}$, *где C зависит только от l, β, μ, d, p, Q и характеристик группы $\mathbb{G}$;*

2) *Ef — продолжение f в том смысле, что функции $X^J(Ef)$ совпадают μ-п. в. с f_J для $d(J) \le k$.*

2.1. Декомпозиция Уитни и оператор продолжения. Для построения оператора продолжения E нам понадобятся декомпозиция Уитни и связанное с ней разбиение единицы.

Лемма 2.1. *Для открытого множества ${}^cF$ с непустой границей существует набор шаров $B_i = B(x_i, r_i)$ со следующими свойствами.*

1. *${}^cF = \bigcup\limits_i B_i$.*

2. *Существует такое целое число N_0, что в каждой точке $x \in {}^cF$ пересекаются не более N_0 шаров B_i.*

3. *Существуют такие константы K_1 и K_2, $2\kappa^2 < K_1 < K_2$, $K_2 > 2$, что $K_1 r_i \le d(x_i, F) \le K_2 r_i$,* где $d(x_i,F) = \inf\limits_{y\in F} \rho(y^{-1}x_i)$ *— расстояние от точки x_i до множества F.*

4. *Существует такая константа K_3, что для любых шаров B_i и B_j таких, что $B_i \cap B_j \ne \varnothing$, верно $\frac{1}{K_3} r_i \le r_j \le K_3 r_i$.*

5. *Существует такая константа $K_4 > 1$, что $B\big(x_i, \frac{r_i}{K_4}\big) \cap B\big(x_j, \frac{r_j}{K_4}\big) = \varnothing$ для любых $i \ne j$.*

6. *Существует разбиение единицы $\{\varphi_i\}$,* где *$\varphi_i \in C^\infty$ и $\operatorname{supp}\varphi_i \subset B_i$, такое, что $\sum\limits_i \varphi_i(x) = 1$ и $|X^J\varphi_i(x)| \le C_J/r_i^{d(J)}$ при $x \in {}^cF$.*

Лемма 2.1 доказана в [6] (см. также лемму 5 в статье [18]).

Оператор продолжения определим следующей формулой:

$$E'f(x) = E'\{f_J\}_{d(J)\le k} = \begin{cases} \sum\limits_i \varphi_i(x) c_i \displaystyle\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} P(x,t)\, d\mu(t), & x \in {}^cF; \\ f_0(x), & x \in F. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $c_i = 1/\mu(\overline{B}(x_i, Ar_i))$, а $A = \kappa(K_2+1)$ выбрано так, что для x_i существует точка $p_i \in F$ такая, что $\overline{B}(p_i, r_i) \subset \overline{B}(x_i, Ar_i)$. (Действительно, из свойства 3 разбиения Уитни следует, что существует точка $p_i \in F$ такая, что $\rho\big(x_i^{-1}p_i\big) \le K_2 r_i$. Если $\rho\big(p_i^{-1}x\big) \le r_i$, то $\rho\big(x_i^{-1}x\big) \le \kappa\big(\rho(p_i^{-1}x) + \rho\big(x_i^{-1}p_i\big)\big) \le \kappa(K_2+1)r_i = Ar_i$, т. е. $\overline{B}(p_i, r_i) \subset \overline{B}(x_i, Ar_i)$.) Из (1.1) следует, что $\mu(\overline{B}(x_i, Ar_i)) \ge \mu(\overline{B}(p_i, r_i)) \ge C_2 r_i^d$, если $r_i \le r_0$. Тогда

$$c_i \le C_2^{-1} r_i^{-d}, \quad r_i \le r_0. \tag{2.2}$$

Суммирование в (2.1) фактически ведется только по тем i, для которых $x \in B_i$, т. е. для каждого x сумма содержит не более N_0 слагаемых.

Рассмотрим функцию φ класса C^∞ такую, что $|X^J\varphi| \le C$ для всех J и $\varphi(x) = 1$ при $d(x,F) \le 2^M - 1$, $\varphi(x) = 0$ при $d(x,F) \ge 2^M$, где M — некоторое целое число. Тогда оператор продолжения в теореме 2.2 определяется формулой

$$Ef(x) = \varphi(x)E'f(x).$$

Далее будем обозначать $E'f$ через f, так что $Ef(x) = \varphi(x)f(x)$.

2.2. Леммы. В [6] доказана следующая лемма о многочленах тейлоровского типа, которую мы используем при получении оценок.

Лемма 2.2. *Пусть $F \subset \mathbb{G}$ — замкнутое множество, $\{f_J\}_{d(J)\le k}$ — набор функций, заданных на F, а $P(x,t)$, $P_J(x,t)$ и $r_J(x,t)$ — функции, определенные равенством* (1.2). *Справедливы следующие соотношения:*

1) $X^J P(x,t) = P_J(x,t)$, $x \in \mathbb{G}$, $t \in F$;

2) $X^S P_J(x,t) = \sum\limits_{d(M)=d(J)+d(S)} \gamma_{SJM} P_M(x,t)$, $x \in \mathbb{G}$, $t \in F$;

3) $P_J(x,t) - P_J(x,s) = \sum\limits_{d(J)+d(L)\le k} \Big(\sum\limits_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum\limits_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} r_S(t,s)\Big)$ $\times \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!}$, $x \in \mathbb{G}$, $t, s \in F$.

Лемма 2.3. *Пусть*

$$J_U(x_i, x_\nu) = \iint\limits_{\substack{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i,\\ \rho(s^{-1}x_\nu)\le A_1 r_\nu}} |r_U(t,s)|^p \, d\mu(t) d\mu(s),$$

где $A_1 = (\kappa A + \kappa^2)K_3 + \kappa^2 + 1$, $\{B_i = B(x_i, r_i)\}$ — набор шаров из леммы 2.1, *и пусть функция $f = E'\{f_J\}$ задана формулой* (2.1). *Пусть $x \in B_I$, $d(x,F) \le 2^M$. Тогда для любого N*

$$|X^J f(x)|^p \le C \sum_{d(U)\le k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} r_N^{-d} J_U(x_I, x_N) + C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |f_U(t)|^p \, d\mu(t).$$

В частности, $|X^J f(x)|^p \le C \sum\limits_{d(U)\le k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} r_N^{-d} J_U(x_I, x_N)$ при $d(J) > k$.

Доказательство. Ограниченность расстояния $d(x,F)$ требуется для того, чтобы не заботиться о выборе константы r_0, которую в этом случае можно считать сколь угодно большой.

Из (2.1) и утверждения 1 леммы 2.2 следует, что

$$\begin{gathered} X^J f(x) = A_J(x) + \sum_{\substack{J'\ne 0,\\ J'+J''=J}} C_{J',J''} B_{J'}(x), \quad \text{где} \\ A_J(x) = \sum_i \varphi_i(x)\, c_i \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} P_J(x,t)\, d\mu(t), \\ B_{J'}(x) = \sum_i X^{J'}\varphi_i(x)\, c_i \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} P_{J''}(x,t)\, d\mu(t). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Так как $\sum\limits_i X^{J'}\varphi_i(x) \equiv 0$, то

$$B_{J'}(x) = \sum_i X^{J'}\varphi_i(x)\, c_i \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} (P_{J''}(x,t) - P_{J''}(x,s))\, d\mu(t).$$

Применим неравенство Гёльдера и используем свойство 6 разбиения Уитни:

$$|B_{J'}(x)| \le C \sum_i |X^{J'}\varphi_i(x)|\; c_i \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} |P_{J''}(x,t) - P_{J''}(x,s)|^p \, d\mu(t)\Bigg)^{1/p}$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} d\mu(t)\Bigg)^{1-1/p} \le C \sum_i r_i^{-d(J')} c_i^{1/p}$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le Ar_i} |P_{J''}(x,t) - P_{J''}(x,s)|^p \, d\mu(t)\Bigg)^{1/p}.$$

В сумме по i не более N_0 слагаемых, для каждого из которых $r_i \ge r_I/K_3$, и, следовательно, $r_i^{-d(J')} \le C r_I^{-d(J')}$, $c_i \le C_2^{-1} r_i^{-d} \le C r_I^{-d}$, $\rho(t^{-1}x_I) \le \kappa\big(\rho(t^{-1}x_i) + \rho\big(x_i^{-1}x_I\big)\big) \le \kappa(Ar_i + \kappa(r_i + r_I)) = (\kappa A + \kappa^2) r_i + \kappa^2 r_I \le ((\kappa A + \kappa^2)K_3 + \kappa^2) r_I < A_1 r_I$, где $A_1 = (\kappa A + \kappa^2)K_3 + \kappa^2 + 1$. Используя утверждение 3 леммы 2.2, получаем

$$|B_{J'}(x)|^p \le C r_I^{-d(J')p-d} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |P_{J''}(x,t) - P_{J''}(x,s)|^p \, d\mu(t)\Bigg)$$
$$\le C \sum_{d(J'')+d(L)\le k} \; \sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \; \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \beta_{LK}\; \gamma_{KJS}\; r_I^{-d(J')p-d}$$
$$\times \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |r_S(t,s)|^p |\eta^L(t^{-1}x)|^p \, d\mu(t)\Bigg)$$
$$\le C \sum_{L,K,S} r_I^{-d(J')p+d(L)p-d} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |r_S(t,s)|^p \, d\mu(t)\Bigg).$$

Здесь $|\eta^L(t^{-1}x)|^p \le C\rho(t^{-1}x)^{d(L)p} \le C r_I^{d(L)p}$, так как $\rho(t^{-1}x) \le \kappa(\rho(x^{-1}x_I) + \rho(t^{-1}x_I)) \le \kappa(A_1+1) r_I$. Далее, учитывая то, что $d(J') = d(J) - d(J'') = d(J) - (d(S) - d(K)) = d(J) - d(S) + d(L)$, $-d - d(J')p + d(L)p = -d - d(J)p + d(S)p$ и $d(S) = d(J'') + d(K) = d(J'') + d(L) \le k$, поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{J'\ne 0} |B_{J'}(x)|^p \le C \sum_{d(S)\le k} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |r_S(t,s)|^p \, d\mu(t)\Bigg) r_I^{(d(S)-d(J))p-d} \sum_{J',L,K} 1$$
$$\le C \sum_{d(U)\le k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I} |r_U(t,s)|^p \, d\mu(t).$$

Интегрируя обе части неравенства по шару $\overline{B}(x_N, A_1 r_N)$ относительно меры $d\mu(s)$, получим

$$\sum_{J'\ne 0} |B_{J'}(x)|^p \int\limits_{\rho(s^{-1}x_N)\le A_1 r_N} d\mu(s)$$
$$\le C \sum_{d(U)\le k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} \iint\limits_{\substack{\rho(t^{-1}x_I)\le A_1 r_I,\\ \rho(s^{-1}x_N)\le A_1 r_N}} |r_U(t,s)|^p \, d\mu(t) d\mu(s).$$

Разделим обе части неравенства на $\mu(\overline{B}(x_N, A_1 r_N)) \geq C r_N^d$ (это выполняется согласно (1.1) и (2.2)). Получим

$$\sum_{J'\neq 0} |B_{J'}(x)|^p \leq C \sum_{d(U)\leq k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} r_N^{-d} \iint\limits_{\substack{\rho(t^{-1}x_I)\leq A_1 r_I,\\ \rho(s^{-1}x_N)\leq A_1 r_N}} |r_U(t,s)|^p \, d\mu(t) d\mu(s). \tag{2.4}$$

Оценим $A_J(x)$. Заметим, что $P_J \equiv 0$ при $d(J) > k$ (поскольку P — многочлен однородной степени k), следовательно, и $A_J = 0$ в этом случае. Пусть $d(J) \leq k$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера, из определения многочлена P_J (см. (1.2)) получаем

$$|A_J(x)| \leq C \sum_i c_i \sum_{d(J)+d(L)\leq k} \sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\leq|L|}} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A r_i} |\eta^L(t^{-1}x)|$$

$$\times |f_S(t)| \, d\mu(t) \leq C \sum_i \sum_{L,K,S} c_i r_i^{d(L)} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A r_i} |f_S(t)| \, d\mu(t)$$

$$\leq C \sum_i \sum_{L,K,S} c_i r_i^{d(L)} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A r_i} |f_S(t)|^p \, d\mu(t) \Bigg)^{1/p} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A r_i} d\mu(t) \Bigg)^{1-1/p}$$

$$\leq C \sum_{d(J)\leq d(S)\leq k} \sum_i c_i^{1/p} r_i^{d(S)-d(J)} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A r_i} |f_S(t)|^p \, d\mu(t) \Bigg)^{1/p} \sum_{L,K} 1.$$

Здесь мы использовали то, что $|\eta^L(t^{-1}x)| \leq C\rho(t^{-1}x)^{d(L)} \leq C r_i^{d(L)}$ (так как $\rho(t^{-1}x) \leq \kappa(\rho(t^{-1}x_i) + \rho(x^{-1}x_i)) \leq \kappa(A+1) r_i$), а также то, что $d(S) = d(J) + d(L)$. Далее, сумма по i содержит не более N_0 слагаемых, в каждом из которых $c_i \leq C r_I^{-d}$, $r_i^{d(S)-d(J)} \leq C r_I^{d(S)-d(J)}$, и $\rho(t^{-1}x_I) \leq A_1 r_I$. Таким образом,

$$|A_J(x)| \leq C \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} r_I^{-d/p+d(U)-d(J)} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\leq A_1 r_I} |f_U(t)|^p \, d\mu(t) \Bigg)^{1/p},$$

$$|A_J(x)|^p \leq C \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} r_I^{-d+(d(U)-d(J))p} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\leq A_1 r_I} |f_U(t)|^p \, d\mu(t).$$

Отсюда и из (2.4) следует, что

$$|X^J f(x)|^p \leq C\Big(|A_J(x)| + \sum_{J'} |B_{J'}(x)|\Big)^p \leq C\Big(|A_J(x)|^p + \sum_{J'} |B_{J'}(x)|^p\Big)$$

$$\leq C \sum_{d(U)\leq k} r_I^{(d(U)-d(J))p-d} r_N^{-d} J_U(x_I, x_N)$$

$$+ C \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} r_I^{-d+(d(U)-d(J))p} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_I)\leq A_1 r_I} |f_U(t)|^p \, d\mu(t),$$

причем вторая сумма равна 0, если $d(J) > k$. Лемма доказана.

Обозначим $h_I = 2^{-I}$, где I целое, и пусть $\Delta_I = \{x : h_{I+1} \leq d(x,F) < h_I\}$. Если i и I таковы, что $B_i \cap \Delta_I \neq \varnothing$, то справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\kappa(K_2+1)} h_I \leq r_i \leq \frac{\kappa}{K_1 - \kappa} h_I. \tag{2.5}$$

Действительно, для $x \in B_i \cap \Delta_I$ имеем $K_1 r_i \le d(x_i, F) \le K_2 r_i$. Тогда $d(x, F) \le \kappa\big(d(x_i, F) + \rho\big(x_i^{-1}x\big)\big) \le \kappa(K_2 + 1)r_i$. С другой стороны, $K_1 r_i \le d(x_i, F) \le \kappa\big(d(x, F) + \rho\big(x_i^{-1}x\big)\big) \le \kappa(d(x, F) + r_i)$. Следовательно, $(K_1 - \kappa)r_i \le \kappa d(x, F)$ и $d(x, F) \ge \frac{K_1-\kappa}{\kappa} r_i$. Поскольку $x \in \Delta_I$, то $\frac{K_1-\kappa}{\kappa} r_i \le d(x, F) \le \kappa(K_2 + 1)r_i$, $h_I/2 \le d(x, F) \le h_I$, т. е. $\frac{K_1-\kappa}{\kappa} r_i \le h_I$ и $h_I/2 \le \kappa(K_2 + 1)r_i$, откуда следует (2.5).

Лемма 2.4. *Пусть $a > 0$, $h(t) \ge 0$ — функция на F, $h_I = 2^{-I}$. Пусть*

$$g(x) = \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i) \le a r_i} h(t)\, d\mu(t),$$

если $x \in B_i \cap \Delta_I$, $\rho(x^{-1}x_i) = \min\limits_{j: x \in B_j} \rho(x^{-1}x_j)$. Тогда для $x_0 \in \mathbb{G}$, $0 < r \le \infty$ имеем

$$\int\limits_{\substack{x \in \Delta_I, \\ \rho(x^{-1}x_0) \le r}} g(x)\, dx \le C h_I^Q \int\limits_{\rho(t^{-1}x_0) \le \kappa^2 r + \frac{(\kappa^2 + a)\kappa}{K_1 - \kappa} h_I} h(t)\, d\mu(t).$$

В частности, при $r = +\infty$

$$\int\limits_{x \in \Delta_I} g(x)\, dx \le C h_I^Q \int h(t)\, d\mu(t).$$

Константа C зависит только от a, Q и характеристик группы $\mathbb{G}$.

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{I} = \{i : B_i \cap \Delta_I \cap \overline{B}(x_0, r) \ne \varnothing\}$. Тогда, используя (2.5), получаем

$$\int\limits_{\substack{x \in \Delta_I, \\ \rho(x^{-1}x_0) \le r}} g(x)\, dx \le C \sum_{i \in \mathfrak{I}} \int\limits_{B_i \cap \Delta_I} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i) \le a r_i} h(t)\, d\mu(t) \Bigg) dx$$

$$\le C \sum_{i \in \mathfrak{I}} \int\limits_{B_i \cap \Delta_I} dx \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i) \le \frac{a\kappa}{K_1 - \kappa} h_I} h(t)\, d\mu(t) \le C \sum_{i \in \mathfrak{I}} h_I^Q \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i) \le \frac{a\kappa}{K_1 - \kappa} h_I} h(t)\, d\mu(t), \qquad (2.6)$$

поскольку $\int\limits_{B_i \cap \Delta_I} dx \le \operatorname{mes} B_i \le C r_i^Q \le C h_I^Q$.

Докажем, что существует целое m, зависящее только от a, Q и характеристик группы $\mathbb{G}$, такое, что произвольная точка $x \in \mathbb{G}$ содержится не более чем в m замкнутых шарах $\overline{B}\big(x_i, \frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I\big)$, $i \in \mathfrak{I}$.

Пусть это не так и для каждого m существуют точка $x \in \mathbb{G}$ и $i_1, \dots, i_m \in \mathfrak{I}$ такие, что $\rho(x^{-1}x_{i_1}) \le \frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I, \dots, \rho(x^{-1}x_{i_m}) \le \frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I$. Согласно свойству 5 разбиения Уитни шары $B(x_{i_j}, r_{i_j}/K_4)$ попарно не пересекаются. Из (2.5) следует, что $\frac{h_I}{2\kappa K_4(K_2+1)} \le \frac{r_{i_j}}{K_4}$, т. е. шары $B_{i_j} = B\big(x_{i_j}, \frac{h_I}{2\kappa K_4(K_2+1)}\big) = B(x_{i_j}, C' h_I)$ также попарно не пересекаются. Поскольку $x_{i_1}, \dots, x_{i_m} \in \overline{B}\big(x, \frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I\big)$, то $\bigcup\limits_{j=1}^m \overline{B}_{i_j} \subset \overline{B}(x, C'' h_I)$, где $C'' = \kappa\big(\frac{a\kappa}{K_1-\kappa} + \frac{1}{2\kappa K_4(K_2+1)}\big)$. Действительно, пусть $y \in \overline{B}_{i_j}$, т. е. $\rho(y^{-1}x_{i_j}) \le \frac{h_I}{2\kappa K_4(K_2+1)}$. Тогда $\rho(y^{-1}x) \le \kappa(\rho(y^{-1}x_{i_j}) + \rho(x^{-1}x_{i_j})) \le \kappa\big(\frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I + \frac{h_I}{2\kappa K_4(K_2+1)}\big) = C'' h_I$. Отсюда следует, что $m(C' h_I)^Q = \sum\limits_{j=1}^m \operatorname{mes} \overline{B}_{i_j} =$

$\operatorname{mes} \bigcup_{j=1}^{m} \overline{B}_{i_j} \le \operatorname{mes} \overline{B}(x, C'' h_I) = (C'' h_I)^Q$. Таким образом, $m h_I^Q \le C h_I^Q$, т. е. $m \le C$. Получили противоречие, потому что m произвольно, а C не должно зависеть от m.

При этом в интеграле по t в (2.6) $\rho(t^{-1}x_0) \le \kappa\big(\rho\big(x_0^{-1}x_i\big) + \rho(t^{-1}x_i)\big) \le \kappa\big(\kappa(r_i + r) + \frac{a\kappa}{K_1-\kappa} h_I\big) \le \kappa^2 r + \frac{\kappa^2\kappa}{K_1-\kappa} h_I + \frac{\kappa^2 a}{K_1-\kappa} h_I = \kappa^2 r + \frac{(\kappa^2+a)\kappa}{K_1-\kappa} h_I$. Мы использовали соотношение(2.5) и то, что $B_i \cap \overline{B}(x_0, r) \ne \varnothing$. Подставляя в (2.6), получим

$$\int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(x^{-1}x_0)\le r}} g(x)\,dx \le C h_I^Q \int\limits_{\rho(t^{-1}x_0)\le \kappa^2 r + \frac{(\kappa^2+a)\kappa}{K_1-\kappa} h_I} h(t)\,d\mu(t).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Обозначим* $J_U^a(x_i, x_\nu) = \iint\limits_{\substack{\rho(t^{-1}x_i)\le a r_i,\\ \rho(s^{-1}x_\nu)\le a r_\nu}} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$, *т. е.* $J_U \equiv J_U^{A_1}$. *Пусть* F, μ, p *и набор функций* $\{f_J\}$ *удовлетворяют условиям леммы* 2.3. *Если* $g(x) = J_U^a(x_i, x_i)$ *для* $x \in B_i \cap \Delta_I$, *где* $\rho(x^{-1}x_i) = \min\limits_{j:\, x\in B_j} \rho(x^{-1}x_j)$, *то*

$$\int\limits_{x\in\Delta_I} g(x)\,dx \le C h_I^Q \iint\limits_{\rho(s^{-1}t)\le \frac{2\kappa^2 a}{K_1-\kappa} h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} g(x) &= \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le a r_i} \Bigg(\int\limits_{\rho(s^{-1}x_i)\le a r_i} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg) d\mu(t) \\ &\le \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le a r_i} \Bigg(\int\limits_{\rho(s^{-1}t)\le \frac{2\kappa^2 a}{K_1-\kappa} h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg) d\mu(t) = \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le a r_i} h(t)\,d\mu(t), \end{aligned}$$

для $x \in B_i \cap \Delta_I$, $\rho(x^{-1}x_i) = \min\limits_{j: x\in B_j} \rho(x^{-1}x_j)$. Мы использовали то, что в интеграле по $d\mu(s)$ согласно (2.5) $\rho(s^{-1}t) \le \kappa(\rho(s^{-1}x_i) + \rho(t^{-1}x_i)) \le 2\kappa a r_i \le \frac{2\kappa^2 a}{K_1-\kappa} h_I$. Применяя лемму 2.4 с $r = +\infty$, получаем

$$\int\limits_{x\in\Delta_I} g(x)\,dx \le C h_I^Q \int h(t)\,d\mu(t) = C h_I^Q \iint\limits_{\rho(s^{-1}t)\le \frac{2\kappa^2 a}{K_1-\kappa} h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s).$$

Лемма доказана.

Предложение 2.1. *Пусть* F — d*-множество Альфорса,* μ — d*-мера на нем,* $1 \le p < \infty$ *и* $k < \beta < k+1$, *где* $k \ge 0$ *целое. Набор функций* $\{f_J\}$, $d(J) \le k$, *определенных* μ*-п. в., принадлежит обобщенному пространству Бесова* $B_{p,\mu}^\beta(F)$ *тогда и только тогда, когда конечна норма*

$$\|\{f_J\}\|^*_{B_{p,\mu}^\beta(F)} = \sum_{d(J)\le k} \Bigg(\|f_J\|_{p,\mu} + \Bigg(\iint\limits_{\rho(y^{-1}x)<a} \frac{|r_J(x,y)|^p\,d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(y^{-1}x)^{d+(\beta-d(J))p}} \Bigg)^{1/p} \Bigg),$$

где $1 < a < r_0$ *произвольно. Норма* $\|\{f_J\}\|^*_{B^\beta_{p,\mu}(F)}$ *эквивалентна* $\|\{f_J\}\|_{B^\beta_{p,\mu}(F)}$.

Доказательство. Действительно,

$$\iint\limits_{1\le\rho(y^{-1}x)<a} \frac{|r_J(x,y)|^p\,d\mu(x)d\mu(y)}{\rho(y^{-1}x)^{d+(\beta-d(J))p}} = \iint\limits_{1\le\rho(y^{-1}x)<a} \rho(y^{-1}x)^{-d-(\beta-d(J))p}$$

$$\times\left|f_J(x) - \sum_{d(J)+d(L)\le k}\Bigl(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J)+d(K)}\gamma_{KJS}f_S(y)\Bigr)\frac{\eta^L(y^{-1}x)}{L!}\right|^p d\mu(x)d\mu(y)$$

$$\le C\int|f_J(x)|^p\Biggl[\int\limits_{1\le\rho(y^{-1}x)<a}\frac{d\mu(y)}{\rho(y^{-1}x)^{d+(\beta-d(J))p}}\Biggr]d\mu(x)$$

$$+\,C\sum_{L,K,S}\int|f_S(y)|^p\Biggl[\int\limits_{1\le\rho(y^{-1}x)<a}\frac{|\eta^L(y^{-1}x)|^p\,d\mu(x)}{\rho(y^{-1}x)^{d+(\beta-d(J))p}}\Biggr]d\mu(y)$$

$$\le C\Bigl(\|f_J\|^p_{p,\mu}+\sum_{L,K,S}\|f_S\|^p_{p,\mu}\Bigr)\le C\|\{f_J\}\|_{B^\beta_{p,\mu}(F)}.$$

Здесь интегралы в квадратных скобках не больше C по лемме 1.1, поскольку в первом из них $(\beta-d(J))p\ge 0$, а во втором $(\beta-d(J)-d(L))p\ge 0$. Предложение доказано.

2.3. Доказательство теоремы о продолжении. Требуется доказать следующие утверждения:

1) имеет место оценка

$$\|X^J(Ef)\|_p\le C\|f\|_{B^\beta_{p,\mu}(F)},\quad d(J)\le l; \tag{2.7}$$

2) $X^J(Ef)$ совпадают с f_J μ-п. в. для всех $d(J)\le k$.

Для доказательства (2.7) достаточно показать, что

$$\int\limits_{d(x,F)<2^M}|X^Jf(x)|^p\,dx\le C\|f\|^p_{B^\beta_{p,\mu}(F)},\quad d(J)\le l, \tag{2.8}$$

где M — фиксированное целое число в определении оператора продолжения. Действительно,

$$X^J(Ef)(x)=X^J(\varphi f)=\begin{cases}\sum\limits_{J_1+J_2=J}C_{J_1,J_2}\,X^{J_1}\varphi X^{J_2}f, & d(x,F)<2^M;\\ 0, & d(x,F)\ge 2^M.\end{cases}$$

Поскольку производные $X^{J_1}\varphi$ ограничены, из (2.8) будет следовать (2.7).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Delta_I}|X^Jf(x)|^p\,dx$, где $\Delta_I=\{x: h_{I+1}\le d(x,F)<h_I\}$, $h_I=2^{-I}$, $I\ge -M$. По лемме 2.3 с $I=N=i$ для $x\in B_i\cap\Delta_I$ получаем (используя также (2.5))

$$|X^Jf(x)|^p\le C\sum_{d(U)\le k}r_i^{(d(U)-d(J))p-2d}J_U(x_i,x_i)$$

$$+\,C\sum_{d(J)\le d(U)\le k}r_i^{(d(U)-d(J))p-d}\int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1r_i}|f_U(t)|^p\,d\mu(t)$$

$$\leq C \sum_{d(U)\leq k} h_I^{(d(U)-d(J))p-2d} J_U(x_i,x_i)$$
$$+ C \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} h_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A_1 r_i} |f_U(t)|^p\,d\mu(t).$$

Тогда

$$\int\limits_{d(x,F)<2^M} |X^J f(x)|^p\,dx = \sum_{I=-M}^{\infty} \int\limits_{\Delta_I} |X^J f(x)|^p\,dx$$
$$\leq C \sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(U)\leq k} h_I^{(d(U)-d(J))p-2d} \int\limits_{\Delta_I} g_U(x)\,dx$$
$$+ C \sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} h_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\Delta_I} \tilde{g}_U(x)\,dx, \tag{2.9}$$

где

$$g_U(x) = J_U(x_i,x_i), \tilde{g}_U(x) = \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\leq A_1 r_i} |f_U(t)|^p\,d\mu(t)$$

для $x \in B_i \cap \Delta_I$, $\rho(x^{-1}x_i) = \min\limits_{j:x\in B_j} \rho(x^{-1}x_j)$.

Оценим первую сумму в правой части (2.9). По лемме 2.5

$$\int\limits_{\Delta_I} g_U(x)\,dx \leq C h_I^Q \iint\limits_{\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s),$$

где $A_2 = \frac{2\kappa^2 A_1}{K_1-\kappa}$. Поскольку $d(J)\leq l$, то $(d(U)-d(J))p-2d+Q \geq -lp-2d+Q+d(U)p = -(\beta-d(U))p-d$. Если $I\geq 0$, то $h_I^{(d(U)-d(J))p-2d+Q} \leq h_I^{-(\beta-d(U))p-d}$, а если $-M\leq I\leq -1$, то получим $h_I^{(d(U)-d(J))p-2d+Q} = h_I^{(l-d(J))p} h_I^{-(\beta-d(U))p-d} \leq C h_I^{-(\beta-d(U))p-d}$, где $C = 2^{Mlp}$. Поэтому

$$\sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(U)\leq k} h_I^{(d(U)-d(J))p-2d} \int\limits_{\Delta_I} g_U(x)\,dx$$
$$\leq C \sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(U)\leq k} h_I^{-(\beta-d(U))p-d} \iint\limits_{\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$
$$= C \sum_{d(U)\leq k} \sum_{I=-M}^{\infty} h_I^{-(\beta-d(U))p-d} \sum_{K=I}^{\infty} \iint\limits_{A_2 h_{K+1}<\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_K} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$
$$= C \sum_{d(U)\leq k} \sum_{K=-M}^{\infty} \left(\sum_{I=-M}^{K} h_I^{-(\beta-d(U))p-d} \right) \iint\limits_{A_2 h_{K+1}<\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_K} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C \sum_{d(U)\leq k} \sum_{K=-M}^{\infty} h_K^{-(\beta-d(U))p-d} \iint\limits_{A_2 h_{K+1}<\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_K} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C \sum_{d(U)\leq k} \sum_{K=-M}^{\infty} \iint\limits_{A_2 h_{K+1}<\rho(s^{-1}t)\leq A_2 h_K} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(s^{-1}t)^{(\beta-d(U))p+d}}\,d\mu(t)d\mu(s)$$

$$= C \sum_{d(U)\le k} \iint_{\rho(s^{-1}t)\le A_2 2^M} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(s^{-1}t)^{(\beta-d(U))p+d}}\, d\mu(t)d\mu(s) \le C\|f\|^p_{B^\beta_{p,\mu}(F)}.$$

Здесь мы использовали то, что

$$\sum_{I=m_0}^{\nu} h_I^{-\gamma} = \sum_{I=m_0}^{\nu} 2^{I\gamma} = 2^{\nu\gamma}\sum_{I=m_0}^{\nu} 2^{(I-\nu)\gamma} = h_\nu^{-\gamma}\sum_{I=0}^{\nu-m_0} 2^{-I\gamma} \le \frac{h_\nu^{-\gamma}}{1-2^{-\gamma}} = c(\gamma)h_\nu^{-\gamma}, \quad \gamma > 0. \quad (2.10)$$

В нашем случае $\sum\limits_{I=-M}^{K} h_I^{-(\beta-d(U))p-d} \le \frac{h_K^{-(\beta-d(U))p-d}}{1-2^{-(\beta-d(U))p-d}} \le Ch_K^{-(\beta-d(U))p-d}$.

Перейдем к оценке второй суммы в правой части (2.9). По лемме 2.4 с $r = +\infty$ имеем

$$\int_{\Delta_I} \tilde g_U(x)\,dx \le Ch_I^Q \int |f_U(t)|^p\,d\mu(t).$$

Поэтому

$$\sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(J)\le d(U)\le k} h_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int_{\Delta_I} \tilde g_U(x)\,dx \le C \sum_{I=-M}^{\infty} \sum_{d(J)\le d(U)\le k} h_I^{(d(U)-d(J))p-d+Q} \int |f_U(t)|^p\,d\mu(t)$$

$$\le C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} \int |f_U(t)|^p\,d\mu(t) = C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} \|f_U\|^p_{p,\mu} \le C\|f\|^p_{B^\beta_{p,\mu}(F)},$$

поскольку $(d(U)-d(J))p - d + Q > 0$, и

$$\sum_{I=-M}^{\infty} h_I^{(d(U)-d(J))p-d+Q} \le Ch_{-M}^{(d(U)-d(J))p-d+Q} \le C.$$

Тем самым мы доказали (2.8), а следовательно, и (2.7).

Для доказательства теоремы осталось показать, что $X^J f(x) = f_J(x)$ μ-п. в. Рассмотрим $|X^J f(x) - P_J(x,t_0)|^p$, где $t_0 \in F$, $x \in B_i$. Сохраняя обозначения, используемые при доказательстве леммы 2.3, из (2.3) заключаем, что

$$|X^J f(x) - P_J(x,t_0)|^p \le C\Big(|A_J(x) - P_J(x,t_0)|^p + \sum_{J'} |B_{J'}(x)|^p\Big),$$

причем для суммы $\sum\limits_{J'} |B_{J'}(x)|^p$ справедлива оценка (2.4) с $I = N = i$. Оценим $|A_J(x) - P_J(x,t_0)|^p$, используя конечность суммы в (2.3) и применяя неравенство Гёльдера:

$$|A_J(x) - P_J(x,t_0)|^p = \left|\sum_\nu \varphi_\nu(x)c_\nu \int_{\rho(t^{-1}x_\nu)\le Ar_\nu} (P_J(x,t) - P_J(x,t_0))\,d\mu(t)\right|^p$$

$$\le C\sum_\nu |\varphi_\nu(x)|^p c_\nu^p \int_{\rho(t^{-1}x_\nu)\le Ar_\nu} |P_J(x,t) - P_J(x,t_0)|^p\,d\mu(t) \Bigg(\int_{\rho(t^{-1}x_\nu)\le Ar_\nu} d\mu(t)\Bigg)^{p-1}$$

$$\le C\sum_\nu |\varphi_\nu(x)|^p c_\nu \int_{\rho(t^{-1}x_\nu)\le Ar_\nu} |P_J(x,t) - P_J(x,t_0)|^p\,d\mu(t)$$

$$\le Cr_i^{-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i} |P_J(x,t)-P_J(x,t_0)|^p\,d\mu(t),$$

поскольку в сумме по ν конечное число слагаемых, для каждого из которых $c_\nu \le Cr_\nu^{-d} \le Cr_i^{-d}$ и $\rho(t^{-1}x_i) \le A_1 r_i$. По лемме 2.2 выводим, что

$$|P_J(x,t)-P_J(x,t_0)|^p$$
$$= \Bigg| \sum_{d(J)+d(L)\le k} \Bigg(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}} \beta_{LK} \sum_{d(S)=d(J)+d(K)} \gamma_{KJS} r_S(t,t_0) \Bigg) \frac{\eta^L(t^{-1}x)}{L!} \Bigg|^p$$
$$\le C \sum_{L,K,S} |r_S(t,t_0)|^p \rho(t^{-1}x)^{d(L)p} \le C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} \rho(t^{-1}x)^{(d(U)-d(J))p} |r_U(t,t_0)|^p.$$

Поскольку $\rho(t^{-1}x) \le \kappa(\rho(t^{-1}x_i)+\rho(x^{-1}x_i)) \le \kappa(A_1+1)r_i$, то

$$|A_J(x)-P_J(x,t_0)|^p \le C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} r_i^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i} |r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t),$$

$$|X^J f(x)-P_J(x,t_0)|^p \le C \sum_{d(U)\le k} r_i^{(d(U)-d(J))p-2d} \iint\limits_{\substack{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i,\\ \rho(s^{-1}x_i)\le A_1 r_i}} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(t)d\mu(s)$$
$$+ C \sum_{d(J)\le d(U)\le k} r_i^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i} |r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t),$$

если $x \in B_i$.

Пусть $r > 0$. Обозначим через I_r наименьшее целое число такое, что $h_{I_r+1} \le r$. Заметим, что если $\rho\big(t_0^{-1}x\big) \le r$, то и $d(x,F) \le r$, т. е. $x \in \Delta_I$ для $h_{I+1} \le r$. Используя неравенство (2.5), получаем

$$\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r} |X^J f(x)-P_J(x,t_0)|^p\,dx = \sum_{I=I_r}^{\infty} \int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(t_0^{-1}x)\le r}} |X^J f(x)-P_J(x,t_0)|^p\,dx$$
$$\le C \sum_{I=I_r}^{\infty} \sum_{d(U)\le k} h_I^{(d(U)-d(J))p-2d} \int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(t_0^{-1}x)\le r}} g_U(x)\,dx$$
$$+ C \sum_{I=I_r}^{\infty} \sum_{d(J)\le d(U)\le k} h_I^{(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(t_0^{-1}x)\le r}} \tilde g_U(x)\,dx, \quad (2.11)$$

где $g_U(x) = J_U(x_i,x_i)$, $\tilde g_U(x) = \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i} |r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t)$ для $x \in B_i \cap \Delta_I$, $\rho(x^{-1}x_i) = \min\limits_{j:x\in B_j} \rho(x^{-1}x_j)$. В интеграле $J_U(x_i,x_i)$ в первой сумме $\rho(t^{-1}s) \le \kappa(\rho(t^{-1}x_i)+\rho(s^{-1}x_i)) \le 2\kappa A_1 r_i \le A_2 h_I$, поэтому

$$g_U(x) \le \int\limits_{\rho(t^{-1}x_i)\le A_1 r_i} h(t)\,d\mu(t), \quad h(t) = \int\limits_{\rho(t^{-1}s)\le A_2 h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(s).$$

Применяя лемму 2.4, получаем

$$\int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(t_0^{-1}x)\le r}} g_U(x)\,dx \le Ch_I^Q \int\limits_{\rho(t^{-1}t_0)\le\kappa^2 r+\frac{(\kappa^2+A_1)\kappa}{K_1-\kappa}h_I} h(t)\,d\mu(t)$$

$$= Ch_I^Q \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le\kappa^2 r+\frac{(\kappa^2+A_1)\kappa}{K_1-\kappa}h_I} \Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}s)\le A_2h_I} |r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t).$$

Во второй сумме с помощью леммы 2.4 выводим

$$\int\limits_{\substack{x\in\Delta_I,\\ \rho(t_0^{-1}x)\le r}} \tilde g_U(x)\,dx \le Ch_I^Q \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le\kappa^2 r+\frac{(\kappa^2+A_1)\kappa}{K_1-\kappa}h_I} |r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t).$$

Так как $h_{I+1}\le r$, то $\kappa^2 r+\frac{(\kappa^2+A_1)\kappa}{K_1-\kappa}h_I\le A_6 r$, где $A_6=\kappa^2+\frac{2\kappa(\kappa^2+A_1)}{K_1-\kappa}$. Таким образом, из (2.11) получаем

$$\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r} |X^Jf(x)-P_J(x,t_0)|^p\,dx$$

$$\le C\sum_{I=I_r}^{\infty}\sum_{d(U)\le k} h_I^{Q+(d(U)-d(J))p-2d} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}s)\le A_2h_I}|r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t)$$

$$+\,C\sum_{I=I_r}^{\infty}\sum_{d(J)\le d(U)\le k} h_I^{Q+(d(U)-d(J))p-d}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}|r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t)$$

$$\le C\sum_{d(U)\le k} r^{Q-d+(\beta-d(J))p}\sum_{I=I_r}^{\infty} h_I^{-d-(\beta-d(U))p}$$

$$\times\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\Bigg(\int\limits_{\rho(t^{-1}s)\le A_2h_I}|r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t)$$

$$+\,C\sum_{d(J)\le d(U)\le k}\sum_{I=I_r}^{\infty} h_I^{Q+(d(U)-d(J))p-d}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}|r_U(t,t_0)|^p\,d\mu(t), \qquad (2.12)$$

так как из того, что $h_I\le 2r$ и $Q-d+(\beta-d(U))p>0$, следует $h_I^{Q+(d(U)-d(J))p-2d}\le Cr^{Q-d+(\beta-d(J))p}h_I^{-d-(\beta-d(U))p}$. Рассмотрим первую сумму в правой части (2.12). Имеем

$$\sum_{I=I_r}^{\infty} h_I^{-d-(\beta-d(U))p}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\Bigg(\sum_{K=I}^{\infty}\int\limits_{A_2h_{K+1}<\rho(t^{-1}s)\le A_2h_K}|r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t)$$

$$=\sum_{K=I_r}^{\infty}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\Bigg(\int\limits_{A_2h_{K+1}<\rho(t^{-1}s)\le A_2h_K}|r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t)\sum_{I=I_r}^{K} h_I^{-d-(\beta-d(U))p}$$

$$\le C\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\sum_{K=I_r}^{\infty} h_K^{-d-(\beta-d(U))p}\Bigg(\int\limits_{A_2h_{K+1}<\rho(t^{-1}s)\le A_2h_K}|r_U(t,s)|^p\,d\mu(s)\Bigg)\,d\mu(t)$$

$$\leq C \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} \sum_{K=I_r}^{\infty} \Bigg(\int\limits_{A_2 h_{K+1}<\rho(t^{-1}s)\leq A_2 h_K} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(s)\Bigg)\, d\mu(t)$$
$$\leq C \iint\limits_{\substack{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r,\\ \rho(t^{-1}s)\leq A_2 h_{I_r}}} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t)d\mu(s)$$
$$\leq C \iint\limits_{\substack{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r,\\ \rho(t^{-1}s)\leq 2A_2 r}} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t)d\mu(s).$$

Здесь мы использовали неравенство (2.10) и то, что $h_{I_r} \leq 2r$. Рассмотрим теперь вторую сумму в (2.12). Поскольку $Q-d+(d(U)-d(J))p>0$, имеем

$$\sum_{I=I_r}^{\infty} h_I^{Q+(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} |r_U(t,t_0)|^p\, d\mu(t)$$
$$\leq C h_{I_r}^{Q+(d(U)-d(J))p-d} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} |r_U(t,t_0)|^p\, d\mu(t)$$
$$\leq C r^Q\ r^{-d-(\beta-d(U))p}\ r^{(\beta-d(J))p} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} |r_U(t,t_0)|^p\, d\mu(t)$$
$$\leq C r^Q\ r^{(\beta-d(J))p} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} \frac{|r_U(t,t_0)|^p}{\rho(t_0^{-1}t)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t).$$

Таким образом, из (2.12) получаем

$$\frac{1}{r^Q} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\leq r} |X^J f(x) - P_J(x,t_0)|^p\, dx$$
$$\leq C \sum_{d(U)\leq k} r^{(\beta-d(J))p-d} \iint\limits_{\substack{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r,\\ \rho(t^{-1}s)\leq 2A_2 r}} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t)d\mu(s)$$
$$+ C \sum_{d(J)\leq d(U)\leq k} r^{(\beta-d(J))p} \int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r} \frac{|r_U(t,t_0)|^p}{\rho(t_0^{-1}t)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t). \quad (2.13)$$

Обозначим

$$g(t) = \int\limits_{\rho(t^{-1}s)\leq 2A_2 r} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(s)$$

и заметим, что $g \in L_1(\mu)$, поскольку $\int |g(t)|\, d\mu(t) \leq C\|f\|^p_{B^\beta_{p,\mu}(F)} < \infty$. Так как для достаточно регулярных мер μ для $g \in L_1(\mu)$ верно

$$\frac{1}{\mu(\overline{B}(t_0,r))} \int\limits_{\overline{B}(t_0,r)} g(t)\, d\mu(t) \to g(t_0)$$

μ-п. в. при $r \to 0$ и $r^{-d} \leq C\mu(\overline{B}(t_0,r))^{-1}$, для первой суммы в правой части (2.13) справедлива оценка

$$r^{-d} \iint\limits_{\substack{\rho(t_0^{-1}t)\leq A_6 r,\\ \rho(t^{-1}s)\leq 2A_2 r}} \frac{|r_U(t,s)|^p}{\rho(t^{-1}s)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(t)d\mu(s) \leq C \int\limits_{\rho(t_0^{-1}s)\leq 2A_2 r} \frac{|r_U(t_0,s)|^p}{\rho\big(t_0^{-1}s\big)^{d+(\beta-d(U))p}}\, d\mu(s).$$

Тогда из (2.13) получаем

$$\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|X^Jf(x)-P_J(x,t_0)|^p\,dx \le C\sum_{d(U)\le k} r^{(\beta-d(J))p}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}s)\le 2A_2 r}\frac{|r_U(t_0,s)|^p}{\rho\bigl(t_0^{-1}s\bigr)^{d+(\beta-d(U))p}}\,d\mu(s)$$

$$+C\sum_{d(J)\le d(U)\le k} r^{(\beta-d(J))p}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}t)\le A_6 r}\frac{|r_U(t,t_0)|^p}{\rho\bigl(t_0^{-1}t\bigr)^{d+(\beta-d(U))p}}\,d\mu(t)=O(r^{(\beta-d(J))p})\to 0$$

при $r\to 0$ для μ-п. в. t_0, поскольку оба интеграла конечны для μ-п. в. t_0 (иначе мы получили бы $\|f\|^p_{B^\beta_{p,\mu}(F)}=\infty$), и $\beta-d(J)>0$.

Так как

$$P_J(x,t_0)=f_J(t_0)+\sum_{\substack{d(J)+d(L)\le k,\\ d(L)>0}}\Biggl(\sum_{\substack{d(K)=d(L),\\ |K|\le|L|}}\beta_{LK}\sum_{d(S)=d(J)+d(K)}\gamma_{KJS}\;f_S(t_0)\Biggr)\frac{\eta^L\bigl(t_0^{-1}x\bigr)}{L!},$$

то

$$\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|P_J(x,t_0)-f_J(t_0)|^p\,dx \le \frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}\Biggl|\sum_{L,K,S}\frac{\beta_{LK}\gamma_{KJS}}{L!}\;f_S(t_0)\;\eta^L\bigl(t_0^{-1}x\bigr)\Biggr|^p dx$$

$$\le C\sum_{L,K,S}\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|f_S(t_0)|^p\;\rho(t_0^{-1}x)^{d(L)p}\,dx$$

$$\le C\sum_{L,K,S}|f_S(t_0)|^p\;r^{d(L)p}\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}dx\le C\sum_{L,K,S}|f_S(t_0)|^pr^p=O(r^p)$$

при $r\to 0$ для μ-п. в. t_0, поскольку $d(L)>0$ и $|f_S(t_0)|<\infty$ для μ-п. в. t_0.

Таким образом,

$$\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|X^Jf(x)-f_J(t_0)|^p\,dx\le C\Biggl(\frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|X^Jf(x)-P_J(x,t_0)|^p\,dx + \frac{1}{r^Q}\int\limits_{\rho(t_0^{-1}x)\le r}|P_J(x,t_0)-f_J(t_0)|^p\,dx\Biggr)\to 0$$

при $r\to 0$ для μ-п. в. t_0, что доказывает наше утверждение. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает утверждение теоремы 0.1.

3. Граничные значения функций классов $W_p^l(\Omega)$

Определение 3.1. Пусть $\Omega\subset\mathbb{G}$ — открытое связное множество на группе Карно $\mathbb{G}$, и пусть $\varepsilon,\delta>0$. Говорят, что Ω — (ε,δ)-*область*, если для любых точек $x,y\in\Omega$ таких, что $\rho(y^{-1}x)<\delta$, существует кривая $\gamma\subset\Omega$, соединяющая точки x и y, такая, что выполняются следующие соотношения ((ε,δ)-условия):

$$l(\gamma)\le\frac{\rho(y^{-1}x)}{\varepsilon},\quad d(z,\partial\Omega)\ge\frac{\varepsilon\rho(z^{-1}x)\,\rho(z^{-1}y)}{\rho(y^{-1}x)},\ z\in\gamma.$$

Здесь $l(\gamma)$ — длина кривой γ, а $d(z,\partial\Omega) = \inf\limits_{t\in\partial\Omega} \rho(z^{-1}t)$.

Пусть $\mathbb{G}$ — двухступенчатая группа Карно с алгеброй Ли $\mathfrak{g} = V_1 \oplus V_2$ и $\Omega \subset \mathbb{G}$ — ограниченная область класса C^2.

Из результатов работы [19] следует, что Ω является (ε,δ)-областью. В статье [2] (см. теоремы 6.6 и 7.1) доказано, что граница $\partial\Omega$ такой области является $(Q-1)$-множеством Альфорса, в качестве меры μ рассматривается периметрическая мера. Из свойств d-мер Альфорса [4] следует, что эта мера эквивалентна субримановой $(Q-1)$-мерной мере Хаусдорфа.

В работе [7] доказано, что для любой ограниченной (ε,δ)-области на двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$ существует линейный ограниченный оператор продолжения $\mathrm{ext} : W_p^l(\Omega) \to W_p^l(\mathbb{G})$. Это аналог известной теоремы о продолжении Джонса [20]. Ее доказательство использует неравенство Пуанкаре для функций из пространств Соболева $W_p^l(\Omega)$, которое вытекает из интегральных представлений типа Соболева, полученных на двухступенчатых группах Карно в работах [21, 22].

Из этих фактов и теоремы 0.1 получается следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — ограниченная область класса C^2 на двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$, μ — субриманова $(Q-1)$-мерная мера Хаусдорфа на $\partial\Omega$. Пусть $1 < p < \infty$ и $l > 0$ целое. Тогда $W_p^l(\Omega)\big|_{\partial\Omega} = B_{p,\mu}^{l-1/p}(\partial\Omega)$. Операторы следа и продолжения линейные и ограниченные.*

Операторы следа и продолжения являются композициями операторов в следующей диаграмме:

$$W_p^l(\Omega) \xrightarrow{\mathrm{ext}} W_p^l(\mathbb{G}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} B_{p,\mu}^{l-1/p}(\partial\Omega), \quad B_{p,\mu}^{l-1/p}(\partial\Omega) \xrightarrow{\mathrm{E}} W_p^l(\mathbb{G}) \xrightarrow{\mathrm{rest}} W_p^l(\Omega),$$

где rest — оператор сужения.

В разд. 4 нам понадобится следующая эквивалентная нормировка для пространств Соболева.

Предложение 3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — ограниченная область класса C^2 на двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$, μ — субриманова $(Q-1)$-мерная мера Хаусдорфа на $\partial\Omega$. Тогда выражение*

$$\|u\| = \sum_{d(J)\le l} \biggl(\int_{\partial\Omega} |X^J u(x)|^p \, d\mu(x)\biggr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{d(J)=l} \|X^J u\|_{p,\Omega}^p\Bigr)^{1/p} \tag{3.1}$$

задает эквивалентную норму в пространстве $W_p^l(\Omega)$.

Доказательство. Из интегральных представлений [21, 22] следует, что норма $\|u\|^{(1)}_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \sum\limits_{d(J)=l} \|X^J u\|_{p,\Omega}$ эквивалентна стандартной норме $\|\ \|_{W_p^l(\Omega)}$ в пространстве Соболева. Поэтому достаточно доказать эквивалентность норм $\|\ \|^{(1)}_{W_p^l(\Omega)}$ и (3.1).

Рассмотрим тождественный оператор $i : W_p^l(\Omega) \to \widetilde{W}_p^l(\Omega)$, где $\widetilde{W}_p^l(\Omega)$ — пространство с нормой (3.1), а пространство $W_p^l(\Omega)$ рассматривается с нормой $\|\ \|^{(1)}_{W_p^l(\Omega)}$. Этот оператор ограничен в силу теоремы 3.1. Действительно,

$$\sum_{d(J)\le l} \biggl(\int_{\partial\Omega} |X^J u(x)|^p \, d\mu(x)\biggr)^{1/p} + \Bigl(\sum_{d(J)=l} \|X^J u\|_{p,\Omega}^p\Bigr)^{1/p} \le \|u\|_{W_p^l(\Omega)} \le C\|u\|^{(1)}_{W_p^l(\Omega)}$$

для всех $u \in W_p^l(\Omega)$.

Далее, он взаимно однозначен. Действительно, пусть $\|u\|_{\widetilde{W}_p^l(\Omega)} = 0$. Тогда $X^J u \equiv 0$ п. в. в Ω для всех $d(J) = l$ и функция u — многочлен однородной степени не выше $l-1$. Поскольку $X^J u = 0$ п. в. на $\partial\Omega$ для всех $d(J) \le l-1$, то $u \equiv 0$.

Докажем сюръективность оператора i. Пусть $u \in \widetilde{W}_p^l(\Omega)$, тогда $u \in L_p^l(\Omega)$, где $\|u\|_{L_p^l(\Omega)} = \sum\limits_{d(J)=l} \|X^J u\|_{p,\Omega}$. Из результатов работ [21, 22] следует, что для функции u выполняется неравенство Пуанкаре: $\|u - P_k\|_{p,\Omega} \le \|u\|_{L_p^l(\Omega)}$, где P_k — многочлен однородной степени не выше $l-1$. Тем самым $\|u\|_{p,\Omega} < \infty$ и $u \in W_p^l(\Omega)$.

Таким образом, i — ограниченный взаимно однозначный сюръективный линейный оператор. По теореме Банаха об обратном операторе существует ограниченный обратный оператор i^{-1}. Отсюда вытекает эквивалентность норм. Предложение доказано.

4. Краевая задача для одного уравнения с частными производными

В книге С. Л. Соболева [23] описан вариационный метод решения краевых задач для эллиптических уравнений. Одним из приведенных в книге примеров является полигармоническое уравнение порядка $2l$: $\Delta^l u = 0$, где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Мы рассмотрим аналогичную задачу на двухступенчатой группе Карно, ограничиваясь поиском слабого решения.

Пусть Ω — ограниченная область класса C^2 на двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$. Рассмотрим краевую задачу для дифференциального уравнения:

$$\sum_{d(J)=l} C_J (X^J)^* X^J u = 0, \quad x \in \Omega; \tag{4.1}$$

$$X^J u|_{\partial\Omega} = \varphi_J, \quad d(J) \le l-1. \tag{4.2}$$

Здесь $\{\varphi_J\} \in B_2^{l-1/2}(\partial\Omega)$, а $C_J > 0$. В случае евклидова пространства при подходящем выборе коэффициентов C_J оператор уравнения совпадает с оператором Δ^l. Мы будем искать решение задачи (4.1), (4.2) в классе $W_2^l(\Omega)$.

Определение 4.1. Функция $u \in W_2^l(\Omega)$ называется *слабым решением задачи* (4.1), (4.2), если она удовлетворяет условиям (4.2) и для любой функции $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$

$$D(u,h) = \sum_{d(J)=l} C_J \int\limits_\Omega X^J u X^J h \, dx = 0.$$

Если слабое решение u достаточно гладкое, то по формуле интегрирования по частям получаем $\sum\limits_{d(J)=l} C_J \int\limits_\Omega (X^J)^* X^J u h \, dx = 0$ для всех $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$. Из основной леммы вариационного исчисления следует, что u является решением задачи (4.1), (4.2) в обычном смысле.

Теорема 4.1. *Существует единственное слабое решение задачи* (4.1), (4.2) *в классе* $W_2^l(\Omega)$. *Этим решением является функция, на которой достигается минимум функционала* $D(u) = D(u,u)$ *среди всех функций* $u \in W_2^l(\Omega)$, *удовлетворяющих условиям* (4.2).

Доказательство. Сначала докажем, что задача минимизации функционала $D(u)$ на множестве $W_2^l(\{\varphi_J\})$ функций $u \in W_2^l(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (4.2), имеет решение, и притом единственное.

В силу теоремы 3.1 множество $W_2^l(\{\varphi_J\})$ непусто. Так как $0 \le D(u) < \infty$ для всех $u \in W_2^l(\Omega)$, существует $d = \inf\limits_{u \in W_2^l(\{\varphi_J\})} D(u) \ge 0$.

Выберем минимизирующую последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in W_2^l(\{\varphi_J\})$, такую, что $d = \lim\limits_{k\to\infty} D(u_k)$.

Аналогично рассуждениям С. Л. Соболева для полигармонического уравнения [23] доказывается, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что $D(u_k - u_j) < \varepsilon$ для любых $k, j > N(\varepsilon)$. Отсюда следует, что последовательность $\{u_k\}$ фундаментальна в $W_2^l(\Omega)$, если задать в этом пространстве эквивалентную норму формулой (3.1). Действительно, в этом случае интегралы по $\partial\Omega$ в (3.1) равны нулю, и $\|u_k - u_j\|_{W_2^l(\Omega)} = (D(u_k - u_j))^{1/2}$. В силу полноты $W_2^l(\Omega)$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = u_0$.

Покажем, что функция u_0 удовлетворяет условиям (4.2). Из сходимости $u_k \to u_0$ в $W_2^l(\Omega)$ и (3.1) для $d(J) \le l-1$ получаем

$$\|X^J u_k - X^J u_0\|_{2,\partial\Omega} = \Bigg(\int\limits_{\partial\Omega} |X^J u_k - X^J u_0|^2\, d\mu(x)\Bigg)^{1/2} \le C\|u_k - u_0\|_{W_2^l(\Omega)} \to 0$$

при $k \to \infty$. Так как $X^J u_k|_{\partial\Omega} = \varphi_J$, то $\|\varphi_J - X^J u_0\|_{2,\partial\Omega} \le C\|u_k - u_0\|_{W_2^l(\Omega)} \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку левая часть неравенства не зависит от k, то она равна 0, и $X^J u_0|_{\partial\Omega} = \varphi_J$ для всех $d(J) \le l-1$. Равенство $D(u_0) = d$ и единственность функции u_0 доказываются аналогично рассуждениям в [23].

Итак, мы нашли решение вариационной задачи. Полученная функция u_0 будет слабым решением задачи (4.1), (4.2).

Действительно, ввиду того, что на функции u_0 достигается минимум функционала $D(u)$ среди всех функций $u \in W_2^l(\{\varphi_J\})$, для всех $h \in \overset{\circ}{W}{}_2^l(\Omega)$ и $t \in \mathbb{R}$ выполняется $D(u_0) \le D(u_0 + th)$. Из необходимого условия экстремума следует $\frac{d}{dt} D(u_0 + th)|_{t=0} = 0$. Но $D(u_0 + th) = D(u_0) + 2tD(u_0, h) + t^2 D(h)$ и $\frac{d}{dt} D(u_0 + th)|_{t=0} = 2D(u_0, h) = 0$. Так как u_0 удовлетворяет условиям (4.2), то она является слабым решением задачи (4.1), (4.2). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Derridj M.* Sur un théorème de traces // Ann. Inst. Fourier. 1972. V. 22, N 2. P. 73–83.
2. *Danielli D., Garofalo N., Nhieu D.-M.* Non-doubling Ahlfors measures, perimeter measures, and the characterization of the trace spaces of Sobolev functions in Carnot–Carathéodory spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006. (Memoirs Amer. Math. Soc.; V. 182).
3. *Capogna L., Garofalo N.* Ahlfors regularity in Carnot–Carathéodory spaces // J. Geom. Anal. 2006. V. 16, N 4. P. 455–497.
4. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Следы бесселевых потенциалов на регулярных подмножествах групп Карно // Мат. тр. 2007. Т. 10, № 2. С. 1–43.
5. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теоремы типа Уитни о продолжении функций на группах Карно // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 5. С. 586–590.
6. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Теоремы типа Уитни о продолжении функций на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 731–752.
7. *Пупышев И. М.* Продолжение функций классов Соболева за границу области на группах Карно // Мат. тр. 2007. Т. 10, № 1. С. 1–26.
8. *Водопьянов С. К., Пупышев И. М.* Следы пространств Соболева на множествах Альфорса групп Карно // Докл. РАН. 2006. Т. 411, № 2. С. 151–156.

9. *Бесов О. В.* О некотором семействе функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. С. 1163–1165.

10. *Бесов О. В.* Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1961. Т. 60. С. 42–81.

11. *Бесов О. В.* Поведение дифференцируемых функций на негладкой поверхности // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 3–10.

12. *Бесов О. В.* О следах на негладкой поверхности классов дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1972. Т. 117. С. 11–21.

13. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, Физматлит, 1996.

14. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

15. *Johnsson A., Wallin H.* Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$ // Math. Reports. 1984. V. 2. P. 1–221.

16. *Whitney H.* Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1934. V. 36. P. 63–89.

17. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1982.

18. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О продолжении функций ограниченной средней осцилляции на пространствах однородного типа с внутренней метрикой // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 36, № 5. С. 1015–1048.

19. *Monti R., Morbidelli D.* Regular domains in homogeneous groups // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, N 8. P. 2975–3011.

20. *Jones P. W.* Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces // Acta Math. 1981. V. 147. P. 71–88.

21. *Саженкова Е. А.* Интегральные представления на двуступенчатых группах Карно // Междунар. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная столетию академика С. М. Никольского. М., 23–29 мая 2005 г.: Тез. докл. М.: Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2005. С. 196.

22. *Плотникова Е. А.* Интегральные представления и обобщенное неравенство Пуанкаре на группах Карно // Сиб. мат. журн. (В печати).

23. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Статья поступила 30 мая 2006 г., окончательный вариант — 12 февраля 2007 г.

Водопьянов Сергей Константинович, Пупышев Илья Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, iluxa1@ngs.ru