Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 514.746.2

О ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ T^2–МНОГООБРАЗИЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ РИЧЧИ

Я. В. Базайкин, И. В. Матвиенко

Аннотация: Доказано, что на любом четырехмерном односвязном T^2-многообразии существует T^2-инвариантная риманова метрика положительной кривизны Риччи.

Ключевые слова: кривизна Риччи, квазиторическое многообразие.

1. Введение

В [1] доказано, что любая связная сумма конечного числа экземпляров $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2$ и $-\mathbb{C}P^2$ обладает римановой метрикой положительной кривизны Риччи. С другой стороны, любая такая связная сумма допускает эффективное действие тора T^2, т. е. является T^2-многообразием.

В [2] показано, что любое односвязное T^2-многообразие гомеоморфно одной из указанных связных сумм. При этом в каждом классе гомеоморфизма T^2-многообразий существует, вообще говоря, бесконечное число эквивариантно различных T^2-многообразий. Поскольку конструкция в [1] не позволяет строить T^2-инвариантные метрики, до сих пор оставался неисследованным вопрос: существует ли риманова метрика положительной кривизны Риччи в каждом T^2-эквивариантном классе односвязных четырехмерных T^2-многообразий? Данная статья положительно отвечает на этот вопрос, а именно доказана

Теорема. *На каждом односвязном четырехмерном T^2-многообразии существует риманова метрика положительной кривизны Риччи, относительно которой T^2 действует изометриями.*

При построении метрики мы используем конструкцию, представляющую четырехмерное T^2-многообразие M как фактор-пространство некоторого универсального T^m-многообразия N_m по свободному действию тора T^{m-2}. Мы строим метрику на N_m и, пользуясь римановой субмерсией $N_m \to M$, получаем требуемую метрику на M. Отметим, что аналог универсального пространства N_m строится в любых размерностях, и было бы интересным обобщить теорему на случай любого квазиторического многообразия (в смысле книги [3]).

Авторы признательны Т. Е. Панову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–0094а), комплексного интеграционного проекта 1.1 СО РАН; первый автор подержан также грантом президента РФ (проект МК–8712.2006.1).

2. Универсальное пространство для T^2-многообразия

Пусть M — гладкое односвязное четырехмерное многообразие с эффективным гладким действием тора T^2. Для любой точки $p \in M$ стабилизатором G_p точки p может быть только одна из следующих подгрупп в T^2: $G_p = 0$, $G_p = T^2$ и $G_p = S^1$ [2]. Первый случай отвечает главным орбитам, второй — неподвижным точкам действия. Если представить тор как фактор-пространство $\mathbb{R}^2$ по стандартной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$, то стабилизатор $G_p = S^1$ реализуется как подгруппа $\{(pt, qt) \mid t \in \mathbb{R}\}$, где p, q — пара взаимно простых целых чисел, определенных с точностью до одновременного изменения знаков. В [2] доказано, что пространство орбит M^* гомеоморфно двумерному диску, причем внутренние точки диска являются главными орбитами, а граница диска разбивается на открытые дуги, состоящие из точек со стабилизатором S^1, разделенные неподвижными точками.

Каждой такой дуге приписывается вес (p, q), определенный, как выше. Нетрудно понять, что если (p, q), (r, s) — соседние веса, то $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = \pm 1$.

Следуя [4], для каждого целого $m \geq 2$ строим T^m-многообразие N_m размерности $m + 2$ следующим образом.

Пусть двумерный диск M^* содержит m дуг $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ на своей границе, разделенных точками $F_1, \dots, F_m$. Рассмотрим произведение $M^* \times T^m$, где $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$. На границе произведения произведем следующие отождествления. Во внутренней точке дуги с номером i затянем в точку i-ю координатную окружность тора T^k. Таким образом, в каждой неподвижной точке, лежащей между дугами i и $i + 1$, затягиваем в точку координатный тор, отвечающий i-й и $i + 1$-й окружностям. В итоге получаем многообразие N_m размерности $m + 2$ с действием тора T^m на нем. Следующее утверждение доказано в [4] в более общем виде, и мы приведем лишь некоторые детали доказательства, нужные нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Для любого односвязного четырехмерного T^2-многообразия M существует тор $T^{m-2} \subset T^m$, свободно действующий на N_m таким образом, что T^2-многообразие N_m/T^{m-2} эквивариантно гомеоморфно T^2-многообразию M.*

Доказательство. Пусть дуга Γ_i имеет вес (p_i, q_i), где p_i, q_i — пара взаимно простых целых чисел, определенных с точностью до одновременного изменения знака. Рассмотрим матрицу весов A размера $2 \times m$, состоящую из двух строк p_i, q_i, $i = 1, \dots, m$. Рассмотрим ядро E линейного отображения $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^2$ и ядро F аддитивного отображения $A : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^2$. Тогда $T^{m-2} = E/F$ действует сдвигами на T^m — это и является искомым действием.

3. Метрика положительной кривизны Риччи

Сначала рассмотрим случай малых m. Если $m = 2$, то $N_2 = S^4 = M$ и метрика положительной кривизны Риччи, очевидно, существует. Если $m = 3$, то $N_3 = S^5$ обладает стандартной метрикой постоянной кривизны и $M = S^5/S^1$ имеет положительную кривизну Риччи. Наконец, если $m = 4$, то $N_4 = S^3 \times S^3$ с метрикой произведения. Тогда $M = S^3 \times S^3/S^1 \times S^1$ имеет положительную кривизну Риччи.

Итак, пусть $m \geq 5$. Зададим $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и $\nu > 0$. Рассмотрим функцию

$G(x)$, определенную на промежутке $[-\delta, \infty)$ следующим образом:

$$G(x) = \begin{cases} \sqrt{1+(1+k_1^2)\operatorname{sh}^2(\varepsilon+\nu)}\cos\left(\frac{x+\delta}{k_1}\right), & -\delta \le x \le \varepsilon, \\ \operatorname{ch}(x-2\varepsilon-\nu), & \varepsilon \le x \le 2\varepsilon, \\ \sqrt{1+(1+k_2^2)\operatorname{sh}^2\nu}\cos\left(\frac{x-x_0}{k_2}\right), & 2\varepsilon \le x, \end{cases}$$

где k_2 — достаточно большое число, а параметры k_1, x_0 находятся из соотношений

$$\operatorname{th}(\varepsilon+\nu) = \frac{1}{k_1}\operatorname{tg}\left(\frac{\varepsilon+\delta}{k_1}\right), \quad \operatorname{tg}\left(\frac{2\varepsilon-x_0}{k_2}\right) = k_2\operatorname{th}\nu.$$

Нетрудно увидеть, что функция $G(x)$ является кусочно C^∞-гладкой с двумя точками излома, в которых первая производная сохраняет непрерывность. Рассмотрим метрику

$$ds_0^2 = dx^2 + G(x)^2 dy^2$$

в полосе $\{(x,y) \mid x \ge -\delta,\ 0 \le y \le \Delta\}$, где $\Delta > 0$ — некоторая константа. Ясно, что при $x \le \varepsilon$ метрика ds_0^2 локально изометрична метрике сферы радиуса k_1, при $x \ge 2\varepsilon$ — метрике сферы радиуса k_2 и при $\varepsilon \le x \le 2\varepsilon$ — метрике гиперболической плоскости кривизны -1.

Зададим $\mu > 0$. Для каждого $r > 0$ рассмотрим кратчайшую геодезическую γ метрики ds_0^2, соединяющую точки $A_1(r,0)$ и $A_2(r,\Delta)$. Выберем r таким, чтобы кривая $\{x = 2\varepsilon\}$ находилась на расстоянии, меньшем чем $\mu\pi/2$, от геодезической γ (очевидно, что это обеспечивается при достаточно большом k_2). Точки A_1, A_2 наряду с вершинами $A_3(-\delta,\Delta)$ и $A_4(-\delta,0)$ образуют геодезический четырехугольник Π. Теперь выберем настолько большие Δ и k_2, что имеет место соотношение

$$\int\limits_{\Pi} K\,d\sigma = -\frac{\pi}{2},$$

где K — секционная кривизна и $d\sigma$ — форма площади метрики ds_0^2 (отметим, что в силу определяющих величину k_1 соотношений для выполнения последней формулы нужно выбрать $\nu < \delta$). Тогда формула Гаусса — Бонне гарантирует, что углы в вершинах A_1, A_2 равны по $\pi/4$. В дальнейшем будем под Π подразумевать именно такой четырехугольник (рис. 1).

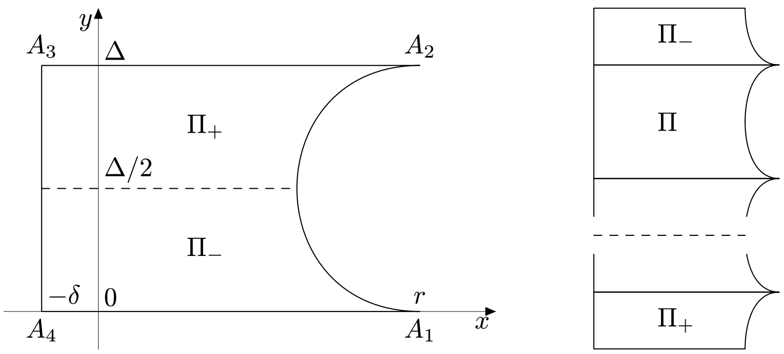

Рис. 1

Разделим четырехугольник Π пополам по геодезической $\{y = \Delta/2\}$. Верхнюю и нижнюю половины обозначим соответственно через Π_+ и Π_-. Четырехугольники Π, Π_- и Π_+ являются элементарными кирпичиками, из которых строим многоугольник D. А именно, будем присоединять друг к другу последовательно сверху вниз Π_-, затем $m-5$ штук четырехугольников Π и наконец четырехугольник Π_+ так, что стороны $\{x=-\delta\}$ образуют одну геодезическую сторону в D. Полученный многоугольник D имеет геодезические стороны и $m \geq 5$ прямых углов. Очевидно, что метрика ds_0^2 гладко продолжается на весь D.

Перенумеруем стороны D индексами от 1 до m по часовой стрелке, считая, что самая длинная сторона $\{x=-\delta\}$ имеет номер 1. Пусть $\gamma_1,\dots,\gamma_m$ — стороны многоугольника D. Обозначим через ρ_i расстояние до стороны γ_i в метрике ds_0^2, и пусть ψ_i — координата вдоль геодезической γ_i. Таким образом, (ρ_i,ψ_i) — координаты Ферми в окрестности γ_i. Очевидно, что $\rho_1 = x+\delta, \psi_1 = y$. Положим для $i>1$

$$f_i = \begin{cases} \mu \sin \frac{\rho_i}{\mu}, & 0 \leq \rho_i \leq \frac{\pi}{2}\mu, \\ \mu, & \rho_i \geq \frac{\pi}{2}\mu, \end{cases}$$

где ρ_i — расстояние до геодезической, содержащей i-ю сторону D. Функцию f_1 определим специальным образом:

$$f_1 = \begin{cases} 4\varepsilon \sin \frac{x+\delta}{4\varepsilon}, & -\delta \leq x \leq 2\pi\varepsilon - \delta, \\ 4\varepsilon, & x \geq 2\pi\varepsilon - \delta. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что функции f_i являются кусочно C^∞-гладкими с непрерывными всюду первыми производными.

Рассмотрим следующую метрику на N_m:

$$ds^2 = ds_0^2 + \sum_{i=1}^{m} f_i^2 d\phi_i^2.$$

Очевидно, что ds^2 гладкая класса C^1 на произведении $\mathrm{Int}(D)\times T^m \subset N_m$. Более того, имеет место

Лемма 2. *Метрика ds^2 является C^1-гладкой римановой метрикой на универсальном многообразии N_m.*

Доказательство. Во внутренних точках дуги γ_i некоторая окрестность N_m имеет метрику вида

$$d\rho_i^2 + \mu_i^2 \sin^2 \frac{\rho_i}{\mu_i} d\phi_i^2 + d\psi_i^2 + \sum_{j\neq i} f_j^2 d\phi_i^2,$$

где $\mu_i = \mu$ при $i \neq 1$ и $\mu_1 = 4\varepsilon$. Первые два слагаемых описывают C^1-гладкую метрику на двумерном диске, оставшиеся — задают гладкую метрику на $\mathbb{R}\times T^{m-1}$, поскольку $f_j = \mathrm{const}$ в окрестности множества внутренних точек дуги γ_i. Таким образом, метрика ds^2 гладкая во внутренних точках каждой стороны γ_i.

Рассмотрим вершину D, в которой сходятся два ребра γ_i, γ_{i+1}. В окрестности этой точки метрика имеет вид

$$d\rho_i^2 + \mu_i^2 \sin^2 \frac{\rho_i}{\mu_i} d\phi_i^2 + d\rho_{i+1}^2 + \mu_{i+1}^2 \sin^2 \frac{\rho_{i+1}}{\mu_{i+1}} d\phi_{i+1}^2 + ds'^2,$$

где аналогично предыдущему случаю ds'^2 — гладкая метрика на T^{m-2}. Лемма доказана.

Ясно, что тор T^{m-2} свободно действует на N_m изометриями, поэтому на фактор-пространстве $M = N_m/T^{m-2}$ возникает риманова метрика $d\bar{s}^2$.

Лемма 3. *Построенная описанным выше способом риманова метрика $d\bar{s}^2$ на M обладает положительно определенным тензором Риччи при выборе достаточно малых ε, μ.*

Замечание. Константы δ, k_2 и $\nu < \delta$ выполняют скорее «техническую» функцию, обеспечивая положительность секционной кривизны метрики ds_0^2 на краю. Выбор малых величин ε и μ дает требуемую положительность кривизны Риччи, как будет видно из доказательства.

Доказательство. Обозначим через r и $\bar{r}$ (соответственно R и $\overline{R}$) тензоры Риччи (соответственно Римана) метрик ds^2 и $d\bar{s}^2$. В каждой точке многообразия N_m будем обозначать буквой X векторы, касательные к D, буквой U — векторы, касательные к тору T^m и ортогональные к $T^{m-2} \subset T^m$, наконец, буквой V — векторы, касательные к T^{m-2}. Каждый вектор, касательный к M, можно поднять в N_m, получив вектор вида $X + U$ — все такие векторы образуют горизонтальное распределение $\mathscr{H}$ в TN_m, векторы вида V — вертикальное распределение $\mathscr{V}$ в TN_m. В дальнейших формулах для римановой субмерсии $N_m \to M$ пользуемся обозначениями из [5].

Непосредственные вычисления показывают, что $A_U = 0$ и $TU = 0$. Далее, рассмотрим вектор средней кривизны N вертикальных слоев субмерсии. Формула первой вариации объема, примененная к вариации вертикального слоя, показывает, что вектор N является касательным к D. Следовательно, $(D_U N, X) = 0$ и $(D_X N, U) = 0$. Формула О'Нила [5, 9.36c] для кривизны Риччи немедленно дает

$$\bar{r}(X, U) = r(X, U) + 2(A_X, A_U) + (TX, TU) - \frac{1}{2}((D_X N, U) + (D_U N, X)) = r(X, U).$$

Формула [5, 9.106b], примененная к N_m, показывает, что $r(X, U) = 0$. Итак, $\bar{r}(X, U) = 0$. Следовательно, чтобы доказать положительную определенность тензора Риччи для метрики $d\bar{s}^2$, достаточно доказать, что $\bar{r}(X, X) > 0$ и $\bar{r}(U, U) > 0$.

Вычислим тензор кривизны N_m. Для этого выберем ортонормированную систему 1-форм: $e^{-1} = dx$, $e^0 = G dy$, $e^i = f_i d\phi_i$. Форма связности ω_{ij} находится из соотношения $de^i = \omega_{ij} \wedge e^j$. Непосредственными вычислениями получаем

$$\omega_{-10} = -\frac{G_x}{G} e^0, \quad \omega_{-1i} = -\frac{(f_i)_x}{f_i} e^i, \quad \omega_{0i} = -\frac{(f_i)_y}{G f_i} e^i, \quad \omega_{ij} = 0, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Форма кривизны Θ_{ij} находится из соотношений $\Theta_{ij} = d\omega_{ij} + \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$:

$$\Theta_{-10} = -\frac{G_{xx}}{G} e^{-1} \wedge e^0, \quad \Theta_{-1i} = -\frac{(f_i)_{xx}}{f_i} e^{-1} \wedge e^i - \frac{1}{G} \left[\frac{(f_i)_{xy}}{f_i} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^0 \wedge e^i,$$

$$\Theta_{0i} = -\frac{1}{G} \left[\frac{(f_i)_{xy}}{f_i} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^{-1} \wedge e^i - \left[\frac{(f_i)_{yy}}{f_i} \frac{1}{G^2} - \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_y}{G^3} + \frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{G_x}{G} \right] e^0 \wedge e^i,$$

$$\Theta_{ij} = -\left[\frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{(f_j)_x}{f_j} + \frac{1}{G^2} \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{(f_j)_y}{f_j} \right] e^i \wedge e^j.$$

Таким образом, получаем следующие соотношения для ненулевых компонент тензора кривизны R_{ijkl} относительно репера $e^{-1}, \dots, e^m$:

$$R_{-10-10} = -\frac{G_{xx}}{G}, \; R_{-1i-1i} = -\frac{(f_i)_{xx}}{f_i}, \; R_{0i0i} = -\frac{(f_i)_{yy}}{f_i} \frac{1}{G^2} + \frac{(f_i)_y}{f_i} \frac{G_y}{G^3} - \frac{(f_i)_x}{f_i} \frac{G_x}{G},$$

$$R_{ijij} = -\frac{(f_i)_x}{f_i}\frac{(f_j)_x}{f_j} - \frac{1}{G^2}\frac{(f_i)_y}{f_i}\frac{(f_j)_y}{f_j}, \quad R_{-1i0i} = -\frac{(f_i)_{xy}}{f_i}\frac{1}{G} + \frac{(f_i)_y}{f_i}\frac{G_x}{G^2}.$$

Рассмотрим касательный вектор X и два единичных ортогональных друг другу вектора U_1 и U_2, приложенных в той же точке. Тогда

$$U_1 = \sum_{l=1}^{m} c_l \frac{\partial_{\phi_l}}{f_l}, \quad U_2 = \sum_{l=1}^{m} d_l \frac{\partial_{\phi_l}}{f_l},$$

где $|c_i| \geq c, |c_{i+1}| \geq c, |d_i| \geq c, |d_{i+1}| \geq c$ для некоторой константы $c > 0$ (это следует из определения тора T^{m-2} в доказательстве леммы 1). Из формул О'Нила для секционной кривизны вытекает, что

$$\bar{r}(X,X) \geq K + R(X,U_1,X,U_1) + R(X,U_2,X,U_2),$$

где K — секционная кривизна метрики ds_0^2.

Предположим сначала, что $x \geq 2\varepsilon$. Тогда найдутся два соседних индекса, скажем i, $i+1$, такие, что все остальные функции f_j, $j \neq 1, i, i+1$, являются константами, а хотя бы одна из функций f_i, f_{i+1} непостоянна. Тогда из формул для тензора кривизны следует, что

$$\bar{r}(X,X) \geq \frac{1}{k_2^2} + 2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_i}}{f_i}, X, \frac{\partial_{\phi_i}}{f_i}\right) + 2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_{i+1}}}{f_{i+1}}, X, \frac{\partial_{\phi_{i+1}}}{f_{i+1}}\right) + 2c^2 R\left(X, \frac{\partial_{\phi_1}}{f_1}, X, \frac{\partial_{\phi_1}}{f_1}\right).$$

Во втором слагаемом представим $X = x_1\partial_{\rho_i} + x_2\frac{\partial_{\psi_i}}{k_2\cos(\rho_i/k_2)}$, в третьем как $X = y_1\partial_{\rho_{i+1}} + y_2\frac{\partial_{\psi_{i+1}}}{k_2\cos(\rho_{i+1}/k_2)}$, а в четвертом — $X = z_1\partial_x + z_2\frac{\partial_y}{G}$. Имеем

$$\begin{aligned}\bar{r}(X,X) \geq \frac{1}{k_2^2} &+ 2c^2\left(x_1^2\frac{1}{\mu^2} + x_2^2\frac{\cos(\rho_i/\mu)\sin(\rho_i/k_2)}{\mu k_2\sin(\rho_i/\mu)\cos(\rho_i/k_2)}\right)\\ &+ 2c^2\left(y_1^2\frac{1}{\mu^2} + y_2^2\frac{\cos(\rho_{i+1}/\mu)\sin(\rho_{i+1}/k_2)}{\mu k_2\sin(\rho_{i+1}/\mu)\cos(\rho_{i+1}/k_2)}\right)\\ &+ 2c^2\left(\frac{z_1^2}{16\varepsilon^2} + z_2^2\frac{\cos(\rho_1/4\varepsilon)\sin(\rho_1/k_2)}{k_2 4\varepsilon\sin(\rho_1/4\varepsilon)\cos(\rho_1/k_2)}\right) > \frac{1}{k_2^2}.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что X приложен в точке, в которой $\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon$. Тогда

$$X = x_1\partial_x + x_2\frac{\partial_y}{G},$$

где $x_1^2 + x_2^2 = |X|^2 = 1$. Из формул О'Нила следует, что $\bar{r}(X,X) \geq -1 + R(X,U_1,X,U_1) + R(X,U_2,X,U_2)$. Перепишем ненулевые компоненты тензора кривизны в рассматриваемой области:

$$R_{-10-10} = -1, \quad R_{-11-11} = -\frac{(f_1)_{xx}}{f_1} = \frac{1}{16\varepsilon^2}, \quad R_{0101} = -\frac{1}{4\varepsilon}\frac{\operatorname{th}(x-2\varepsilon-\nu)}{\operatorname{tg}(x/4\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\bar{r}(X,X) \geq -1 + 2c^2\frac{x_1^2}{16\varepsilon^2} + 2c^2x_2^2\left(\frac{1}{4\varepsilon}\frac{\operatorname{th}\nu}{\operatorname{tg}(1/2)}\right) > 0,$$

если ε достаточно мало.

Наконец, рассмотрим случай, когда $-\delta \leq x \leq \varepsilon$. Этот случай анализируется совершенно аналогично первому (т. е. случаю $x \geq 2\varepsilon$). Итак, мы показали, что $\bar{r}(X, X) > 0$.

Возьмем пару произвольных векторов U_1 и U_2, как выше. Как и ранее, рассмотрим последовательно три случая: $x \geq 2\varepsilon$, $\varepsilon \leq x \leq 2\varepsilon$ и $-\delta \leq x \leq \varepsilon$. Пусть K — секционная кривизна N_m в двумерном направлении $\langle U_1, U_2 \rangle$, т. е.

$$K = R(U_1, U_2, U_1, U_2) = \sum_{s,t=1}^{m} c_s^2 d_t^2 R\left(\frac{\partial_{\phi_s}}{f_s}, \frac{\partial_{\phi_t}}{f_t}, \frac{\partial_{\phi_s}}{f_s}, \frac{\partial_{\phi_t}}{f_t}\right) = \sum_{s,t=1}^{m} c_s^2 d_t^2 R_{stst}.$$

Пусть $x \geq 2\varepsilon$. Как и ранее, найдем «ближайшие» стороны с индексами i, $i+1$, т. е. в точке (x, y) все функции f_j постоянны при $j \neq 1, i, i+1$. Предположим, что f_i непостоянна. Пусть $X = \partial_{\rho_i}$, $X' = \frac{\partial_{\psi_i}}{k_2 \cos(\rho_i/k_2)}$. Тогда из формул О'Нила следует, что $\bar{r}(U_1, U_1) \geq R(X, U_1, X, U_1) + R(X', U_1, X', U_1) + K$. Первые два слагаемых расписываются точно так же, как это делалось выше, поэтому их сумма положительна и имеет порядок $1/\mu^2$. Оценим последнее слагаемое. В формуле для R_{stst} функции f_i монотонно возрастают, метрика D в окрестности углов изометрична метрике сферы. Поэтому все ненулевые R_{stst} положительны и получаем $K > 0$. Аналогично проверяется положительность $\bar{r}(U_1, U_1)$ в остальных участках D. Итак, $\bar{r}(U_1, U_1) > 0$. Лемма доказана.

Для доказательства обещанной во введении теоремы достаточно сгладить метрику ds^2 с сохранением положительности кривизны Риччи. Это делается следующим образом. Мы сглаживаем все участвующие в определении ds^2 функции в точках разрыва таким образом, чтобы вторая производная вблизи точек разрыва оставалась монотонной. Поскольку все функции были класса гладкости C^1, это сделать возможно. Далее, как следует, например, из [5, 1.174], тензор кривизны Риччи является дифференциальным оператором, линейно зависящим от вторых производных метрики. Значит, если такое сглаживание мало́, то кривизна останется положительной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sha J., Yang D.* Positive Ricci curvature on compact simply connected 4-manifolds // Differential Geometry. P. 3: Riemannian geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 529–538. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 54, P. 3).
2. *Orlik P., Raymond F.* Actions of the torus on 4-manifolds. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 152, N 2. P. 531–559.
3. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. М.: МЦНМО, 2004.
4. *Davis M. W., Januszkiewicz T.* Convex polytopes, coxeters orbifolds and torus actions // Duke Math. J. 1991. V. 62, N 2. P. 417–451.
5. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.

Статья поступила 4 июня 2007 г.

Базайкин Ярослав Владимирович, Матвиенко Иван Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru, ivan.matvienko@gmail.com