Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.537+512.817

ПОСТРОЕНИЕ АВТОМОРФНОЙ ФОРМЫ ПО ОРБИТЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Е. П. Аксентьева, Ф. Н. Гарифьянов

Аннотация: Рассматриваются фуксовы группы дробно-линейных преобразований. Предложен новый метод построения автоморфных форм в виде лакунарных рядов по некоторому подмножеству преобразований группы, не имеющему структуры подгруппы. Сравнительный анализ тэта-ряда Пуанкаре и построенного ряда показывает, что в лакунарном ряде сокращается не только число входящих преобразований, но и число параметров, от которых зависит каждое слагаемое.

Ключевые слова: фуксова группа дробно-линейных преобразований, тэта-ряд Пуанкаре.

Пусть Γ — разрывная группа дробно-линейных преобразований

$$\mathrm{Id} = z,\ \sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k},\ \alpha_k\delta_k - \gamma_k\beta_k = 1,\ \gamma_k \neq 0,\ k = 1, 2, \dots,\ \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

действующая на расширенной комплексной плоскости, с фундаментальной областью Π. Рассмотрим θ-ряд Пуанкаре [1, с. 63]

$$\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_k z + \delta_k)^{-2m} H[\sigma_k(z)], \quad m \geq 2, \tag{2}$$

где $H(z)$ — рациональная функция от z, аналитическая во всех предельных точках группы. Тэта-ряд равномерно и абсолютно сходится на каждом замкнутом подмножестве из Π, не содержащем параболических точек, на котором функция $H(z)$ аналитична. Удовлетворяя при любом j условию

$$\theta[\sigma_j(z)] = (\gamma_j z + \delta_j)^{2m} \theta(z), \tag{3}$$

ряд (2) будет автоморфной формой веса $(-2m)$. При сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\gamma_k^{-2}\right|$ в соотношениях (2) и (3) можно считать, что $m \geq 1$ (так называемые группы сходящегося типа) [2, с. 115].

Заметим, что для построения ряда (2) необходимо знать все преобразования группы. Другими словами, мы считаем формально известными коэффициенты любого преобразования (1). Между тем, за исключением нескольких простейших случаев, нет общих выражений преобразований группы через коэффициенты ее порождающих преобразований. В связи с этим сформулируем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–81019 Бел.а).

© **2007 Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.**

основную задачу данной статьи: построить автоморфные формы в виде лакунарных рядов, содержащих не все преобразования группы, а только некоторую их часть. При этом данное множество не является подгруппой.

Впервые автоморфная форма в виде лакунарного ряда построена в работе авторов [3]. Рассматривались фуксовы группы [2, с. 76], для которых каждая вершина фундаментального многоугольника являлась общей для четного или бесконечного числа фундаментальных конгруэнтных многоугольников, сходящихся в этой точке. Совокупность преобразований (1) вполне определенным образом делилась на два непересекающихся множества I и II, причем $\mathrm{Id} \in \mathrm{II}$. Было установлено, что ряд

$$f_{2m}(z) = \sum_{\sigma_k \in \mathrm{I}} \left[\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z) - z]^2} \right]^m$$

является автоморфной формой веса $-4m$. Вводились такие ограничения на преобразования (1) и степень m, при выполнении которых $f_{2m}(z) \not\equiv 0$ (по этому поводу см. также [4]).

В данной статье предлагается другой подход к построению автоморфных форм, позволяющий обойтись «меньшим» числом преобразований, чем множество I. Он также позволяет снять ограничения на вершины фундаментального многоугольника. Этот прием использует понятие орбиты фиксированного преобразования группы. Работа состоит из двух параграфов. В § 1 исследуются свойства орбиты. В § 2 автоморфные формы строятся в виде лакунарных рядов (7) по множеству преобразований орбиты. Основная проблема состоит в том, чтобы доказать нетривиальность этих автоморфных форм.

§ 1. Свойства орбиты преобразования

Рассмотрим неэлементарную фуксову конечно порожденную и действующую на единичном круге $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ группу Γ. Все ее преобразования (1) имеют вид

$$\sigma_k(z) = \frac{\alpha_k z + \bar{\gamma}_k}{\gamma_k z + \bar{\alpha}_k}; \ |\alpha_k|^2 - |\gamma_k|^2 = 1, \quad \gamma_k \neq 0, \ \alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k \in \mathbb{C}. \qquad (4)$$

Преобразованию (4) соответствуют две матрицы

$$\pm(\sigma_k) = \pm \begin{pmatrix} \alpha_k & \bar{\gamma}_k \\ \gamma_k & \bar{\alpha}_k \end{pmatrix}$$

и число $\mathrm{tr}(\sigma_k) = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha_k$, след матрицы. Преобразование (4) при $|\mathrm{Re}\,\alpha_k| > 1$ является гиперболическим, при $|\mathrm{Re}\,\alpha_k| = 1$ — параболическим, при $|\mathrm{Re}\,\alpha_k| < 1$ — эллиптическим (см. классификацию дробно-линейных преобразований в [2, с. 26]).

Рассмотрим сопряженные по отношению к σ_p преобразования группы вида $\sigma_k \sigma_p \sigma_k^{-1}$, где σ_p — фиксированное преобразование группы Γ, отличное от Id, а σ_k пробегает все преобразования группы Γ. Различные преобразования σ_k могут давать одно и то же преобразование $\sigma_k \sigma_p \sigma_k^{-1}$ (так как централизатор $C_\Gamma(\sigma_p) = \{\sigma_k \in \Gamma \mid \sigma_k \sigma_p = \sigma_p \sigma_k\}$ является фуксовой циклической подгруппой группы Γ). Будем считать его без учета кратности, т. е. σ_k будет пробегать не все множество Γ, а его часть $\widetilde{\Gamma}$ — подмножество преобразований группы Γ, обладающих свойствами:

1) $\forall \sigma_i, \sigma_j \in \widetilde{\Gamma} \quad \sigma_i \neq \sigma_j \Rightarrow \sigma_i^{-1}\sigma_j \notin C_\Gamma(\sigma_p)$;

2) если $\sigma_i \notin \widetilde{\Gamma}$, то существует такое $g \in C_\Gamma(\sigma_p)$, что $\sigma_i g \in \widetilde{\Gamma}$.

Другими словами, $\widetilde{\Gamma}$ — множество различных представителей левых смежных классов группы Γ по подгруппе $C_\Gamma(\sigma_p)$.

Определение. Класс преобразований $\tau_k = \sigma_k \sigma_p \sigma_k^{-1}$, где $\sigma_p \neq \mathrm{Id}$ — фиксированное преобразование группы Γ, а σ_k пробегает все преобразования множества $\widetilde{\Gamma}$, назовем *орбитой* $A(\sigma_p)$.

Рассмотрим свойства орбиты. Для любых p, q очевидны первые четыре свойства.

1.1°. $\sigma_p \in A(\sigma_p)$, $\mathrm{Id} \notin A(\sigma_p)$.

1.2°. $\sigma_q \in A(\sigma_p) \Leftrightarrow \sigma_p \in A(\sigma_q) \Leftrightarrow A(\sigma_p) = A(\sigma_q)$.

1.3°. $A(\sigma_p) \cap A(\sigma_q) \neq \varnothing \Rightarrow A(\sigma_p) = A(\sigma_q)$.

1.4°. $\sigma_q \in A(\sigma_p) \Rightarrow \sigma_q^n \in A(\sigma_p^n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Приведем полный вывод остальных свойств орбиты.

1.5°. *Все преобразования орбиты имеют один и тот же тип.*

Доказательство. Пусть

$$\tau_k = \sigma_k \sigma_p \sigma_k^{-1} = (a_k z + \bar{c}_k)(c_k z + \bar{a}_k)^{-1}, \quad |a_k|^2 - |c_k|^2 = 1, \ c_k \neq 0.$$

Непосредственным вычислением (см. [2, с. 46]) получим

$$\tau_k = \frac{(\alpha_p|\alpha_k|^2 - \bar{\gamma}_p\alpha_k\gamma_k + \gamma_p\bar{\alpha}_k\bar{\gamma}_k - \bar{\alpha}_p|\gamma_k|^2)z - \alpha_p\alpha_k\bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_p\alpha_k^2 - \gamma_p\bar{\gamma}_k^2 + \bar{\alpha}_p\alpha_k\bar{\gamma}_k}{(\alpha_p\bar{\alpha}_k\gamma_k - \bar{\gamma}_p\gamma_k^2 + \gamma_p\bar{\alpha}_k^2 - \bar{\alpha}_p\bar{\alpha}_k\gamma_k)z - \gamma_p\bar{\alpha}_k\bar{\gamma}_k + \bar{\alpha}_p|\alpha_k|^2 - \alpha_p|\gamma_k|^2 + \bar{\gamma}_p\alpha_k\gamma_k}, \tag{5}$$

откуда $|\operatorname{tr}(\tau_k)| = |\operatorname{tr}(\sigma_p)|$. Это и означает, что все преобразования орбиты одного типа. □

1.6°. *Пусть* $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| \neq 2$ *и*

$$\frac{\sigma_p(z) - \xi_1}{\sigma_p(z) - \xi_2} = K_p \frac{z - \xi_1}{z - \xi_2},$$

где $\sigma_p(\xi_i) = \xi_i$, $i = 1, 2$, $K_p = (\alpha_p - \gamma_p\xi_1)(\alpha_p - \gamma_p\xi_2)^{-1}$ — *множитель преобразования* [2, с. 24]. *Тогда*

$$\frac{\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_1)}{\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_2)} = K_p \frac{z - \sigma_k(\xi_1)}{z - \sigma_k(\xi_2)}.$$

При параболическом преобразовании $\sigma_p(z)$ (*для определенности считаем* $\operatorname{Re}\alpha_p = 1$) *имеем*

$$[\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_1)]^{-1} = [z - \sigma_k(\xi_1)]^{-1} + \gamma_p(\gamma_k\xi_1 + \bar{\alpha}_k)^2.$$

Доказательство. При $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| \neq 2$ неподвижными точками $\tau_k(z)$ являются точки $\sigma_k(\xi_i)$, $i = 1, 2$. Поэтому

$$\frac{\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_1)}{\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_2)} = K_k \frac{z - \sigma_k(\xi_1)}{z - \sigma_k(\xi_2)},$$

где $K_k = [a_k - c_k\sigma_k(\xi_1)][a_k - c_k\sigma_k(\xi_2)]^{-1}$ — множитель преобразования $\tau_k(z)$ (в частности, и при $k = p$). Поскольку [2, с. 24] $K_k + K_k^{-1} = \operatorname{tr}^2(\tau_k) - 2$, в силу 1.5° множитель K_k равен либо K_p, либо $1/K_p$. Из (5) получим

$$K_k = \frac{[(a_k\gamma_k - c_k\alpha_k)\xi_1 + a_k\bar{\alpha}_k - c_k\bar{\gamma}_k](\gamma_k\xi_2 + \bar{\alpha}_k)}{[(a_k\gamma_k - c_k\alpha_k)\xi_2 + a_k\bar{\alpha}_k - c_k\bar{\gamma}_k](\gamma_k\xi_1 + \bar{\alpha}_k)},$$

$a_k\gamma_k - c_k\alpha_k = \bar\alpha_p\gamma_k - \gamma_p\bar\alpha_k$, $a_k\bar\alpha_k - c_k\bar\gamma_k = \alpha_p\bar\alpha_k - \bar\gamma_p\gamma_k$, откуда

$$K_k = K_p\frac{\left[\bar\alpha_k + \gamma_k\sigma_p^{-1}(\xi_1)\right](\bar\alpha_k + \gamma_k\xi_2)}{\left[\bar\alpha_k + \gamma_k\sigma_p^{-1}(\xi_2)\right](\bar\alpha_k + \gamma_k\xi_1)} = K_p.$$

Если σ_p — параболическое преобразование, то

$$[\tau_k(z) - \sigma_k(\xi_1)]^{-1} = [z - \sigma_k(\xi_1)]^{-1} + c_k,$$

и с учетом (5) получим $c_k = \gamma_p(\gamma_k\xi_1 + \bar\alpha_k)^2$ (считаем $\operatorname{Re} a_k = 1$). □

1.7°. $A(\sigma_p) \cap A(\sigma_p^n) = \varnothing$, *если выполняется любое из условий:*
(а) $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| > 2$ *и* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0;1\}$;
(б) $0 < |\operatorname{tr}(\sigma_p)| < 2$ (здесь $K_p = \exp(2\pi i/r)$, $1 \ne r \in \mathbb{N}$) *и* $K_p^{n-1} \ne 1$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$;
(в) $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| = 2$ *и* $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0;1\}$.

Доказательство. Выберем $\widetilde\Gamma$ одинаковым для классов $A(\sigma_p)$ и $A(\sigma_p^n)$.

В случаях (а), (б) справедливо соотношение [2, с. 26]

$$\frac{\sigma_p^n(z) - \xi_1}{\sigma_p^n(z) - \xi_2} = K_p^n\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}.$$

В силу 1.6° множители преобразований в $A(\sigma_p)$ равны K_p, а в $A(\sigma_p^n)$ — K_p^n. Поскольку они не совпадают, классы $A(\sigma_p)$ и $A(\sigma_p^n)$ состоят из разных преобразований.

В случае (в) предположим противное. Тогда для некоторого преобразования $\sigma \in \Gamma$ имеем $\sigma\sigma_p\sigma^{-1} = \sigma_p^n$, т. е.

$$\sigma\sigma_p = \sigma_p^n\sigma. \tag{6}$$

Перейдем к изоморфной группе Γ' преобразований σ_k' верхней полуплоскости в себя. Для этого возьмем преобразование $T(z) = i(\xi_1 + z)(\xi_1 - z)^{-1}$, отображающее круг U на верхнюю полуплоскость. Тогда $\sigma_k' = T\sigma_kT^{-1} = (\alpha_k'z + \beta_k')(\gamma_k'z + \delta_k')^{-1}$; $\alpha_k', \beta_k', \gamma_k', \delta_k' \in \mathbb{R}$, $\alpha_k'\delta_k' - \beta_k'\gamma_k' = 1$, причем $|\operatorname{tr}(\sigma_k)| = |\operatorname{tr}(\sigma_k')|$ (аналог свойства 1.5°), а $\sigma_p' = T\sigma_pT^{-1} = z + h$. Здесь $0 \ne h \in \mathbb{R}$. Обозначим $\sigma' = T\sigma T^{-1} = (\alpha z + \beta)(\gamma z + \delta)^{-1}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

В силу (6) $\sigma'\sigma_p' = (\sigma_p')^n\sigma'$. Это приведет к равенству

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha h + \beta \\ \gamma & \gamma h + \delta \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \alpha + nh\gamma & \beta + nh\delta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm 1.$$

При $\lambda = 1$ получим $\gamma = 0, \alpha = \delta n$, а при $\lambda = -1$ имеем $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, и для $n < 0$ равенство $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ невозможно. При $n > 1$ преобразование $\sigma'(z) = nz + \beta\sqrt{n}$ гиперболическое. Однако в фуксовой группе гиперболическое $\sigma'(z)$ и параболическое $\sigma_p'(z)$ преобразования не могут иметь общей неподвижной точки (в данном случае $z = \infty$) [5, с. 41]. Полученное противоречие завершает доказательство. □

1.8°. *Если* $A(\sigma_p) \cap A(\sigma_p^n) = \varnothing$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, *то* $\tau_k \in A(\sigma_p) \Rightarrow \tau_k^n \notin A(\sigma_p)$.

Это свойство следует из 1.4°.

Введем множество $B(\sigma)$ преобразований вида $\sigma\tau_k\sigma^{-1}$, где $\sigma \in \Gamma$ фиксировано, а τ_k пробегает все преобразования орбиты $A(\sigma_p)$.

1.9°. $A(\sigma_p) = B(\sigma)$.

Доказательство. Пусть $\tau_n \in A(\sigma_p)$, тогда $\tau_n = \sigma_n\sigma_p\sigma_n^{-1}$. Существует такое преобразование $\tau_k \in A(\sigma_p)$, что $\tau_n = \sigma\tau_k\sigma^{-1}$. Действительно, приравнивая два выражения для τ_n, имеем $\tau_k = \sigma^{-1}\sigma_n\sigma_p\sigma_n^{-1}\sigma \Rightarrow \tau_k \in A(\sigma_p)$. (Если $\sigma^{-1}\sigma_n \notin \widetilde{\Gamma}$, то существует такое $g \in C_\Gamma(\sigma_p)$, что $\sigma^{-1}\sigma_n g \in \widetilde{\Gamma}$).

Обратно, пусть $\tau_n \in B(\sigma)$, тогда $\tau_n = \sigma\tau_k\sigma^{-1}$. Существует такое $\sigma_n \in \widetilde{\Gamma}$, что $\tau_n = \sigma_n\sigma_p\sigma_n^{-1}$. В самом деле, так как $\tau_k \in A(\sigma_p)$, то $\tau_k = \sigma_k\sigma_p\sigma_k^{-1}$. Далее, $\tau_n = \sigma\sigma_k\sigma_p\sigma_k^{-1}\sigma^{-1} = \sigma_n\sigma_p\sigma_n^{-1}$, где $\sigma_n = \sigma\sigma_k g \in \widetilde{\Gamma}$, $g \in C_\Gamma(\sigma_p)$. □

§ 2. Свойства автоморфной формы, построенной по множеству преобразований орбиты

Рассмотрим функцию

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[\frac{\tau_k'(z)}{[\tau_k(z) - z]^2}\right]^{m/2} = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} [c_k z^2 + (\bar{a}_k - a_k)z - \bar{c}_k]^{-m}. \qquad (7)$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, $\tau_k(z) = (a_k z + \bar{c}_k)(c_k z + \bar{a}_k)^{-1}$, $|a_k|^2 - |c_k|^2 = 1$. Для фиксации корня предполагаем, что $-\pi/2 < \arg a_k \le \pi/2$. Поскольку $c_k z^2 + (\bar{a}_k - a_k)z - \bar{c}_k = c_k\bigl(z - \xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(z - \xi_2^{(k)}\bigr) = c_k[z - \sigma_k(\xi_1)][z - \sigma_k(\xi_2)]$, где $\sigma_p(\xi_i) = \xi_i$, $\tau_k\bigl(\xi_i^{(k)}\bigr) = \xi_i^{(k)}$, $i = 1, 2$, то

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \{c_k[z - \sigma_k(\xi_1)][z - \sigma_k(\xi_2)]\}^{-m}. \qquad (8)$$

Функция $F_m(z)$ обладает следующими свойствами.

2.1°. *Функция $F_m(z)$ мероморфна на любом компакте $Q \in \overline{\mathbb{C}}$, не содержащем предельных точек группы Γ при $m \ge 2$ для фуксовой группы второго рода и при $m \ge 4$ для фуксовой группы первого рода* (*см.* [3, *с.* 981] *с заменой m на $m/2$*).

2.2°. *При $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| < 2$ свойство* 2.1° *справедливо при $m \ge 1$ для фуксовой группы второго рода и при $m \ge 2$ для фуксовой группы первого рода.*

Доказательство. Слагаемые ряда (7) имеют полюсы только в неподвижных точках $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}$ эллиптических преобразований τ_k, расположенных в Q. Множество таких точек конечно, т. е. конечно и множество слагаемых, имеющих полюсы в Q. Для остальных членов ряда получим оценку

$$\bigl|c_k\bigl(z - \xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(z - \xi_2^{(k)}\bigr)\bigr|^{-m} \le |c_k|^{-m} d^{-2m},$$

где $|z - \xi_i^{(k)}| \ge d > 0$, $i = 1, 2$, и d — расстояние от границы ∂Q до ближайшей к ней и расположенной вне Q неподвижной точки преобразований орбиты $A(\sigma_p)$. Далее, используя (5), имеем

$$\begin{aligned}|c_k| &= \bigl|\gamma_p\bar{\alpha}_k^2 + (\alpha_p - \bar{\alpha}_p)\bar{\alpha}_k\gamma_k - \bar{\gamma}_p\gamma_k^2\bigr| \\ &= |\gamma_k|^2|\gamma_p(\bar{\alpha}_k/\gamma_k)^2 + (\alpha_p - \bar{\alpha}_p)\bar{\alpha}_k/\gamma_k - \bar{\gamma}_p| = |\gamma_k|^2|\gamma_p||\bar{\alpha}_k/\gamma_k + \xi_1||\bar{\alpha}_k/\gamma_k + \xi_2|.\end{aligned}$$

Здесь $(-\bar{\alpha}_k/\gamma_k)$ — центры изометрических окружностей преобразований $\sigma_k(z)$ (они расположены вне ∂U), а ξ_1, ξ_2 — неподвижные точки преобразования $\sigma_p(z)$.

Поскольку предельные точки множества центров изометрических окружностей лежат на ∂U, то начиная с некоторого номера k справедлива оценка

$$|c_k|^{-m} d^{-2m} \le |\gamma_k|^{-2m}|\gamma_p|^{-m}(d_1 d)^{-2m},$$

где $|\bar{\alpha}_k/\gamma_k+\xi_i|>d_1>0$, $i=1,2$. Таким образом, получен мажорирующий ряд

$$|\gamma_p|^{-m}(d_1 d)^{-2m}\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k|^{-2m}$$

по всем коэффициентам преобразований σ_k группы Γ, который сходится при $m\geq 1$ и $m\geq 2$ соответственно для фуксовых групп второго и первого рода. □

Заметим, что при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)|\geq 2$ свойство 2.2°, к сожалению, не имеет места, так как неподвижные точки преобразования σ_p лежат на ∂U.

2.3°. *Мероморфная функция $F_m(z)$ есть автоморфная форма веса $-2m$, т. е.*

$$\forall\sigma_j(z)=\frac{\alpha_j z+\bar{\gamma}_j}{\gamma_j z+\bar{\alpha}_j}\in\Gamma\quad F_m[\sigma_j(z)]=(\gamma_j z+\bar{\alpha}_j)^{2m}F_m(z). \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$F_m[\sigma_j(z)]=(\gamma_j z+\bar{\alpha}_j)^{2m}\sum_{\tau_k\in A(\sigma_p)}[C_{kj}z^2+(\overline{A}_{kj}-A_{kj})z-\overline{C}_{kj}]^{-m},$$

где

$$C_{kj}=c_k\alpha_j^2+(\bar{a}_k-a_k)\alpha_j\gamma_j-\bar{c}_k\gamma_j^2, \tag{10}$$

$\overline{A}_{kj}-A_{kj}=(\bar{a}_k-a_k)(|\alpha_j|^2+|\gamma_j|^2)+2c_k\alpha_j\bar{\gamma}_j-2\bar{c}_k\bar{\alpha}_j\gamma_j$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{\sigma_j^{-1}\tau_k\sigma_j}\bigl[C_{kj}^{(1)}z^2+\bigl(\overline{A}_{kj}^{(1)}-A_{kj}^{(1)}\bigr)z-\overline{C}_{kj}^{(1)}\bigr]^{-m}, \tag{11}$$

где $\sigma_j^{-1}\tau_k\sigma_j=\bigl(A_{kj}^{(1)}z+\overline{C}_{kj}^{(1)}\bigr)\bigl(C_{kj}^{(1)}z+\overline{A}_{kj}^{(1)}\bigr)^{-1}$, $\tau_k\in A(\sigma_p)$ пробегает все преобразования орбиты $A(\sigma_p)$, а $\sigma_j(z)$ фиксировано, т. е. преобразования $\sigma_j^{-1}\tau_k\sigma_j$ образуют множество $B\bigl(\sigma_j^{-1}\bigr)$.

По свойству 1.9° имеем $A(\sigma_p)=B\bigl(\sigma_j^{-1}\bigr)$. Поэтому ряд (11) при фиксации коэффициентов $A_{kj}^{(1)}$: $-\pi/2<\arg A_{kj}^{(1)}\leq\pi/2$ является функцией $F_m(z)$. Покажем, что

$$C_{kj}^{(1)}=C_{kj},\quad \overline{A}_{kj}^{(1)}-A_{kj}^{(1)}=\overline{A}_{kj}-A_{kj}, \tag{12}$$

откуда и будет следовать (9).

Действительно, непосредственным вычислением устанавливаем, что

$A_{kj}^{(1)}=\pm(a_k|\alpha_j|^2+\bar{c}_k\bar{\alpha}_j\gamma_j-c_k\alpha_j\bar{\gamma}_j-\bar{a}_k|\gamma_j|^2)$, $C_{kj}^{(1)}=\pm\bigl[c_k\alpha_j^2+(\bar{a}_k-a_k)\alpha_j\gamma_j-\bar{c}_k\gamma_j^2\bigr]$,

причем знаки плюс или минус берутся одновременно. Заметим, что $A_{kj}^{(1)}+\overline{A}_{kj}^{(1)}=\pm(a_k+\bar{a}_k)$. Значит, при $\operatorname{Re}a_k\neq 0$ имеем $\operatorname{Re}A_{kj}^{(1)}\neq 0$, и с учетом фиксации $\arg A_{kj}^{(1)}$ и $\arg a_k$ равенство соблюдается только при верхнем знаке, откуда следует (12).

Пусть $\operatorname{Re}a_k=0$, а следовательно, $\operatorname{Im}a_k>0$. Это случай эллиптического преобразования τ_k. Его неподвижные точки сопряжены относительно единичной окружности ∂U. Обозначим их через $\xi_1^{(k)}=(a_k-i)/c_k$, $\xi_2^{(k)}=(a_k+i)/c_k$, тогда $\operatorname{Im}a_k>0\Leftrightarrow\bigl|\xi_1^{(k)}\bigr|<1$ и $c_k=2i/\bigl(\xi_2^{(k)}-\xi_1^{(k)}\bigr)$. Преобразование $\sigma_j^{-1}\tau_k\sigma_j$ имеет неподвижные точки $z_i=\sigma_j^{-1}\bigl(\xi_i^{(k)}\bigr)$, $i=1,2$, причем $|z_1|<1$, так как $\sigma_j^{-1}(z)$

отображает внутренность круга U в себя, а значит, в силу того, что $\operatorname{Im} A_{kj}^{(1)} > 0$, получим

$$C_{kj}^{(1)} = \frac{2i}{z_2 - z_1} = \frac{2i\bigl(\alpha_j - \gamma_j \xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(\alpha_j - \gamma_j \xi_2^{(k)}\bigr)}{\xi_2^{(k)} - \xi_1^{(k)}}.$$

С другой стороны, из (10) следует, что

$$C_{kj} = \gamma_j^2 \left[c_k \left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j} \right)^2 + (\bar{a}_k - a_k) \frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \bar{c}_k \right] = \gamma_j^2 c_k \left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \xi_1^{(k)} \right) \left(\frac{\alpha_j}{\gamma_j} - \xi_2^{(k)} \right) = C_{kj}^{(1)}.$$

Свойство 2.3° доказано. □

Тем самым построен *лакунарный аналог тэта-ряда Пуанкаре.* При этом снято приведенное в [3] ограничение на вид группы.

Замечание 1. При четном m доказательство свойства 2.3° значительно проще и совпадает с приведенным в работе [3, с. 981]. При нечетном m потребовалось новое доказательство, изложенное выше. Дело в том, что коэффициенты преобразований (4) с учетом приведенной там традиционной нормировки определяются не однозначно, а лишь с точностью до знака. Выбор знака становится существенным (см. формулу (7)).

Следующие свойства характеризуют поведение функции $F_m(z)$ в окрестности вершин фундаментального многоугольника.

2.4°. *В окрестности неподвижной точки $\xi \in \partial D$ параболического преобразования $\sigma(z) = (\alpha z + \bar{\gamma})/(\gamma z + \bar{\alpha})$, где ∂D — граница внутренности фундаментального многоугольника D, справедливо представление $F_m(z) = (\gamma \ln t / 2\pi i)^{2m} g(t)$, где*

$$t = \exp[2\pi i / \gamma(z - \xi)], \tag{13}$$

$z \in D$, $g(t)$ аналитична в $t = 0$.

Доказательство. Пусть граница ∂D имеет параболическую точку ξ, неподвижную точку порождающего преобразования $\sigma(z) = (\alpha z + \bar{\gamma})/(\gamma z + \bar{\alpha}) \in \Gamma$, $\operatorname{Re} \alpha = 1$. Следуя [2, с. 120], введем функцию $G(z) = (z - \xi)^{2m} F_m(z)$, автоморфную по отношению к параболической циклической подгруппе. После замены (13) получим функцию $g(t) = G(z)$, однозначную в окрестности $t = 0$. Исследуем $G(z)$ при $z \in D \cap U_\varepsilon$, где ∂U_ε — окружность радиуса ε, проходящая через точки ξ, z_1, z_2, где z_1, z_2 — конгруэнтные точки (см. [2, с. 46]) на сторонах ∂D, исходящих из ξ. Имеем

$$G(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \frac{(z - \xi)^{2m}}{\bigl[c_k \bigl(z - \xi_1^{(k)}\bigr)\bigl(z - \xi_2^{(k)}\bigr)\bigr]^m}.$$

Выберем ε настолько малым, что в треугольнике $z_1 z_2 \xi$ не будет, кроме ξ, неподвижных точек других преобразований группы Γ. Тогда ни одна точка $\xi_i^{(k)}, i = 1, 2$, не лежит в $\overline{U}_\varepsilon$, кроме случая $\xi_1^{(p)} = \xi_2^{(p)} = \xi$ при $\sigma_p = \sigma$. Существует конечный предел $\lim G(z)$ при $z \to \xi$, когда $z \in D$, т. е. z стремится к ξ по некасательному к окружности ∂U пути. Это следует из оценки $\bigl|(z - \xi)/\bigl(z - \xi_i^{(k)}\bigr)\bigr| < K$ и сходимости ряда $\sum |c_k|^{-m}$. □

2.5°. *В эллиптической точке $\xi \in \partial D$ функция $F_m(z)$ имеет полюс, причем порядка m, тогда и только тогда, когда точка ξ конгруэнтна неподвижной точке преобразования σ_p или совпадает с ней. В других случаях $F_m(z)$ аналитична в точке ξ.*

Это свойство следует из представления (8).

2.6°. *Автоморфная форма $F_m(z)$ удовлетворяет соотношению*

$$F_m(z) = (-1)^m z^{-2m} \overline{F_m(1/\bar{z})}, \quad z \in U.$$

Если Γ — фуксова группа второго рода, то

$$F_m(t) = (-1)^m t^{-2m} \overline{F_m(t)}, \quad t \in \partial U \cap D.$$

Это свойство получим, взяв $F(z)$ в виде (7).

Теорема 1. *Автоморфная форма $F_m(z)$, построенная по орбите эллиптического или параболического преобразования $\sigma_p(z)$, нетривиальна.*

Доказательство. Действительно, если $\sigma_p(z)$ — эллиптическое преобразование, то $F_m(z) \not\equiv 0$, так как согласно свойству 2.5° $F_m(z)$ имеет полюсы.

Пусть $\sigma_p(z)$ — параболическое преобразование, тогда

$$F_m(z) = \sum_{\tau_k \in A(\sigma_p)} \left[c_k\left(z - \xi_1^{(k)}\right)^2\right]^{-m}.$$

Неподвижные точки $\xi_1^{(k)} = \sigma_k(\xi_1)$ параболических преобразований τ_k различны. Это следует из того, что два параболических преобразования фуксовой группы имеют общую неподвижную точку только в случае, когда они принадлежат одной циклической подгруппе, а таких преобразований в $A(\sigma_p)$ нет (доказательство аналогично свойству 1.7°(в)).

Лемма. *Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty$, $\beta_k \neq 0$ для любых k, z_k — различные точки единичной окружности. Тогда*

$$h_q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (z - z_k)^{-q} \not\equiv 0, \quad |z| < 1, \ q > 0. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку $\beta_k \to 0$, существует один или несколько членов из последовательности $\{\beta_k\}$ с наибольшим модулем. Выберем один из них, пусть β_{k_0}. Возьмем произвольную точку a $(0 < |a| < 1)$ на радиусе, проведенном к точке z_{k_0}. Для всех $k \neq k_0$ имеем $|a - z_k| > |a - z_{k_0}|$. Поэтому $(a - z_k)^{-1} = r_k \exp(i\varphi_k)$, где $\varphi_k \in [0, 2\pi)$, а наибольшим из r_k является r_{k_0}. Вычислим коэффициенты Тейлора функции $h_q(z)$ в точке a и предположим, что все они равны нулю:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k r_k^{n+q} \exp[i(n+q)\varphi_k] = 0 \quad \forall n. \tag{15}$$

Существует единственный член ряда (15) с наибольшим модулем $|\beta_{k_0}| r_{k_0}^{n+q}$. Поделим (15) на $|\beta_{k_0}| r_{k_0}^{n+q}$ и, переходя к пределу при $n \to \infty$, придем к противоречию, так как левая часть не будет равна нулю. Лемма доказана.

Положив в (14) $\beta_k = c_k^{-m}$, $q = 2m$, $z_k = \xi_1^{(k)}$, получим утверждение теоремы. □

Замечание 2. Начиная с некоторого номера k все коэффициенты Тейлора функции (14) в точке a отличны от нуля.

Замечание 3. Разложим функцию (14) при $q = 1$ в ряд Маклорена, т. е.

$$h_1(z) = -\sum_{j=0}^{\infty} G(j) z^j.$$

Здесь функция коэффициентов

$$G(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\exp[-i(z+1)\arg z_k]$$

— почти периодическая целая функция вполне регулярного роста с ограниченным спектром, лежащим на мнимой оси [6, гл. VI, § 1, 2]. При $\beta_k=\gamma_k^{-m}$ и $z_k=\xi_1^{(k)}$ имеем $h_1^{(2m-1)}(z)=(2m-1)!F_m(z)$. Интерполяционная задача $G(j)=\beta_j$, $j=1,2,\dots$, в классе таких функций не может иметь более одного решения, что следует из доказательства леммы.

Теорема 2. *Пусть σ_p — гиперболическое преобразование. При $k\to\infty$ существует такая последовательность $m_k\to\infty$, что $F_{m_k}(z)\not\equiv 0$. Если Γ — фуксова группа второго рода, а m — четное число, то $F_m(z)\not\equiv 0$.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из [4, с. 725]. В случае фуксовой группы второго рода в область D попадают дуги окружности ∂U. Пусть $z_0=\exp(i\varphi_0)\in D$. Тогда из (7) вытекает, что

$$F_m(z_0)=(2i)^{-m}e^{-i\varphi_0 m}\sum_{\tau_k\in A(\sigma_p)}[\operatorname{Im}(c_ke^{i\varphi_0}-a_k)]^{-m}.$$

При четном m имеем ряд из положительных членов, откуда $F_m(z)\not\equiv 0$. Теорема доказана. $\square$

Теперь покажем, что функцию $F_m(z)$ при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)|\neq 2$ можно привести к виду

$$F_m(z)=\left(\frac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt{\operatorname{tr}^2(\sigma_p)-4}}\right)^m\sum_{\sigma_k^{-1}\in\widetilde{\Gamma}}\left[\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z)-\xi_1][\sigma_k(z)-\xi_2]}\right]^m, \qquad (16)$$

где $\sigma_p(\xi_i)=\xi_i$, $i=1,2$, и к виду

$$F_m(z)=\frac{1}{\gamma_p^m}\sum_{\sigma_k^{-1}\in\widetilde{\Gamma}}\left[\frac{\sigma_k'(z)}{[\sigma_k(z)-\xi_1]^2}\right]^m \qquad (17)$$

при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)|=2$.

Преобразуем функцию $F_m(z)$, исходя из вида (8). Если $|\operatorname{tr}(\sigma_p)|\neq 2$, то $c_k=\sqrt{M}\bigl(\xi_1^{(k)}-\xi_2^{(k)}\bigr)^{-1}=\sqrt{M}[\sigma_k(\xi_1)-\sigma_k(\xi_2)]^{-1}$, где $\sqrt{M}=\sqrt{\operatorname{tr}^2(\sigma_p)-4}$, и корень фиксирован одинаково для всех c_k. Если $|\operatorname{tr}(\sigma_p)|=2$, то $c_k=\gamma_p(\gamma_k\xi_1+\bar{\alpha}_k)^2$. Далее,

$$z-\sigma_k(\xi_i)=\frac{\xi_i-\sigma_k^{-1}(z)}{\gamma_k\xi_i+\bar{\alpha}_k}(\gamma_kz-\alpha_k),\quad i=1,2,$$

$$\sigma_k(\xi_1)-\sigma_k(\xi_2)=\frac{\xi_1-\xi_2}{(\gamma_k\xi_1+\bar{\alpha}_k)(\gamma_k\xi_2+\bar{\alpha}_k)}.$$

Отсюда, заменив $\sigma_k(z)$ на $\sigma_k^{-1}(z)$, получим (16) и (17) соответственно. $\square$

Замечание 4. Используя представление (17) и рассуждения, аналогичные приведенным в работе [1, с. 80], можно доказать, что

$$\lim[F_m(z)(z-\xi_1)^{2m}]=1/\gamma_p^m$$

при $z\to\xi_1$, $z\in D$.

Это равенство уточняет свойство 2.4°, показывая, что $g(0)\neq 0$, и означает (как и теорема 1), что $F_m(z)\not\equiv 0$.

Теорема 3. *Пусть $F_m(z;\sigma)$ — функция, определенная рядом (7) при $\tau_k \in A(\sigma)$, функции $F_m(z;\sigma_p^n)$, $n \in \mathbb{N}$, линейно зависимы. Если $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| = |\operatorname{tr}(\sigma_q)| = 2$ и неподвижные точки преобразований σ_p, σ_q не конгруэнтны, то функции $F_m(z;\sigma_p), F_m(z;\sigma_q)$ линейно независимы.*

Доказательство. Поскольку множество $\widetilde{\Gamma}$ в орбитах $A(\sigma_p^n)$ можно взять одним и тем же, а неподвижные точки ξ_1, ξ_2 преобразований σ_p^n совпадают, то из (16) следует, что $F_m(z;\sigma_p^n) = F(z;\sigma_p)[\operatorname{tr}^2(\sigma_p) - 4]^{m/2}[\operatorname{tr}^2(\sigma_p^n) - 4]^{-m/2}$ при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| \neq 2$, а из (17) — что $F_m(z;\sigma_p^n) = n^{-m}F_m(z;\sigma_p)$ при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| = 2$.

Докажем вторую часть теоремы. Никакие два преобразования из совокупности преобразований орбит $A(\sigma_p)$ и $A(\sigma_q)$ не могут иметь общую неподвижную точку. Это следует из того, что неподвижные точки преобразований каждой из орбит конгруэнтны и различны, а совпадение неподвижных точек двух преобразований из разных орбит означало бы конгруэнтность неподвижных точек преобразований σ_p и σ_q. Применив лемму к линейной комбинации $C_1F_m(z;\sigma_p) + C_2F_m(z;\sigma_q)$, получим, что она не равна тождественно нулю. $\square$

В заключение дадим сравнительный анализ тэта-ряда Пуанкаре и функции $F_m(z)$. Из представлений (16) и (17) следует, что построенный ряд $F_m(z)$ отличается от тэта-ряда Пуанкаре, во-первых, тем, что $\sigma_k(z)$ пробегает не всю группу Γ, а лишь ее подмножество, причем в ряде (7) каждое слагаемое зависит от меньшего числа параметров, чем соответствующие члены тэта-ряда Пуанкаре. Это связано с тем, что в ряде (2) для преобразования (4) каждое слагаемое содержит три вещественных параметра, а в $F_m(z)$ — два, так как кроме обычной нормировки $|\alpha_k|^2 - |\gamma_k|^2 = 1$ здесь фиксирован след: $|\operatorname{tr}(\tau_k)| = |\operatorname{tr}(\sigma_p)|$. Второе отличие состоит в том, что рациональная функция $H(z) = [(z-\xi_1)(z-\xi_2)]^{-m}$ при $|\operatorname{tr}(\sigma_p)| \geq 2$ имеет полюсы в предельных точках группы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* Избранные труды. М.: Наука, 1974. Т. III.
2. *Форд Л. Р.* Автоморфные функции. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
3. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 977–986.
4. *Аксентьева Е. П., Гарифьянов Ф. Н.* Эффективное решение задачи Карлемана для некоторых групп расходящегося типа // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 723–732.
5. *Каток С. Б.* Фуксовы группы. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.

Статья поступила 23 апреля 2006 г.

Аксентьева Евгения Павловна
Казанский гос. университет, кафедра общей математики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Evgenija.Aksenteva@ksu.ru

Гарифьянов Фархат Нургаязович
Казанский гос. энергетический университет, кафедра высшей математики,
ул. Красносельская, 51, Казань 420066
f.garifyanov@mail.ru