Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.928.4:517.929.5

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. А. Чумаков

Аннотация: Дан качественный анализ системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции. Рассмотрена кинетическая модель, которая учитывает влияние реакционной среды на катализатор. А именно, в дифференциальных уравнениях введена экспоненциальная зависимость с показателем μ константы скорости реакции от покрытия поверхности кислородом. В зависимости от параметра μ исследованы как необходимые, так и достаточные условия существования периодических решений в рассматриваемой динамической системе. Сформулированы достаточные условия стабилизации всех решений к стационарным состояниям и изучено глобальное поведение устойчивых многообразий седловых особых точек.

Ключевые слова: нелинейная динамика, обыкновенное дифференциальное уравнение, периодическое решение, кинетическая модель.

§ 1. Введение

Рассмотрим систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая соответствует простейшей кинетической модели автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции окисления водорода на металлических катализаторах [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= K_1(1-x_1-x_2)^2 - K_{-1}x_1^2 - 2k_{30}e^{-\mu x_2}x_1^2x_2 \equiv f_1(x_1,x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} &= K_2(1-x_1-x_2)^2 - K_{-2}x_2^2 - k_{30}e^{-\mu x_2}x_1^2x_2 \equiv f_2(x_1,x_2), \end{aligned} \tag{1}$$

в области $G = \left\{\vec{x} = (x_1,x_2) \in R_+^2 : x_1 + x_2 \le 1\right\}$. Здесь x_1, x_2 — поверхностные концентрации адсорбированных водорода и кислорода соответственно, K_1, K_2 пропорциональны константам скоростей адсорбции водорода и кислорода, а K_{-1} и K_{-2} — константы скоростей десорбции этих веществ с поверхности катализатора, k_{30} — константа скорости взаимодействия адсорбированных веществ, μ — неотрицательный действительный параметр, $\vec{f} = (f_1, f_2)$.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой представлена более полная модель и изучены ее общие свойства. Полная математическая модель описывает изменения поверхностных концентраций и состава газовой фазы, а также учитывает происходящие в системе процессы растворения водорода и кислорода в приповерхностный слой катализатора в предположении, что градиенты растворенных веществ малы. В работе [1] показана справедливость принципа квазистационарности, что позволяет исключить быстрые переменные, не меняя существенно общих свойств модели, и получить асимптотическую модель (1).

Настоящая работа посвящена исследованию кинетической модели (1). Нас интересуют как необходимые, так и достаточные условия существования периодических решений в системе (1) в зависимости от параметра μ. Для получения этих условий мы используем аналитико-топологические методы, которые позволяют доказать наличие или отсутствие предельных циклов в конкретной системе с некоторыми вполне определенными параметрами. Мы сформулируем достаточные условия стабилизации всех решений к стационарным состояниям и отсутствия в области G замкнутых гомоклинических контуров, состоящих из стационарных точек и целых траекторий системы, а также изучим глобальное поведение устойчивых многообразий седловых особых точек.

Изучая общие свойства решений системы (1), мы докажем, что

1) решения с начальными данными из G существуют для всех $t > 0$, положительны и ограничены, а именно если $\vec{x}(0) \in G$, то $\vec{x}(t) \in G$ для всех $t > 0$;

2) в области G существует хотя бы одна особая точка, индекс каждой особой точки не превосходит по модулю 1 и число особых точек с ненулевым индексом всегда нечетное;

3) если параметр μ удовлетворяет одному из неравенств

$$\mu \leq 9, \tag{i}$$

$$\mu \leq 2 + 2K_1/K_2, \tag{ii}$$

$$\mu \leq \frac{k_{30}}{k_{30} - e(\sqrt{K_1 K_{-1}} + K_{-1})}, \tag{iii}$$

то система (1) не имеет периодических решений;

4) если

$$k_{30} \leq e(\sqrt{K_1 K_{-1}} + K_{-1}) \tag{iv}$$

или $K_{-2} = 0$, то система (1) не имеет периодических решений ни при каких значениях параметра μ;

5) если $K_{-1} \neq 0$ и выполняется неравенство

$$\mu \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8K_{-2}/K_{-1}}), \tag{v}$$

то состояние равновесия системы (1) является единственным в G; если, кроме того, особая точка неустойчива, то система (1) имеет устойчивый предельный цикл;

6) если при $K_{-1} \neq 0$ выполняется неравенство (v) и верно одно из условий (i)–(iv), то состояние равновесия асимптотически устойчиво в целом;

7) если $K_{-1} = 0$, то система (1) имеет периодические решения при некоторых значениях параметра μ.

§ 2. Число состояний равновесия, их индекс и тип

Состояния равновесия системы (1) являются точками пересечения главных изоклин

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \tag{2}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{3}$$

Для определения всех решений системы (2), (3) введем функцию

$$K_2(x_2) = \frac{K_{-2}x_2^2 + k_{30}e^{-\mu x_2}x_1^2(x_2)x_2}{[1 - x_1(x_2) - x_2]^2}, \tag{4}$$

где $x_1(x_2)$ определяется уравнением (2) в области G и имеет явный вид

$$x_1(x_2) = \frac{\sqrt{K_1}(1 - x_2)}{\sqrt{K_1} + \sqrt{2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2 + K_{-1}}}. \tag{5}$$

График функции (5) пересекает границу ∂G области G при $x_2 = 0$ и $x_2 = 1$:

$$x_1(0) = \sqrt{K_1}/(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_{-1}}), \quad x_1(1) = 0. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (4), получим

$$K_2(x_2) = 0 \quad \text{при} \quad x_2 = 0, \tag{7}$$

$$K_2(x_2) \to +\infty \quad \text{при} \quad x_2 \to 1. \tag{8}$$

Так как функция $K_2(x_2)$ непрерывна по x_2 на интервале $(0, 1)$, то из (7), (8) следует, что для любого $K_2 > 0$ в G существует по крайней мере одно состояние равновесия системы (1).

Покажем, что число состояний равновесия системы (1) конечно. Для этого заметим, что в области $G^\varepsilon = \{\vec{x} \in G : 1 - \varepsilon < x_1 + x_2 < 1, \varepsilon > 0\}$ система (2), (3) не имеет решений при достаточно малом ε. Далее, функция $K_2(x_2)$ является аналитической для $(x_1(x_2), x_2) \in G \backslash G^\varepsilon$ и, следовательно, принимает заданное значение K_2 конечное число раз при изменении x_2 в интервале $0 \le x_2 \le 1$. Это означает, что число состояний равновесия системы (1) конечно.

Используя теорию индекса Пуанкаре, можно получить сведения о числе особых точек системы (1) в G.

Индекс особой точки. Пусть C — простая замкнутая кривая, v — заданное на ней векторное поле, а d — некоторая прямая на плоскости (x_1, x_2). Предположим, что существует только конечное число точек M_k ($k = 1, 2, \dots, n$) кривой C, в которых вектор $v(M)$ направлен параллельно прямой d. Предположим, что кривая C обходится точкой M в положительном направлении, и пусть p есть число точек M_k, при прохождении через которые вектор $v(M)$ проходит через направление прямой d, двигаясь против часовой стрелки. Пусть, далее, q — число точек M_k, в которых вектор $v(M)$ проходит направление прямой d, двигаясь по часовой стрелке. Точки M_k, в которых вектор $v(M)$ достигает направления d, двигаясь, скажем, по часовой стрелке, а потом начинает двигаться в обратном направлении (или наоборот), мы не будем принимать во внимание. Тогда *индекс кривой* C равен $(p - q)/2$.

Индексом (или *индексом Пуанкаре*) *изолированной особой точки* O векторного поля v, соответствующего динамической системе, называется индекс любой замкнутой кривой C, содержащей внутри себя точку O, причем такой, что ни внутри C, ни на ней самой нет других особых точек поля v.

Лемма 1. *Сумма индексов особых точек системы* (1), *расположенных в* G, *равна* $+1$.

Доказательство. При обходе границы ∂G области G в положительном направлении вектор $\vec{f}$ проходит направление прямой $x_1 = 0$ в двух точках: $M_1 = (0, 1)$ и $M_2 = (\sqrt{K_1}/(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_{-1}}), 0)$, двигаясь против часовой стрелки, т. е. $p = 2$, $q = 0$. Следовательно, индекс кривой ∂G равен 1. Индекс же замкнутой кривой равен сумме индексов особых точек, расположенных внутри этой кривой. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* ∂G_α *— граница области* $G_\alpha = \{\vec{x} \in G : x_2 \geq \alpha, 0 \leq \alpha < 1\}$. *Индекс кривой* ∂G_α *равен нулю, если* $\alpha \geq \alpha_0$, *и равен нулю или единице, если* $\alpha < \alpha_0$, *где* $\alpha_0 = \sqrt{K_2}/(\sqrt{K_2} + \sqrt{K_{-2}})$.

Доказательство. Система (1) не имеет особых точек в G_{α_0}, так как $f_2(\vec{x}) < 0$ для $\vec{x} \in G_{\alpha_0}$ и на границе ∂G_{α_0} функция $f_2(\vec{x})$ обращается в нуль в единственной точке $(0, \alpha_0)$, в которой $f_1 > 0$. Следовательно, индекс кривой ∂G_α при $\alpha \geq \alpha_0$ равен нулю.

Для $\alpha < \alpha_0$ при обходе ∂G_α в положительном направлении вектор $\vec{f}$ проходит направление прямой $x_1 = 0$ в двух точках: $N_1 = (0, 1)$ и $N_2 = (x_1(\alpha), \alpha)$, причем в N_1 — двигаясь против часовой стрелки, а в N_2 вектор $\vec{f}$ может проходить направление прямой $x_1 = 0$, двигаясь как против часовой стрелки, так и по часовой стрелке. Следовательно, индекс кривой ∂G_α будет равен либо единице, либо нулю. Лемма доказана.

Сформулируем два утверждения, вытекающие из леммы 2.

Следствие. *Система* (1) *не может иметь в области* G *особой точки с индексом, по модулю большим единицы.*

Принцип нечетности. Если $\vec{x}_s$ — особая точка системы (1) с индексом, равным -1, то имеется по крайней мере еще две особые точки с индексом $+1$, причем особые точки с индексами, равными $+1$ или -1, при убывании координаты x_2 чередуются следующим образом: $+1, -1, +1, \ldots$. Таким образом, число стационарных точек с ненулевым индексом всегда нечетное, и число особых точек типа узла (фокуса) всегда на единицу больше числа седел.

§ 3. Достаточные условия единственности состояния равновесия

Линеаризуем систему (1) вблизи состояния равновесия $\vec{x}_s = (x_{1S}, x_{2S})$:

$$\dot{\vec{x}} = A(\vec{x} - \vec{x}_s), \tag{9}$$

где элементы a_{ij} матрицы A определяются следующим образом:

$$\begin{gathered} a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_s} \quad (i, j = 1, 2), \\ a_{11} = -2K_1(1 - x_{1S} - x_{2S}) - 2K_{-1}x_{1S} - 4k_{30}x_{1S}x_{2S}e^{-\mu x_{2S}}, \\ a_{12} = -2K_1(1 - x_{1S} - x_{2S}) + 2k_{30}x_{1S}^2(\mu x_{2S} - 1)e^{-\mu x_{2S}}, \\ a_{21} = -2K_2(1 - x_{1S} - x_{2S}) - 2k_{30}x_{1S}x_{2S}e^{-\mu x_{2S}}, \\ a_{22} = -2K_2(1 - x_{1S} - x_{2S}) - 2K_{-2}x_{2S} + k_{30}x_{1S}^2(\mu x_{2S} - 1)e^{-\mu x_{2S}}. \end{gathered} \tag{10}$$

Характеристическое уравнение запишем в виде

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0, \tag{11}$$

где

$$\sigma = a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{12}$$

Состояние равновесия с индексом, равным $+1$, будет неустойчивым, если

$$\Delta > 0, \quad \sigma > 0. \tag{13}$$

Выразим K_1 и K_2 из уравнений (2), (3):

$$K_1 = \frac{K_{-1}x_{1S}^2 + 2k_{30}x_{1S}^2 x_{2S} e^{-\mu x_{2S}}}{(1 - x_{1S} - x_{2S})^2}, \quad K_2 = \frac{K_{-2}x_{2S}^2 + k_{30}x_{1S}^2 x_{2S} e^{-\mu x_{2S}}}{(1 - x_{1S} - x_{2S})^2}. \tag{14}$$

С учетом (14) после громоздких, но несложных преобразований условия (13) приводятся к следующему виду:

$$x_{1S}\big\{K_{-1}\big[2K_{-2}x_{2S} + k_{30}x_{1S}^2(1 - x_{2S})(1 - \mu x_{2S})e^{-\mu x_{2S}}\big] \\ + 2k_{30}K_{-2}x_{2S}^2(2 + \mu x_{1S}x_{2S} - x_{1S})e^{-\mu x_{2S}}\big\} > 0, \tag{15}$$

$$2K_{-1}x_{1S}(x_{2S} - 1) + 2K_{-2}x_{2S}(x_{1S} - 1) + k_{30}x_{1S}e^{-\mu x_{2S}} \\ \times [2x_{2S}(2x_{2S} - x_{1S} - 2) + x_{1S}(1 - x_{1S} - x_{2S})(\mu x_{2S} - 1)] > 0. \tag{16}$$

Теорема 1. *При* $K_{-1} \neq 0$ *и*

$$\mu \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 8K_{-2}/K_{-1}}) \tag{17}$$

состояние равновесия системы (1) *единственно в* G *и индекс его равен* $+1$.

Доказательство. Докажем сначала, что если условие (15) выполняется для всех $\vec{x} \in G$, то в области G существует единственная особая точка и ее индекс равен $+1$. Предположим обратное, что в G имеется $m > 1$ особых точек. Тогда сумма индексов этих особых точек равна $+m$, так как индекс особой точки $\vec{x}_s$ векторного поля $\vec{f}$ определяется равенством

$$\operatorname{ind}(\vec{x}_s, \vec{f}) = \operatorname{sign} \Delta(\vec{x}_s),$$

если $\Delta(\vec{x}_s) \neq 0$ [2]. С другой стороны, из леммы 1 следует, что сумма индексов особых точек системы (1), расположенных в G, равна $+1$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, утверждение о единственности особой точки при выполнении (15) доказано.

Покажем теперь, что при выполнении неравенства (17) условие (15) имеет место для всех $\vec{x}_s \in G$. При $\mu < 1$ это очевидно. Далее, (15) выполняется всюду в G, если

$$(1 - \mu x_2)\big[K_{-1}x_1^2(1 - x_2) - 2K_{-2}x_2^2 x_1\big] + 4K_{-2}x_2^2 \geq 0 \tag{18}$$

для всех $\vec{x} \in G$. Нетрудно видеть, что при $x_2 \leq 1/\mu$ условие (15) выполнено для всех $x_1 \in [0, 1]$. Следовательно, в (18) можно рассматривать только точки, для которых $x_2 > 1/\mu$. Поэтому неравенство (18) выполняется, если

$$K_{-1}x_1(1 - x_2) \leq 2K_{-2}x_2^2. \tag{19}$$

Поскольку $0 \leq x_1 \leq 1$, получим, что если

$$\psi(x_2) \equiv 2K_{-2}x_2^2 - K_{-1}(1 - x_2) \geq 0,$$

то неравенство (19) будет выполнено. Функция $\psi(x_2)$ монотонно возрастающая на интервале $[1/\mu, 1]$. Следовательно, если $\psi(1/\mu) \geq 0$, то (19) будет справедливо. Корни уравнения $\psi(1/\mu) = 0$ имеют вид

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)_1 = \frac{-K_{-1} - \sqrt{K_{-1}^2 + 8K_{-1}K_{-2}}}{4K_{-2}}, \quad \left(\frac{1}{\mu}\right)_2 = \frac{2K_{-1}}{K_{-1} + \sqrt{K_{-1}^2 + 8K_{-1}K_{-2}}}.$$

Следовательно, если

$$\mu \leq \frac{K_{-1} + \sqrt{K_{-1}^2 + 8K_{-1}K_{-2}}}{2K_{-1}},$$

то неравенство (19) будет выполнено. Теорема 1 доказана.

§ 4. Признаки существования и отсутствия замкнутых траекторий

Напомним необходимые определения и результаты из [3, 4], которые будем использовать в дальнейшем для получения аналитических критериев существования устойчивых предельных циклов системы (1).

Понятие о предельном цикле. Мы хотим установить, имеет ли рассматриваемая система обыкновенных дифференциальных уравнений периодические решения (режимы автоколебаний). Прежде чем определить предельный цикл, мы познакомимся еще с двумя понятиями. Точка p называется *ω-предельной точкой* для решения $\vec{x}(t)$, если существует последовательность $t_0 < t_1 < \dots$ такая, что $t_n \to \infty$ и $\vec{x}(t_n) \to p$ при $n \to \infty$. Соответственно точка q называется *α-предельной точкой* для $\vec{x}(t)$, если существует последовательность $t_0 > t_1 > \dots$ такая, что $t_n \to -\infty$ и $\vec{x}(t_n) \to q$ при $n \to \infty$. Замкнутая траектория называется *предельным циклом*, если она является ω-предельным или α-предельным множеством для некоторой не совпадающей с ней траектории. Образно говоря, предельный цикл характеризуется тем, что существует траектория, которая «наматывается» на него при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$.

Предельный цикл называется *изолированным*, если в некоторой его окрестности нет других замкнутых траекторий. Изолированный предельный цикл называют: *устойчивым*, если он является ω-предельным множеством для любой траектории $x(t, x_0)$ с достаточно близким к циклу начальным значением x_0; *неустойчивым*, если для всех таких x_0 цикл является α-предельным множеством траектории $x(t, x_0)$; *полуустойчивым*, если как угодно близко к нему существуют точки x_1 и x_2 такие, что цикл является α-предельным множеством для $x(t, x_1)$ и ω-предельным для $x(t, x_2)$.

Одним из первых вопросов, встающих при изучении проблемы существования или отсутствия замкнутых траекторий, является вопрос о том, существуют ли целые области, заполненные замкнутыми траекториями, или замкнутые траектории изолированы, т. е. являются предельными циклами. Имеет место следующая

Лемма 3 [3]. *Если L_0 — замкнутая траектория динамической системы аналитического класса, то либо она изолированная, либо все траектории в ее окрестности замкнуты.*

Так как система (1) принадлежит аналитическому классу, то на фазовой плоскости (x_1, x_2) системы (1) не может существовать замкнутой траектории, в любой окрестности которой есть как замкнутые, так и незамкнутые траектории. В частности, не может существовать бесчисленного множества предельных циклов, накапливающихся к замкнутой траектории (с одной или обеих ее сторон). Также не может существовать такой замкнутой траектории, с внешней (внутренней) стороны которой все достаточно близкие траектории замкнуты, а с внутренней (соответственно внешней) стороны все достаточно близкие траектории незамкнуты.

Определение. Состояние равновесия $\vec{x}_s$ системы (1) называется *простым*, если точка $\vec{x}_s$ является точкой пересечения изоклин (2), (3), т. е. общей точкой, в которой кривые (2), (3) не имеют особенностей и касательные к этим кривым различны.

На основании леммы можно показать, что если у динамической системы аналитического класса существует кольцеобразная область, заполненная замкнутыми траекториями, то граница этой области состоит из траекторий, стремящихся к состояниям равновесия, и из состояний равновесия. Если все состояния равновесия рассматриваемой динамической системы простые, то траектории, входящие в границу кольцеобразной области и отличные от состояний равновесия, могут быть только сепаратрисами седел.

Следовательно, если система (1) имеет единственное простое состояние равновесия, то в области G может существовать лишь конечное число замкнутых траекторий.

Цикл однократного пересечения. Будем говорить, что простая замкнутая кривая C, лежащая в области G (эта кривая может и не быть гладкой), есть *цикл однократного пересечения* для траекторий системы (1), если а) на кривой C не лежит ни одного состояния равновесия; б) у всякой траектории, проходящей при $t = t_0$ через какую-нибудь точку кривой C, точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t > t_0$ $(t < t_0)$, лежат внутри C, а точки, соответствующие достаточно близким к t_0 значениям $t < t_0$ $(t > t_0)$, — вне цикла. Другими словами, если мы обозначим через D_0 область, ограниченную циклом однократного пересечения C, то любая точка $\vec{x}_0 \in C$ является точкой входа (выхода) для множества D_0 по отношению к системе (1).

Рассмотрение циклов однократного пересечения, а также индексов состояния равновесия позволяет в ряде случаев сделать определенное заключение относительно существования замкнутых траекторий или предельных циклов. Приведем один из признаков существования устойчивых предельных циклов, основанный на рассмотрении циклов однократного пересечения.

Теорема 2 [3]. *Пусть C — цикл однократного пересечения, а D_0 — ограниченная им область, содержащаяся в области определения правых частей рассматриваемой динамической системы.*

Если выполняются следующие условия:

1) *все траектории, пересекающие C, при возрастании t входят в D_0;*
2) *в области D_0 имеется единственное состояние равновесия, являющееся неустойчивым узлом или фокусом;*
3) *в области D_0 имеется лишь конечное число замкнутых траекторий системы,*

то число расположенных в D_0 устойчивых предельных циклов на единицу больше числа неустойчивых. Следовательно, существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.

Используем теорему 2 для получения аналитических критериев существования устойчивых предельных циклов системы (1).

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (17) *единственности состояния равновесия и для особой точки выполняется условие* (16). *Тогда система* (1) *имеет устойчивый предельный цикл в области G.*

Доказательство. Проверим выполнение условий 1–3 теоремы 2. Условие 1 удовлетворяется, так как в качестве цикла однократного пересечения можно взять границу ∂G области G. Условие 2 также выполнено, так как из теоремы 1 следует, что при выполнении неравенства (17) положение равновесия является единственным в G и индекс его равен $+1$. Далее, если для этой особой точки справедливо неравенство (16), то она является либо неустойчивым узлом, либо неустойчивым фокусом. Условие 3 следует из леммы 3, как уже отмечалось выше. Таким образом, все условия теоремы 2 выполняются. Следовательно, в G существует устойчивый предельный цикл, что и требовалось доказать.

Приведем теперь несколько признаков отсутствия замкнутых траекторий, вытекающих из свойств индексов Пуанкаре. Сформулируем их в виде теоремы.

Теорема 4 [4]. *Пусть D_0 — односвязная область, принадлежащая области определения динамической системы. Тогда*

1. *Если в области D_0 нет состояний равновесия системы, то нет и замкнутых траекторий, целиком лежащих в D_0.*

2. *Если в области D_0 имеется конечное число состояний равновесия, причем для каждого состояния равновесия O с положительным индексом существует стремящаяся к O траектория, имеющая точки вне D_0, то в D_0 нет замкнутых траекторий.*

Приведем еще один критерий, на основании которого можно судить об отсутствии замкнутых траекторий и замкнутых контуров, состоящих из траекторий.

Критерий Дюлака. *Пусть D_0 — односвязная область, входящая в область определения системы* (1). *Если существует определенная в D_0 функция $B(\vec{x})$ первого класса такая, что выражение*

$$d(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(Bf_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Bf_2) \tag{20}$$

знакопостоянно, то в области D_0 не существует простых замкнутых кривых, состоящих из траекторий системы (1).

На основе критерия Дюлака докажем следующую теорему.

Теорема 5. *Если выполняется неравенство*

$$\mu \le 9 \tag{21}$$

или

$$\mu < 2\left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right), \tag{22}$$

то в области G не существует простых замкнутых кривых, состоящих из траекторий системы (1).

Доказательство. Пусть $B(\vec{x}) = 1$. Тогда выражение (20) для системы (1) будет иметь вид

$$d(\vec{x}) = -2[(K_1+K_2)(1-x_1-x_2)+K_{-1}x_1+K_{-2}x_2] - k_{30}e^{-\mu x_2}x_2[x_1+x_2(4-\mu x_1)]$$

и будет знакопостоянно в G, если выполняется условие $x_1 + x_2(4-\mu x_1) \ge 0$ или

$$\min_{x_1,x_2\in G}\left(\frac{1}{x_2}+\frac{4}{x_1}\right) \ge \mu.$$

В области G справедливо неравенство $x_1 + x_2 \le 1$, поэтому если функция

$$h(x_2) \equiv \frac{1}{x_2} + \frac{4}{1-x_2}$$

удовлетворяет условию $h(x_2) \ge \mu$ для всех $x_2 \in [0,1]$, то требуемое неравенство будет выполнено для всех $\vec{x} \in G$. В точках экстремума $h'(x_2) = 0$ и, следовательно, $3x_2^2 + 2x_2 - 1 = 0$, откуда получаем координаты этих точек $(x_2)_1 = -1$ и

$(x_2)_2 = 1/3$. Таким образом, минимум функции $h(x_2)$ достигается при $x_2 = 1/3$ и равен $h(1/3) = 9$. Следовательно, при $\mu \leq 9$ выражение $d(\vec{x})$ будет знакопостоянным в G.

Далее, возьмем $B(\vec{x}) = e^{\mu x_2}$. Тогда выражение (20) примет вид

$$d(\vec{x}) = e^{\mu x_2}[\mu K_2(1 - x_1 - x_2)^2 - 2(K_1 + K_2)(1 - x_1 - x_2) - 2K_{-1}x_1 \\ - \mu K_{-1}x_2^2 - 2K_{-2}x_2] - k_{30}x_1(x_1 + 4x_2)$$

и будет знакопостоянно в области G, если выполнено условие (22). Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

Ретракция [5]. Если U — топологическое пространство и V — подмножество в U, то непрерывное отображение $\pi : U \to V$, определенное на всем U, называется *ретракцией* U на V, если сужение π на V является тождественным отображением, т. е. $\pi(u) \in V$ для всех $u \in U$ и $\pi(v) = v$ для всех $v \in V$. Если ретракция U на V существует, то V называется *ретрактом.*

Лемма 4. *Пусть $\vec{x}^0$ — внутренняя точка области G, т. е. $\vec{x}^0 \in G^0 = G \setminus \partial G$, и $K = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 < x_1^0,\ x_2 < x_2^0\}$ — открытое подмножество G с границей ∂K. Обозначим через K_{se} множество точек строгого выхода из области K. Пусть $S = \partial G \cap \partial K$. Через ∂S обозначим границу множества S, а именно $\partial S = \{(x_1^0, 0), (0, x_2^0)\}$. Пусть $f_1(\vec{x}) > 0$ и $f_2(\vec{x}) > 0$ в области K, причем $\Gamma_1 = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 = x_1^0,\ x_2 < x_2^0\}$ и $\Gamma_2 = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 < x_1^0,\ x_2 = x_2^0\}$ состоят из точек строгого выхода из области K, т. е. $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset K_{se}$. Тогда существует по крайней мере одна точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, для которой график решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ либо лежит в области K для всех $t > 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^0$, либо пересекает впервые $\partial K \cap G$ в точке $\vec{x}^0$.*

Доказательство. Предположим, что эта лемма не верна. Тогда для $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$ существует такое число $t_1 = t_1(\vec{x}_0)$, что $t_1 > 0$, решение $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ определено при $0 \leq t \leq t_1$ и $\vec{x}(t) \in K$ при $0 < t < t_1$, а $\vec{x}(t_1) \in K_{se}$. Определим отображение $\pi_0 : S \to \overline{K}_{se} \backslash \vec{x}^0$ следующим образом: $\pi_0(\vec{x}_0) = \vec{x}(t_1)$, если $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, и $\pi_0(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$, если $\vec{x}_0 \in \partial S$. Поскольку решение системы (1) непрерывно зависит от начальных условий и множество K_e точек выхода из области K совпадает с K_{se}, отображение π_0 непрерывно. Чтобы доказать это, рассмотрим решение $\vec{x}(t) = \eta(t, \vec{x}_0)$ системы (1), для которого $\eta(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Функция $\eta(t, \vec{x}_0)$ непрерывна. Предположим, что $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$ и точка $\vec{y}_0$ близка к $\vec{x}_0$. Тогда $\eta(t, \vec{y}_0)$ существует на отрезке $[0, t_1(\vec{x}_0) + \varepsilon]$ при некотором $\varepsilon > 0$ и $\eta(t, \vec{y}_0) \in K$ при $0 < t < t_1(\vec{x}_0) - \varepsilon$, причем $\eta(t, \vec{y}_0) \notin \overline{K}$, если $t = t_1(\vec{x}_0) + \varepsilon$. Значит, $|t_1(\vec{y}_0) - t_1(\vec{x}_0)| < \varepsilon$, и поэтому $\eta(t_1(\vec{y}_0), \vec{x}_0)$ непрерывно зависит от $\vec{y}_0$, т. е. π_0 непрерывно по $\vec{x}_0$. Аналогичное рассуждение можно провести в случае, когда $\vec{x} \in \partial S$.

Определим отображение $\pi : \overline{K}_{se} \backslash \vec{x}_0 \to \partial S$ следующим образом:

$$\pi(\vec{x}) = \begin{cases} (x_1^0, 0), & \text{если } \vec{x} \in \Gamma_1 \backslash \vec{x}_0, \\ (0, x_2^0), & \text{если } \vec{x} \in \Gamma_2 \backslash \vec{x}_0. \end{cases}$$

Поскольку отображение π непрерывно, суперпозиция отображений $\pi \circ \pi_0$ является ретракцией S на ∂S. С другой стороны, S гомеоморфно одномерному шару радиуса r, и, значит, ∂S не является ретрактом S. Пришли к противоречию. Следовательно, существует по крайней мере одна точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, для которой график решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ либо пересекает впервые $\partial K \cap G$ в точке $\vec{x}^0$, либо лежит в K для всех $t > 0$. Поскольку $f_1(\vec{x}) > 0$ и $f_2(\vec{x}) > 0$ в области K, во втором случае компоненты $x_i(t)$ $(i = 1, 2)$ решения $\vec{x}(t)$ являются монотонно возрастающими ограниченными функциями. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^1$. Покажем, что имеет место равенство $\vec{x}^1 = \vec{x}^0$. Действительно, $\vec{x}^1$ является состоянием равновесия системы (1) [4], а так как состояние равновесия в $\overline{K}$ может находиться только в точке $\vec{x}^0$, то $\vec{x}^1 = \vec{x}^0$ и $\vec{x}^0$ является особой точкой системы (1). Лемма 4 доказана.

Иногда вид главной изоклины (5) позволяет непосредственно сделать заключение о глобальной динамике системы (1). Мы укажем один такой случай.

Теорема 6. *Пусть функция $x_1(x_2)$ определяется уравнением главной изоклины (2), имеет явный вид (5) и удовлетворяет условию $\frac{d}{dx_2}[x_1(x_2)] < 0$ для всех $x_2 \in [0, 1]$. Тогда в области G нет замкнутых траекторий системы (1) и каждое состояние равновесия имеет по крайней мере одномерное устойчивое многообразие, которое приходит в стационарную точку с границы области G.*

Доказательство. Пусть $\vec{x}_s$ — произвольное состояние равновесия системы (1). Рассмотрим область $K = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 < x_{1S},\ x_2 < x_{2S}\}$. Опишем множество K_{se} точек строгого выхода из K. Поскольку изоклина (2) является графиком монотонно убывающей функции переменной x_2, то $f_1(\vec{x}) > 0$ для $\vec{x} \in \overline{K} \backslash \vec{x}_s$. Следовательно, множество $\Gamma_1 = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 = x_{1S},\ x_2 < x_{2S}\}$ состоит из точек строгого выхода из K, т. е. $\Gamma_1 \subset K_{se}$. Далее, в силу монотонности f_1 и f_2 как функций x_1 на множестве $\Gamma_2 = \{\vec{x} \in G^0\colon x_1 < x_{1S},\ x_2 = x_{2S}\}$ справедливо неравенство $f_2(\vec{x}) > 0$. Значит, $\Gamma_2 \subset K_{se}$. Пусть $S = \partial G \cap \partial K$. Через ∂S обозначим границу множества S. Очевидно, что $\partial S = \{(x_{1S}, 0),\ (0, x_{2S})\}$ и на ∂S справедливы неравенства $f_1(\vec{x}) > 0$ и $f_2(\vec{x}) > 0$. Теперь, проводя те же рассуждения, что при доказательстве леммы 4, можно показать, что существует точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, для которой график решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ лежит в области K для всех $t > 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_s$. Отсюда и из теоремы 4 следует, что в области G нет замкнутых траекторий системы (1) и в каждую стационарную точку приходит по крайней мере две траектории с границы области G, а именно: одна с границы $x_1 = 0$, а другая с границы $x_1 + x_2 = 1$. Теорема доказана.

Применим теорему 6 для выделения области параметров, при которых система (1) не имеет замкнутых траекторий.

Теорема 7. *Пусть выполняется одно из условий*

$$k_{30} \le e(\sqrt{K_1 K_{-1}} + K_{-1}) \tag{23}$$

или

$$\mu \le \frac{k_{30}}{k_{30} - e(\sqrt{K_1 K_{-1}} + K_{-1})}. \tag{24}$$

Тогда система (1) не имеет периодических решений.

Доказательство. Рассмотрим производную от функции $x_1(x_2)$, определенной в (5):

$$\frac{d}{dx_2}[x_1(x_2)] = -\frac{\sqrt{K_1}}{\sqrt{K_1} + \sqrt{K_{-1} + 2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2}} - \frac{\sqrt{K_1}(1 - x_2)}{(\sqrt{K_1} + \sqrt{K_{-1} + 2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2})^2} \cdot \frac{k_{30}(1 - \mu x_2)e^{-\mu x_2}}{\sqrt{K_{-1} + 2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2}}.$$

Если потребовать, чтобы неравенство

$$\sqrt{K_1(K_{-1}+2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2)}+K_{-1}+k_{30}e^{-\mu x_2}[1+x_2-\mu x_2(1-x_2)]>0 \tag{25}$$

было справедливо для всех $x_2 \in [0,1]$, то из теоремы 6 будет следовать, что в области G нет замкнутых траекторий системы (1).

Нетрудно видеть, что при $\mu \leq 4$ или $x_2 \leq 1/\mu$ неравенство (25) выполнено. Следовательно, (25) выполняется для всех $x_2 \in [0,1]$, если имеет место неравенство

$$\sqrt{K_1(K_{-1}+2k_{30}e^{-\mu})}+K_{-1}+2k_{30}e^{-\mu}-k_{30}e^{-\mu x_2}\mu x_2(1-x_2)>0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x_2)=e^{-\mu x_2}x_2(1-x_2)$. Отметим, что на интервале $[1/\mu,1]$ она монотонна. Действительно, в точках экстремума

$$\varphi'(x_2)=\left(\mu x_2^2-(\mu+2)x_2+1\right)e^{-\mu x_2}=0,$$

откуда получаем координаты этих точек:

$$x_2^{(1)}=\frac{\mu+2+\sqrt{\mu^2+4}}{2\mu},\qquad x_2^{(2)}=\frac{2}{\mu+2+\sqrt{\mu^2+4}}.$$

Поскольку $x_2^{(2)}<1/(\mu+1)$ и $x_2^{(1)}>1+1/\mu$, то $\varphi(x_2)$ на интервале $[1/\mu,1]$ является монотонно убывающей функцией и, следовательно, принимает максимальное значение при $x_2=1/\mu$. Тогда в точке максимума имеем $\mu\cdot\varphi(1/\mu)=(\mu-1)/(\mu e)$. Таким образом, неравенство (25) выполняется для всех $x_2\in[0,1]$, если

$$\sqrt{K_1\left(K_{-1}+2k_{30}e^{-\mu}\right)}+K_{-1}+2k_{30}e^{-\mu}>\frac{k_{30}}{e}\left(1-\frac{1}{\mu}\right). \tag{26}$$

Отсюда следует, что если выполнено одно из условий (23) или (24), то неравенство (26) будет выполнено. Теорема доказана.

Асимптотическая устойчивость в целом. Далее будем предполагать, что точка $\vec{x}_s \in G$ является положением равновесия и $f(\vec{x}_s)=0$.

Пусть $\vec{x}_s$ — локально асимптотически устойчивое положение равновесия системы (1). *Областью притяжения* точки $\vec{x}=\vec{x}_s$ называется множество точек $\vec{x}_0 \in G$ таких, что решение системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0)=\vec{x}_0$ существует при всех $t\geq 0$ и $\vec{x}(t)\to\vec{x}_s$ при $t\to+\infty$.

Положение равновесия $\vec{x}_s$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, если всякое решение $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0)\in G$ может быть продолжено на полупрямую $t\geq 0$ и $|\vec{x}(t)-\vec{x}_s|\to 0$ при $t\to+\infty$. В отличие от понятия асимптотической устойчивости здесь не предполагается, что начальное значение $\vec{x}(0)$ близко к решению $\vec{x}_s$.

Теорема 8. *Пусть имеет место неравенство* (17), *и пусть выполняется одно из условий* (21)–(24). *Тогда положение равновесия $\vec{x}_s$ системы* (1) *является асимптотически устойчивым в целом.*

Доказательство. Поскольку выполняется условие (17), особая точка $\vec{x}_s$ единственна в G. Нетрудно видеть, что если выполняются условия теоремы 7, то $\vec{x}_s$ — локально асимптотически устойчивое решение системы (1). Так как область притяжения точки $\vec{x}_s$ является открытым множеством, то существует такое $\varepsilon>0$, что шар $U_\varepsilon=\{\vec{x}\in G : |\vec{x}-\vec{x}_s|\leq\varepsilon\}$ лежит в области притяжения. Обозначим через G^* открытое множество $G^0\backslash U_\varepsilon$, которое получается из G^0 после удаления шара U_ε. Тогда $\vec{f}(\vec{x})\neq 0$ на G^*.

Предположим, что теорема 8 неверна. Тогда существует точка $\vec{x}_0 \in G^*$, принадлежащая границе области притяжения точки $\vec{x}_s$. Пусть $\vec{x} = \vec{x}_0(t)$ — решение системы (1), удовлетворяющее условию $\vec{x}_0(0) = \vec{x}_0$. Тогда выполняется неравенство $r(\vec{x}_0(t), \vec{x}_s) > \varepsilon$, где $r(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ — расстояние между точками $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$. Следовательно, можно применить теорему Пуанкаре — Бендиксона [5], из которой следует, что ω-предельное множество траектории $\vec{x}(t)$ состоит из точек периодического решения системы (1). С другой стороны, из теорем 5, 6 вытекает, что если выполняются неравенства (21)–(24), то система (1) не имеет периодических решений. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 5. Свойства модели с необратимыми стадиями

Для нас также будут интересными частные случаи системы (1), в которых не учитываются обратные реакции, т. е. $K_{-1} = 0$ или $K_{-2} = 0$. Мы докажем, что в случае $K_{-2} = 0$ в фазовом пространстве не существует замкнутых траекторий, а если $K_{-1} = 0$ и система (1) имеет состояние равновесия внутри области G, то при некоторых условиях существует устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим случай $K_{-1} = 0$, т. е. стадия адсорбции водорода необратима. В этом случае $\vec{x} = (1, 0)$ является состоянием равновесия системы (1). Для $0 < \alpha < 1$ рассмотрим множество $g_\alpha = \{\vec{x} \in G^0 : x_2 > \alpha\}$ с границей ∂g_α. Так же, как в лемме 2, можно показать, что если на ∂g_α нет особых точек системы (1), то индекс кривой ∂g_α равен нулю или единице. Поскольку неравенство (15) имеет место для всех $\vec{x} \in G$, то индекс любой особой точки, расположенной в области G, равен $+1$. Отсюда и из того, что индекс кривой ∂g_α не превышает единицы, следует, что если в области G существует особая точка системы (1), то она единственна в G и индекс ее равен $+1$.

Теорема 9. *Предположим, что* $K_{-1} = 0$.

1. *Если* $\vec{x}_s = (1, 0)$ *— единственное состояние равновесия системы* (1) *в* G, *то особая точка* $\vec{x}_s$ *является асимптотически устойчивой в целом.*

2. *Пусть* $\vec{x}_s$ *— состояние равновесия системы* (1), *лежащее в открытой области* G^0, *для которого выполняется условие* (16). *Тогда в* G^0 *существует по крайней мере один устойчивый предельный цикл.*

Доказательство. Посмотрим, как располагаются изоклины (2) и (3) в области G. Кривая (2) в данном случае определяется равенством

$$x_1 = \frac{\sqrt{K_1}(1 - x_2)}{\sqrt{K_1} + \sqrt{2k_{30}e^{-\mu x_2}x_2}}. \tag{27}$$

Уравнение главной изоклины (3) запишем в виде

$$x_1 = q(x_2), \tag{28}$$

где функция $q(x_2)$ принадлежит аналитическому классу на множестве $x_2 \in [0, \alpha_0]$ при $\alpha_0 = \sqrt{K_2}/(\sqrt{K_2} + \sqrt{K_{-2}})$. Выполнены следующие соотношения: $q(0) = 1$, $q(\alpha_0) = 0$ и $0 < q(x_2) < 1 - x_2$ при $x_2 \in (0, \alpha_0)$.

Пусть $\vec{x}_s = (1, 0)$ является единственной особой точкой системы (1) в G, тогда главные изоклины (27) и (28) разделяют область G^0 на три области: $G_1 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) < 0,\ f_2(\vec{x}) < 0\}$, $G_2 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) > 0,\ f_2(\vec{x}) < 0\}$ и $G_3 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) > 0,\ f_2(\vec{x}) > 0\}$. Следовательно, кривая (28) в области G^0 является кривой без контакта для динамической системы (1). Поэтому ни одна траектория системы (1) не выходит из области $G_4 = \{\vec{x} \in G^0 : f_2(\vec{x}) < 0\}$.

Нетрудно видеть, что в области G_4 отрезки $x_2 = c$ являются отрезками без контакта с траекториями системы (1). Отсюда следует, что (1) не имеет целых траекторий в области G_4 и, в частности, предельных циклов. В самом деле, траектория, проходящая при некотором $t = t_0$ через произвольную точку отрезка $x_2 = c$ в области G_4, не может возвращаться с ростом t на этот отрезок, а может только приближаться к точке $\vec{x}_s = (1, 0)$. Таким образом, все решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными из области G_4 стремятся к состоянию равновесия $\vec{x}_s$, причем компонента $x_2(t)$ монотонно стремится к нулю.

Покажем теперь, что и в области G нет целых траекторий системы (1). Предположим, что такая траектория L существует. Тогда существует точка $\vec{y} = (y_1, y_2) \in L$ такая, что $\vec{y} \in \overline{G}_3 \cap G^0$. Рассмотрим множество $K = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 < y_1,\ x_2 < y_2\}$. Поскольку в области $D = K \cap G_3$ функции f_1 и f_2 положительны, множество D_{se} точек строгого выхода из области D по отношению к системе (1) состоит из части границы ∂D области D, лежащей в области G^0, т. е. $D_{se} = \partial D \cap G^0$. Пусть $S = \partial D \cap \partial G$. Через ∂S обозначим границу множества S, тогда $\partial S = \{(y_1, 0),\ (0, y_2)\}$. Далее, в область D траектории системы (1) могут войти только через множество $S \backslash \partial S$. На границе ∂S имеем $f_1(\vec{x}) > 0$, $f_2(\vec{x}) > 0$. Теперь, проводя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 4, можно показать, что существует точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, для которой график решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ пересекает впервые $\partial D \cap G^0$ в точке $\vec{y}$. Существование такого решения противоречит тому, что траектория L при $t \to -\infty$ содержится в G^0. Таким образом, утверждение, что в области G не может существовать целой траектории, доказано. Отсюда следует, в частности, что в области G не может существовать гомоклинического контура, состоящего из состояния равновесия $\vec{x}_s = (1, 0)$ и траектории, стремящейся к $\vec{x}_s$ как при $t \to -\infty$, так и при $t \to +\infty$.

Чтобы закончить доказательство, рассмотрим произвольное решение $\vec{x}(t)$ системы (1) в области G. Множество ω-предельных точек траектории $\vec{x}(t)$ замкнуто, связно и состоит из целых траекторий [4]. Поскольку в области G нет целых траекторий системы (1) и существует единственная особая точка на границе ∂G, множество ω-предельных точек траектории $\vec{x}(t)$ состоит из одной особой точки $\vec{x}_s = (1, 0)$. Таким образом, первая часть теоремы 9 доказана.

Предположим теперь, что кроме граничной точки $(1, 0)$ существует еще особая точка $\vec{x}_s$ системы (1) внутри области G, т. е. $\vec{x}_s \in G^0$. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\vec{x}_s$ является единственной особой точкой в области G^0 и ее индекс равен $+1$. Построим цикл однократного пересечения, содержащий внутри себя $\vec{x}_s$. Для этого возьмем точку $\vec{y}$ на кривой (27) такую, что $y_1 > x_{1S}$, $y_2 < x_{2S}$ и $0 < y_2 < 1/\mu$, и проведем лучи $\gamma_1 = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 = y_1,\ x_2 \geq y_2\}$ и $\gamma_2 = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 \leq y_1,\ x_2 = y_2\}$. Кроме того, точку $\vec{y}$ выберем так, чтобы луч γ_1 не пересекал больше кривой (27). Это возможно, так как функция (27) монотонно убывает при возрастании x_2 от 0 до $1/\mu$. Граница области, ограниченной лучами γ_1, γ_2 и прямыми $x_1 = 0$, $x_1 + x_2 = 1$, является циклом однократного пересечения. Поскольку все условия теоремы 2 выполняются, в области G существует предельный цикл. Теорема 9 доказана.

Следствие. *Пусть $K_{-1} = 0$ и $K_1 \geq 2K_2$. Тогда система* (1) *имеет единственную особую точку $\vec{x}_s = (1, 0)$, которая асимптотически устойчива в целом.*

Доказательство. Поскольку в области G при $x_2 \neq 0$ выполняется неравенство $\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 > 0$, особая точка $\vec{x}_s$ единственна в G. Из теоремы 9 следует, что она асимптотически устойчива в целом, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $K_{-2} = 0$, т. е. стадия адсорбции кислорода необратима. Тогда точка $\vec{x} = (0, 1)$ является состоянием равновесия системы (1). Запишем уравнения главных изоклин (2), (3) следующим образом:

$$K_2(1 - x_1 - x_2)^2 = k_{30}e^{-\mu x_2}x_1^2 x_2, \quad (K_1 - 2K_2)(1 - x_1 - x_2)^2 = K_{-1}x_1^2. \tag{29}$$

Отсюда следует, что при $K_1 \leq 2K_2$ система (29) имеет единственное решение $\vec{x} = (0, 1)$ в G.

Лемма 5. *Пусть $K_{-2} = 0$ и $K_1 > 2K_2$. Тогда все состояния равновесия системы* (1) *из области G, которые лежат выше прямой $x_2 = 1/\mu$, имеют индекс, равный -1, а состояния равновесия, расположенные ниже этой прямой, имеют индекс, равный $+1$.*

Доказательство. Для вычисления индекса особой точки будем использовать следующий критерий [4]. Пусть $\vec{x}_s$ — положение равновесия системы (1) и $A(x_s)$ — матрица линеаризованной в окрестности x_s системы (9). Если $\det A(\vec{x}_s) \neq 0$, то особая точка $\vec{x}_s$ изолирована и ее индекс определяется равенством

$$\operatorname{ind}(\vec{x}_s, \vec{f}) = \operatorname{sign}\det A(\vec{x}_s). \tag{30}$$

Утверждение леммы вытекает из (15) и критерия (30), так как в рассматриваемом случае для особых точек системы (1), лежащих в области G, имеет место равенство

$$\operatorname{sign}\det A(\vec{x}_s) = \operatorname{sign}(1 - \mu x_{2S}). \tag{31}$$

Лемма доказана.

Теорема 10. *Пусть $K_{-2} = 0$. Тогда в области G нет замкнутых траекторий системы* (1). *Кроме того, если $\vec{x}_s = (0, 1)$ — единственное состояние равновесия системы* (1) *в G, то особая точка асимптотически устойчива в целом.*

Доказательство. Покажем сначала, что если выполняются условия теоремы, то в G^0 не существует замкнутых траекторий. Будем рассматривать значения $\mu > 9$, так как в противном случае в силу теоремы 5 система (1) не имеет периодических решений.

Допустим, в G^0 существует замкнутая траектория L. Поскольку индекс любой замкнутой траектории динамической системы равен $+1$, то сумма индексов особых точек, лежащих внутри L, равна $+1$. Так как при $K_1 \leq 2K_2$ система (1) не имеет особых точек, а следовательно, и замкнутых траекторий в G^0, достаточно рассмотреть случай $K_1 > 2K_2$.

Учитывая, что $\vec{x} = (0, 1)$ является решением системы (29), исключим неизвестное x_1, так что

$$e^{-\mu x_2}x_2 = \frac{K_2 K_{-1}}{(K_1 - 2K_2)k_{30}}. \tag{32}$$

Посмотрим, что происходит с решениями уравнения (32) при изменении параметра u, где

$$u = \frac{K_2 K_{-1}\mu e}{(K_1 - 2K_2)k_{30}}.$$

(а) При $u > 1$ уравнение (32) не имеет решений.

(б) Если $u = 1$, то существует единственное решение $x_2 = 1/\mu$. Ему соответствует состояние равновесия системы (1) в области G^0, которое исчезает при сколь угодно малом увеличении параметра u. По теореме Брауэра [6] это возможно, если и только если индекс этого состояния равновесия равен нулю.

(в) При $0 < u < 1$ уравнение (32) имеет два решения x_2^1, x_2^2. Решению $0 < x_2^1 < 1/\mu$ соответствует состояние равновесия системы (1) в области G^0 с индексом, равным $+1$, в силу леммы 5. Второе решение $x_2^2 > 1/\mu$. Если $x_2^2 < 1$, то ему соответствует состояние равновесия системы (1) в области G^0 с индексом, равным -1, в силу леммы 5.

Поскольку в случаях (а) и (б), т. е. при $u \geq 1$, система (1) не имеет замкнутых траекторий в G^0, нашему предположению не противоречит только случай $0 < u < 1$.

Рассмотрим особые точки, лежащие внутри L. Так как сумма их индексов равна $+1$, то внутри L лежит лишь одна особая точка, а именно $\vec{x}_s^1 = \big(x_1(x_2^1), x_2^1\big)$ с индексом, равным $+1$.

Рассмотрим конус $K = \big\{\vec{x} \in G^0 : x_1 < x_1(x_2^1),\ x_2 < x_2^1\big\}$. Через $\overline{K}$ обозначим замыкание K, а через ∂K — границу K. Главные изоклины (2) и (3) являются графиками монотонно убывающих функций переменной x_2 на интервале $0 \leq x_2 \leq 1/\mu$, поэтому на множестве $\overline{K} \backslash \vec{x}_s^1$ будет $f_1(\vec{x}) > 0$ и $f_2(\vec{x}) > 0$. Следовательно, множество точек строгого выхода из области K по отношению к системе (1) является объединением двух множеств, а именно $K_{se} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где

$$\Gamma_1 = \big\{\vec{x} \in G^0 : x_1 = x_1\big(x_2^1\big),\ x_2 < x_2^1\big\}, \quad \Gamma_2 = \big\{\vec{x} \in G^0 : x_1 < x_1\big(x_2^1\big),\ x_2 = x_2^1\big\}.$$

Пусть $S = \partial K \cap \partial G$. Через ∂S обозначим границу множества S, которая состоит из двух точек $\partial S = \big\{\big(x_1\big(x_2^1\big), 0\big),\ \big(0, x_2^1\big)\big\}$. Траектории системы (1) могут войти в область K только с множества $S \backslash \partial S$. Поэтому в силу леммы 4 существует такая точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, что решение $\vec{x}(t)$ системы (1), удовлетворяющее условию $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$, лежит в K для всех $t > 0$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} \vec{x}(t) = \vec{x}_s^1$. Поскольку в области G нет больше особых точек с положительным индексом, можно применить теорему 4, из которой следует, что в G не существует замкнутых траекторий. Мы пришли к противоречию, следовательно, утверждение о том, что при $K_{-2} = 0$ в области G нет замкнутых траекторий системы (1), доказано.

Покажем теперь, что если $K_{-2} = 0$ и $\vec{x}_s = (0, 1)$ — единственная особая точка системы (1) в G, то она асимптотически устойчива в целом.

Рассмотрим изоклины (5) и (3). Кривую (3) запишем в виде

$$x_1 = \frac{\sqrt{K_2}(1 - x_2)}{\sqrt{k_{30} e^{-\mu x_2} x_2} + \sqrt{K_2}}. \tag{33}$$

Поскольку $\vec{x}_s = (0, 1)$ является единственной особой точкой, то изоклины (5) и (33) разделяют область G^0 на три подобласти $G_1 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) < 0,\ f_2(\vec{x}) < 0\}$, $G_2 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) < 0,\ f_2(\vec{x}) > 0\}$ и $G_3 = \{\vec{x} \in G^0 : f_1(\vec{x}) > 0,\ f_2(\vec{x}) > 0\}$. Кроме того, кривая (33) делит область G^0 на две части G_1 и $G_4 = \{\vec{x} \in G^0 : f_2(\vec{x}) > 0\}$ и в G^0 является кривой без контакта с траекториями системы (1). Следовательно, ни одна траектория системы (1) из области G_4 не выходит.

Нетрудно видеть, что в G_4 отрезки $x_2 = c$ являются отрезками без контакта. Отсюда следует, что в области G_4 не существует целых траекторий, в частности, предельных циклов. В самом деле, траектория, проходящая при некотором $t = t_0$ через произвольную точку $x_2 = c$ в области G_4, не может возвращаться с ростом t на отрезок $x_2 = c$, а может только приближаться к точке $\vec{x}_s = (0, 1)$. Таким образом, все решения системы (1) с начальными данными из области

G_4 стремятся к состоянию равновесия $\vec{x}_s$, причем компонента $x_2(t)$ монотонно возрастает к единице.

Покажем теперь, что и в области G^0 нет целых траекторий системы (1). Предположим, что такая траектория L существует. Тогда существует точка $\vec{y} \in L$ такая, что $\vec{y} \in \overline{G}_1 \cap G^0$. Рассмотрим множество $M = \{\vec{x} \in G^0 : x_1 > y_1,\ x_2 > y_2\}$ и область $D = M \cap G_1$. Поскольку в D имеем $f_1(\vec{x}) < 0$ и $f_2(\vec{x}) < 0$, множество D_{se} точек строгого выхода из D состоит из части границы ∂D области D, лежащей в G^0, т. е. $D_{se} = \partial D \cap G^0$. Пусть $S = \partial D \cap \partial G$. Через ∂S обозначим границу множества S; $\partial S = \{(y_1, 1 - y_1),\ (1 - y_2, y_2)\}$. Далее, в область D траектории системы (1) могут войти только через множество $S \backslash \partial S$. На множестве ∂S будет $f_1(\vec{x}) < 0$, $f_2(\vec{x}) < 0$. Проводя рассуждения, как при доказательстве леммы 4, можно показать, что существует точка $\vec{x}_0 \in S \backslash \partial S$, для которой график решения $\vec{x}(t)$ системы (1) с начальными данными $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ пересекает впервые $\partial D \cap G$ в точке $\vec{y}$. Существование такого решения противоречит тому, что траектория L при $t \to -\infty$ содержится в G^0. Таким образом, доказано, что в области G не может существовать целой траектории.

Чтобы закончить доказательство, рассмотрим произвольное решение $\vec{x}(t)$ системы (1) в области G^0. Поскольку в G^0 нет целых траекторий системы (1) и на границе ∂G только одна особая точка, множество ω-предельных точек траектории состоит из единственной точки $\vec{x}_s = (0, 1)$. Теорема 10 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чумаков Г. А.* Математические вопросы моделирования автоколебаний скорости гетерогенной каталитической реакции. I // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1179–1189.
2. *Красносельский М. А.* Векторные поля на плоскости. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем. М.: Наука, 1966.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
5. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
6. *Зуланке Р., Винтген П.* Дифференциальная геометрия и расслоения. М.: Мир, 1975.

Статья поступила 19 апреля 2006 г.

Чумаков Геннадий Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
chumakov@math.nsc.ru