Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 512.544

F–ЛОКАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО КОНЕЧНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ ПОРЯДКА 2 И 4

А. И. Созутов, М. В. Янченко

Аннотация: Доказано существование бесконечных подгрупп с нетривиальными локально конечными радикалами и бесконечных локально конечных подгрупп в группах с почти конечными почти разрешимыми элементами порядков 2, 4 и в группах с обобщенно конечными элементами.

Ключевые слова: группа, f-локальная подгруппа, почти конечный элемент, обобщенно конечный элемент, обобщенно конечная группа.

Работа является продолжением статьи [1]. Напомним, что *f-локальной подгруппой бесконечной группы G* называется каждая ее бесконечная подгруппа с нетривиальным локально конечным радикалом [2]. Говорят, что смешанная группа G обладает *периодической частью*, если все ее элементы конечного порядка составляют подгруппу [3]. Неединичный элемент a конечного порядка произвольной бесконечной группы G называется *обобщенно конечным*, если почти для всех элементов b^g некоторого класса b^G $(b \neq 1)$ подгруппы $\langle a, b^g \rangle$ конечны, т. е. выполняется (a, b)-условие конечности [3]. Если при этом $b \in a^G$, то элемент a называется *почти конечным.* Результаты статьи [1] и данной работы дают достаточные условия существования в группах с почти конечными и обобщенно конечными элементами f-локальных и бесконечных локально конечных подгрупп (вопросы 1.24 М. И. Каргаполова и 2.75 С. П. Стрункова из [4]). Если в группе выполняется (a, b)-условие конечности, то оно выполняется и для пары элементов простых порядков. Как показал В. П. Шунков [5], случай $|a| = |b| = 2$ и $b \in a^G$ особый, для него неверен аналог теоремы 1 (см. пример 1 и теорему 1 из [1]). Однако если $b \notin a^G$, то обе инволюции a, b принадлежат f-локальным подгруппам, содержащим бесконечно много элементов конечного порядка [6]. Тем самым случаи почти конечного элемента порядка 4 и пары (a, b) при $|a| \cdot |b| = 8$ выделяются в объекты отдельного исследования, проведенного в настоящей работе.

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная группа, a — элемент порядка 4 из G и почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо группа G обладает конечной периодической частью, либо элемент a принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Теорема 2. *Пусть G — бесконечная группа, a, b — элементы из G, один из которых — инволюция, а второй — элемент порядка 4, и почти для всех элементов $b^g \in b^G$ подгруппы $\langle a, b^g \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо группа*

G обладает конечной периодической частью, либо хотя бы один из элементов a, b принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.

Теорема 3. *Если все конечные подгруппы группы G разрешимы и каждое ее сечение по конечной подгруппе либо является группой без кручения, либо обладает обобщенно конечным элементом порядка > 2, то G либо обладает конечной периодической частью, либо содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

1. Используемые в доказательствах результаты

В силу свойств конечных групп Фробениуса (см., например, [7, 8]) имеет место следующее

Предложение 1. *Пусть a — элемент порядка 4 произвольной группы G и $H = \langle a, a^g \rangle = F(H)\lambda T$ — конечная группа Фробениуса с ядром $F(H)$ и дополнением T. Тогда*

1. *Инволюция $j = a^2$ единственна в T и j инвертирует $F(H)$, $F(H)$ — подгруппа Фиттинга.*
2. *Если $a^{-1} \notin a^T$, то либо $T = \langle a \rangle$, либо $T = \langle b \rangle \lambda \langle a \rangle$, где $\langle b \rangle$ — циклическая нормальная подгруппа нечетного порядка, инвертируемая элементом a.*
3. *Если $a^{-1} \in a^T$, то $T = \langle b \rangle \cdot \langle a \rangle$, где $|b|$ делится на 4, T содержит (обобщенную) группу кватернионов, $b^a = b^{-1}$ и $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle j \rangle$.*

Предложение 2 (лемма Дицмана [9]). *В произвольной группе конечное инвариантное множество элементов конечного порядка порождает конечную подгруппу.*

Предложение 3 (лемма Неймана [8, 9]). *Если группа G покрывается конечным числом смежных классов по подгруппам $H, \dots, K, M$, то хотя бы одна из этих подгрупп имеет в G конечный индекс.*

Предложение 4. *Группа, конечная над своим центром, является FC-группой.*

Из леммы Дицмана следует

Предложение 5. *Группа с конечными классами сопряженных элементов обладает локально конечной периодической частью.*

Напомним, что элемент a бесконечной группы G называется *почти регулярным*, если $|C_G(a)| < \infty$, и *конечным*, если все подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle$ в G конечны.

Предложение 6 (теорема Беляева [10]). *Пусть группа G содержит конечную почти регулярную инволюцию j. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G — локально-конечная группа;*
2) *$[j, G]$ содержится в FC-радикале группы G и $|G : [j, G]| \le |C_G(j)|$;*
3) *коммутант FC-радикала группы G конечен.*

2. Доказательство теоремы 1

Пусть пара (G, a) — контрпример к теореме 1.

Лемма 1. *Класс a^G бесконечен.*

Доказательство. Если класс a^G конечен, то по лемме Дицмана подгруппа $\langle a^G \rangle$ конечна и нормальна в G. В этом случае группа G сама является f-локальной подгруппой, и если она содержит бесконечно много элементов конечного порядка, то выполняется вторая часть утверждения теоремы. Если же в G элементов конечного порядка конечное число, то ввиду леммы Дицмана они составляют конечную вполне характеристическую подгруппу T и имеет место первая часть утверждения теоремы. Лемма доказана. $\square$

Лемма 2. *Пусть j — инволюция из $\langle a \rangle$. Тогда*
1) *инволюция j конечна в G;*
2) *подгруппа $C_G(j) = R$ бесконечна;*
3) *подгруппа R обладает конечной периодической частью T и $a \in T$.*

Доказательство. 1. Заметим, что ввиду условий теоремы инволюция j почти с каждой с ней сопряженной инволюцией порождает конечную подгруппу. Отсюда следует, что для любой инволюции $k \in j^G$ группа диэдра $\langle j, k \rangle$ не может быть бесконечной. Это означает, что $|jj^g| < \infty$ $\forall g \in G$, т. е. j — конечная инволюция группы G.

2. Действительно, если $C_G(j)$ — конечная группа, то ввиду предложения 6 группа G локально конечна, что противоречит выбору G и a.

3. Если R содержит бесконечно много элементов конечного порядка, то выполняется вторая часть утверждения теоремы, поскольку тогда подгруппа R f-локальна и $a \in R$. Следовательно, можно считать, что множество элементов конечного порядка в R конечно и ввиду леммы Дицмана группа R обладает конечной периодической частью T. Лемма доказана. $\square$

Веером X с основанием T мы называем произвольное множество X конечных подгрупп группы G с нетривиальным пересечением T. Веер X называется *конечным* или *бесконечным* в зависимости от конечности или бесконечности множества X. Теоретико-множественное объединение $\Sigma(X)$ подгрупп веера X называется его *амальгамой*, а произвольное подмножество $Y \subseteq X$ — *подвеером*. Элемент $a \in T$ называется *ручкой* бесконечного веера X, если для любой подгруппы $V \leq T$ веера X из $a \in N_G(V)$ следует $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$. Бесконечный веер X с основанием T называется *правильным*, если $T \notin X$ и для любой подгруппы $V \leq T$ такой, что $|N_G(V) \cap \Sigma(X)| < \infty$, имеет место включение $N_G(V) \cap \Sigma(X) \leq T$.

Лемма 3. *Пусть X — веер всех конечных разрешимых подгрупп группы G вида $H = \langle a, a^g \rangle$. Тогда*

1) *существует разбиение $X = W \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$ веера X на конечный (или пустой) веер W и конечное число n бесконечных правильных вееров X_i с основаниями T_i;*

2) *для $i = 1, \dots, n$ веер X_i состоит из групп Фробениуса $H = F(H)\lambda T_i$ с дополнением T_i, содержащим элемент a, и подгруппой Фиттинга $F(H)$ в качестве ядра;*

3) *инволюция j единственна в T_i, для каждой подгруппы $H \in X_i$ выполняется $T_i = C_H(j)$ и ядра $F(H)$ абелевы и инвертируются инволюцией j.*

Доказательство. Ввиду утверждения 3 леммы 2 инволюция j — ручка веера X, и в силу теоремы 3.1 из [2] и леммы 1 из [1] указанное в утверждении 1 леммы разбиение веера X существует. Утверждения 2 и 3 следуют из предложения 1. Лемма доказана. $\square$

Как и в [1, 2], на бесконечных подмножествах группы G введем отношение эквивалентности $\sim$:

$$Z \sim Y \text{ в том и только том случае, если } |Z \setminus Y| \text{ и } |Y \setminus Z| < \infty.$$

Лемма 4. *Пусть $A = a^G \cup a^{-G}$, $Y = X_1 \cup \dots \cup X_n$ и $B = \langle j^G \rangle$. Тогда*

1) *амальгама $\Sigma(Y)$ веера Y почти полностью содержит множество A, т. е. $(\Sigma(Y) \cap A) \sim A$;*

2) *для любой инволюции $k \in j^G$ имеют место отношения $kA \sim A \sim Ak$;*

3) *для любого элемента x из нормальной в G подгруппы $B = \langle j^G \rangle$ имеют место отношения $xA \sim A \sim Ax$;*

4) *не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что группа G совпадает с подгруппой $B\langle a \rangle$, при этом $|G : B| = 2$ и $A \subseteq aB$.*

Доказательство. 1. Утверждение вытекает из условий теоремы и леммы 3.

2. По лемме 3 j — единственная инволюция в T_i. Поэтому для любого элемента $b \in A \cap T_i = S_i$ имеет место равенство $jb = bj = b^{-1}$. Более того, в силу строения конечных групп Фробениуса $H \in X_i$ следует, что $A \cap H = S_i F(H)$ и для любого элемента $b \in A \cap H$ справедливы включения $jb, bj \in A$. Ввиду утверждения 1 леммы это означает, что $jA \sim A \sim Aj$. Поскольку множество A инвариантно в G, то $kA \sim A \sim Ak$ для любой инволюции $k \in j^G$. Утверждение доказано.

3. Пусть m — любое натуральное число, $k_1, \dots, k_m$ — произвольные инволюции из j^G и $x = k_m \cdot \ldots \cdot k_1$ — их произведение. Используя утверждение 2 леммы, последовательно выводим $A \sim k_1 A$, $A \sim k_2 k_1 A$, $\dots$, $A \sim xA$. Это означает, что для любого элемента x из нормальной в G подгруппы $B = \langle j^G \rangle$ имеет место отношение $xA \sim A$. Аналогично $A \sim Ax$.

4. Применяя утверждение 1 леммы $A \sim (A \cap \Sigma(Y))$ и используя бесконечность вееров X_i (лемма 3) и строение конечных групп Фробениуса $H \in Y$ (лемма 3 и предложение 1), легко убедиться, что множество $a(A \cap \Sigma(Y)) \setminus A$ бесконечно. В силу утверждения 3 леммы $a \notin B$ и пересечение $A \cap B$ пусто. Ввиду леммы Дицмана и сделанных предположений класс j^G бесконечен, в частности, подгруппа B содержит бесконечно много элементов конечного порядка. Поэтому теорему достаточно доказать для группы $G = B\langle a \rangle$. Поскольку $j \in B$ по определению B, то G/B — циклическая группа порядка 2 и $a, a^{-1} \in aB$. С учетом соглашения $G = B\langle a \rangle$ и нормальности B в G получаем $A \subseteq aB$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через N_i множество всех элементов из ядер Фробениуса $F(H)$ подгрупп H веера X_i.

Лемма 5. *В подгруппе $C_G(a)$ нет элементов бесконечного порядка.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и r — элемент бесконечного порядка из $C_G(a)$. Поскольку $C_G(a) \leq R$ и по лемме 2 R обладает конечной периодической частью T, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $r \in B \cap C_G(T)$.

Ввиду леммы 3 множество $A \cap T_i = S_i$ конечно и объединение $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ также конечно. В силу свойств конечных групп Фробениуса $H \in Y$ (лемма 1) имеем $A \cap \Sigma(Y) = \bigcup_{i=1}^{n} S_i N_i$. Таким образом, $A \cap \Sigma(Y)$ есть объединение конечного числа бесконечных множеств вида $A_{ik} = s_{ik} N_i$, где $s_{ik} \in S_i$, $i = 1, \dots, n$. Вследствие леммы 2 $S_i \subset T$ и $rs_{ik} = s_{ik} r$ в силу выбора r. По лемме 4 $A \sim r^m A \sim A \cap \Sigma(Y)$ для любого целого m. Допустим, что для подходящего m найдутся непустое пересечение $A_{ik} \cap r^m A_{ik}$ и элемент $r^m s_{ik} c = s_{ik} d$, где $c, d \in N_i$. Очевидно, $M = \langle s_{ik}, s_{ik} c \rangle$ и $L = \langle s_{ik}, s_{ik} d \rangle$ — конечные группы Фробениуса с циклическим дополнением $\langle s_{ik} \rangle$, содержащиеся в подходящих подгруппах веера X_i. По свойствам конечных групп Фробениуса (см., например, лемму 2.1 из [8]) имеем

$$L = \langle s_{ik}, d \rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{s_{ik} d} \right\rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{r^m s_{ik} c} \right\rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{s_{ik} c} \right\rangle = \langle s_{ik}, c \rangle = M.$$

Однако тогда и элемент r^m бесконечного порядка содержится в конечной подгруппе L; противоречие.

Осталось доказать, что для подходящих m и A_{ik} найдется непустое пересечение $A_{ik} \cap r^m A_{ik}$. Обозначим через t число всех множеств A_{ik}, и пусть $A_0 = A \cap (\cup A_{ik}) = A \cap \Sigma(Y)$. В силу леммы 3 пересечение $V = A_0 \cap r A_0 \cap r^2 A_0 \cap \dots \cap r^t A_0$ бесконечно, выберем из него некоторый элемент s. Множество $s, rs, r^2 s, \dots, r^t s$ состоит из $t+1$ элементов и в силу выбора элемента s содержится в V, которое, в свою очередь, есть объединение t подмножеств $A_{ik} \cap V$. Значит, в некоторое из множеств A_{ik} попадут хотя бы два элемента $s_{ik} = r^l s$ и $r^{l+m} s = r^m s_{ik}$ при подходящих $0 \le l < l + m \le t$. Это и означает, что пересечение $A_{ik} \cap r^m A_{ik}$ непусто. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство теоремы. По лемме 2 R — бесконечная группа с конечной периодической частью T и $a \in T$. Но тогда $C_G(a)$ содержит элементы бесконечного порядка, что противоречит лемме 5. Следовательно, контрпримера к теореме 1 не существует, и теорема верна.

3. Доказательство теорем 2 и 3

Пусть выполняются условия теоремы 2 и тройка (G, a, b) — контрпример к теореме.

Лемма 6. *Классы a^G и b^G бесконечны.*

Доказательство. Лемма доказывается с использованием леммы Дицмана так же, как и лемма 1. $\square$

Пусть X — веер всех максимальных конечных разрешимых подгрупп, содержащих как элемент a, так и элемент из b^G.

Лемма 7. *Существует разбиение $X = W \cup X_1 \cup \dots \cup X_n$ веера X на конечный (или пустой) веер W и конечное число n бесконечных правильных вееров X_i с основаниями T_i. При этом X_i состоит из групп Фробениуса $H = F(H) \lambda T_i$ с дополнением T_i и абелевым ядром $F(H)$, инвертируемым инволюциями из $\langle a \rangle$ и $\langle b^g \rangle$.*

Доказательство. Если $|a| = 2$, то a — ручка веера X_a, и первое утверждение леммы вытекает из леммы 1 в [1] и предложения 1.

Пусть $|a| = 4$. Достаточно доказать, что a^2 — ручка веера X. Из условий теоремы и определения веера X следует, что его амальгама $\Sigma(X)$ почти полностью содержит класс b^G. Поэтому из $b^g \notin \Sigma(X)$ получим, что элемент g содержится в объединении $V = C_G(b)g_1 + \dots + C_G(b)g_m$ конечного числа смежных классов, для элементов $x \in V$ из которого подгруппы $L_x = \langle a, b^x \rangle$ бесконечны. Пусть $H \in X$ и $b^g \in H$, где $g \in C_G(b)g \subset G \setminus V$. Тогда для любого $x \in C_G(b)g$ имеем $xHx^{-1} = \langle a^x, b \rangle$ и все такие подгруппы xHx^{-1}, где H пробегает X, составляют веер Y. Если веер Y конечен, то множество $a^{G \setminus V}$ также конечно и поэтому $G \setminus V = x_1C_G(a) + \dots + x_kC_G(a)$ — объединение конечного числа смежных классов по $C_G(a)$. По лемме Неймана хотя бы одна из подгрупп $C_G(a)$, $C_G(b)$ имеет конечный индекс в G, что противоречит лемме 1. Следовательно, веер Y бесконечен, и b — его ручка. Как показано выше, для веера Y утверждения леммы справедливы. Значит, инволюции a^2, b сопряжены в G, и a^2 — ручка веера X. Лемма доказана. □

Обозначим через J и A классы сопряженных в G элементов соответственно с инволюцией и элементом порядка 4 из $\{a, b\}$.

Лемма 8. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *инволюции из $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ принадлежат классу J;*

2) *класс J состоит из конечных инволюций;*

3) *подгруппы $N_G(\langle a \rangle)$ и $N_G(\langle b \rangle)$ бесконечны и обладают конечными периодическими частями;*

4) *всякая инволюция $j \in J$ содержится в конечном числе m подгрупп $\langle s \rangle$, $s \in A$, при этом $N_G(\langle s \rangle)$ — подгруппа конечного индекса группы $C_G(j)$, здесь $j = s^2$.*

Доказательство. 1. Принадлежность указанных инволюций классу J следует из леммы 7 и единственности инволюции в дополнении группы Фробениуса [7, 8].

2. Любая пара инволюций из J не может порождать бесконечную группу диэдра по тем же причинам, что и в лемме 1.

3, 4. Так как (G, a, b) — контрпример к теореме, конечность периодических частей указанных подгрупп вытекает из леммы Дицмана (предложение 2). Бесконечность подгруппы $C_G(j)$ следует из конечности инволюции $j \in J$ и теоремы Беляева (предложение 6). Если $s \in A$, то $s^2 \in J$ (утверждение 1 леммы), $N_G(\langle s \rangle) \leq C_G(s^2)$ и ввиду утверждения 3 леммы $|C_G(s^2) : N_G(\langle s \rangle)| < \infty$. Утверждения 3 и 4 леммы доказаны. □

Лемма 9. *Для любых $j \in J$, $s \in A$ подгруппа $\langle j, s \rangle$ конечна.*

Доказательство. Допустим, что для некоторых $j \in J$, $s \in A$ подгруппа $L = \langle j, s \rangle$ бесконечна. Тогда по лемме Дицмана классы j^L и s^L бесконечны и, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\{s, j\} = \{a, b\}$ и $G = L$. Ввиду (a, b)-условия конечности множество элементов b^g, где $g \in C_G(a)$, конечно. Поэтому $|C_G(a) : Z(G)| < \infty$ и по лемме 8 $|C_G(b) : Z(G)| < \infty$. Очевидно, что $Z(G)$ — группа без кручения и в силу утверждения 2 леммы 8 инволюция $\overline{j} = jZ(G)$ конечна в фактор-группе $\overline{G} = G/Z(G)$. Также понятно, что для любой конечной подгруппы K из G имеем $\langle K, Z(G) \rangle = K \times Z(G)$, откуда следует, что $C_{\overline{G}}(\overline{j}) = C_G(j)/(Z(G) \cap C_G(j))$. По теореме Беляева фактор-группа $\overline{G}$ локально конечна и в силу ее двупорожденности конечна. По предложениям 4, 5 G есть FC-группа, обладающая конечной периодической частью. Полученное противоречие означает, что лемма верна. □

На основании леммы 9 далее считаем, что $a = j \in J$, $b \in A$, $b^2 = j$ и $A = b^G \cup b^{-G}$.

Лемма 10. *Пусть* $B = \langle j^G \rangle$. *Тогда*

1) *для любой инволюции* $k \in j^G$ *имеют место отношения* $kA \sim A \sim Ak$;

2) *для любого элемента* x *из нормальной в* G *подгруппы* $B = \langle j^G \rangle$ *имеют место отношения* $xA \sim A \sim Ax$;

3) *не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что группа* G *совпадает с подгруппой* $B\langle b \rangle$, *при этом* $|G : B| = 2$ *и* $A \subseteq aB$.

Доказательство леммы практически не отличается от доказательства утверждений 2–4 леммы 4. □

Обозначим через N_i множество всех элементов из ядер Фробениуса $F(H)$ подгрупп H веера X_i из леммы 7. Доказательство теоремы завершает

Лемма 11. *Контрпримера к теореме* 2 *не существует.*

Доказательство. Предположим, что r — элемент бесконечного порядка из $C_G(j)$. По лемме 8 подгруппа $C_G(j)$ обладает конечной периодической частью T, и, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $r \in B \cap C_G(T)$.

Ввиду леммы 8 множество $A \cap T_i = S_i$ конечно и объединение $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$ также конечно, поскольку содержится в T. В силу свойств конечных групп Фробениуса $H \in X_i$ (леммы 7, 1) имеем $A \cap \Sigma(X) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i N_i$. Таким образом, $A \cap \Sigma(X)$ есть объединение конечного числа бесконечных множеств вида $A_{ik} = s_{ik} N_i$, где $s_i k \in S_i$, $i = 1, \dots, n$. Поскольку $S_i \subset T$, то $r s_{ik} = s_{ik} r$ в силу выбора r. По лемме 9 $A \sim r^m A \sim A \cap \Sigma(X)$ для любого целого m. Так же, как и в лемме 5, докажем, что для подходящего m найдутся непустое пересечение $A_{ik} \cap r^m A_{ik}$ и элемент $r^m s_{ik} c = s_{ik} d$, где $c, d \in N_i$. Ввиду лемм 7, 1 подгруппы $M = \langle j, s_{ik} c \rangle$ и $L = \langle j, s_{ik} d \rangle$ — конечные группы Фробениуса с циклическим дополнением $\langle s_{ik} \rangle$, содержащиеся в подходящих подгруппах веера X_i. Но тогда, как и в лемме 5,

$$L = \langle s_{ik}, d \rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{s_{ik} d} \right\rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{r^m s_{ik} c} \right\rangle = \left\langle s_{ik}, s_{ik}^{s_{ik} c} \right\rangle = \langle s_{ik}, c \rangle = M$$

и $r^m \in L$; противоречие. Таким образом, $C_G(j)$ не содержит элементов бесконечного порядка, что противоречит лемме 8. Следовательно, группы G не существует, и лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3 практически дословно повторяет доказательство теоремы 3 из [1], по условиям которой каждое сечение по конечной подгруппе либо является группой без кручения, либо обладает обобщенно конечным элементом простого порядка > 2. В доказываемой теореме группа обладает обобщенно конечным элементом порядка > 2. Но тогда сечение обладает обобщенно конечным элементом либо простого порядка > 2, либо порядка 4. В первом случае ссылаемся на теорему 2 из [1], во втором — на теорему 2 настоящей статьи. В остальном текст из [1] переносится дословно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Созутов А. И., Янченко М. В.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 898–913.
2. *Созутов А. И.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 573–598.

3. *Шунков В. П.* О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992.
4. *Коуровская тетрадь*: Нерешенные вопросы теории групп. Изд. 15-е. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2002.
5. *Шунков В. П.* T_0-группы. Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН, 2000.
6. *Янченко М. В.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Вестн. Красноярской гос. архитектурно-строительной академии. Красноярск: КрасГАСА, 2005. С. 301–302.
7. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
8. *Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П.* Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004.
9. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978.
10. *Беляев В. В.* Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 5. С. 531–535.

Статья поступила 11 апреля 2006 г.

Созутов Анатолий Ильич, *Янченко Михаил Васильевич*
Сибирский федеральный университет, Институт архитектуры и строительства, пр. Свободный, 82, Красноярск 660041
sozutov_ai@mail.ru, chm@gasa.krs.ru