Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.95

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ С ДАННЫМИ НА ДВУХ ПОВЕРХНОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Л. Казаков

Аннотация: Рассматривается обобщенная задача Коши с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы второго порядка. Отличие обобщенной задачи Коши от задачи Коши в традиционной постановке состоит в том, что начальные условия для разных неизвестных функций заданы на разных поверхностях: для каждой неизвестной функции ставится свое начальное условие на своей координатной оси. Ранее обобщенная задача Коши рассматривалась в работах Ш. Рикье, Н. М. Гюнтера, С. Л. Соболева, Н. А. Леднева, В. М. Тешукова, С. П. Баутина. В данной работе строится решение обобщенной задачи Коши в случае, когда в системе уравнений с частными производными дополнительно присутствуют значения производных неизвестных функций (в том числе выводящих), заданные на координатных осях. Последнее обстоятельство принципиально отличает задачу, рассмотренную в настоящей статье, от ранее изученных обобщенных задач Коши.

Ключевые слова: квазилинейная система уравнений с частными производными, начально-краевая задача, теорема существования и единственности аналитического решения.

Одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений с частными производными является доказательство аналогов и обобщений теоремы Ковалевской.

Обобщение задачи Коши (ЗК) на случай, когда начальные данные для разных функций заданы на разных поверхностях, впервые рассмотрено в работе французского математика Рикье [1]. Монография Рикье является библиографической редкостью, изложение некоторых положений теории Рикье можно найти в книге С. П. Финикова [2]. Результаты Рикье получили развитие в трудах российских математиков Н. М. Гюнтера [3, 4], С. Л. Соболева [5, 6] и Н. А. Леднева [7]. Именно Н. А. Леднев предложил термин «обобщенная задача Коши» (ОЗК).

В работах С. П. Баутина [8, 9] исследована ОЗК для квазилинейной аналитической системы 2-го порядка, в том числе сформулированы необходимые и достаточные условия существования решения в виде формальных двойных рядов и достаточные условия сходимости рядов. Используя методику, предложенную в [9], удалось доказать [10] теорему существования и единственности

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 02–01–011–22, 04–01–00–205).

локально аналитического решения ОЗК для квазилинейной системы 2-го порядка с особенностью вида u/x или x/u.

Содержательным приложением теории уравнений с частными производными является решение задач механики сплошной среды, в частности, газовой динамики. В работах В. М. Тешукова [11–14] в процессе построения кусочно аналитических течений газа с ударными волнами решаются конкретные ОЗК с использованием специальной методики. При этом для рассмотренных задач проверены необходимые и достаточные условия существования формального решения. При ограничениях, вызванных физическим смыслом задач, доказана сходимость рядов. В [15, 16] с использованием ОЗК исследуются течения газа с ударными волнами в окрестности оси или центра симметрии, где система уравнений газовой динамики имеет особенность вида u/r (u — скорость газа, r — расстояние до оси или центра симметрии).

В настоящей работе строится решение ОЗК с данными на двух поверхностях для квазилинейной аналитической системы 2-го порядка. Методика исследования основывается на методике, предложенной С. П. Баутиным [9], дополняет ее и обобщает на случай, когда в системе уравнений с частными производными дополнительно присутствуют значения производных неизвестных функций (в том числе выводящих), заданные на координатных осях. Последнее обстоятельство принципиально отличает задачу, рассмотренную в данной статье, от ранее изученных в [1–9], но схожие начально-краевые задачи для нелинейных уравнений с частными производными, содержащих также значения производных неизвестных функций, заданные на координатных осях, рассматривались в работе С. П. Баутина [17].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия существования решения рассмотренной ОЗК в виде двойных рядов по степеням независимых переменных. Выписаны системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), при решении которых определяются коэффициенты рядов. Системы решены методом Гаусса и получены явные формулы для искомых коэффициентов. В результате анализа данных формул определены достаточные условия сходимости построенных рядов. Получены также удобные для проверки достаточные условия, при выполнении которых рассмотренная ОЗК имеет единственное локально аналитическое решение. Приведены контрпримеры и теоремы, которые показывают, что сформулировать необходимые и достаточные условия аналитической разрешимости ОЗК в данном случае невозможно, а также что при невыполнении любого из полученных достаточных условий сходимости ряды могут как сходиться, так и расходиться.

Рассматривается квазилинейная система уравнений с частными производными в случае двух неизвестных функций, зависящих от двух независимых переменных:

$$A(\vec{x},\vec{U})\vec{U}_x + B(\vec{x},\vec{U})\vec{U}_y = \vec{c}(\vec{x},\vec{U}). \tag{1}$$

Здесь $\vec{U} = \{u,v\}$ — вектор неизвестных функций; $\vec{x} = \{x,y\}$ — вектор независимых переменных; A, B — матрицы размера 2×2; $\vec{c}\in\mathbb{R}^2$; коэффициенты матриц A, B и вектора $\vec{c}$ являются функциями от x,y,u,v.

На двух разных кривых $\phi_1(x,y) = 0$, $\phi_2(x,y) = 0$, пересекающихся при $x = x_0, y = y_0$, ставятся для неизвестных функций два начальных условия:

$$\Phi_1(x,y,u,v)|_{\phi_1(x,y)=0} = 0, \quad \Phi_2(x,y,u,v)|_{\phi_2(x,y)=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$, $\Phi_1(x,y,u,v)$, $\Phi_2(x,y,u,v)$ — заданные функции своих аргументов. Константы x_0, y_0, u_{00}, v_{00} выбираются так, чтобы выполнялись равенства

$$\phi_1(x_0, y_0) = 0,\ \phi_2(x_0, y_0) = 0,\ \Phi_1(x_0, y_0, u_{00}, v_{00}) = 0,\ \Phi_2(x_0, y_0, u_{00}, v_{00}) = 0. \quad (3)$$

Замечание 1. Если выбор констант x_0, y_0, u_{00}, v_{00} можно осуществить двумя или более способами, т. е. если система (3) имеет больше одного решения, то используется одно из них и вводится дополнительное требование: точка $(x = x_0, y = y_0, u = u_{00}, v = v_{00})$ должна быть локально единственной, т. е. должна существовать проколотая окрестность этой точки, в которой равенства (3) не выполняются.

Задача (1), (2) есть ОЗК с данными на двух поверхностях для двух неизвестных функций. Она в дальнейшем для краткости именуется *задачей* А.

Для того чтобы построить решение задачи А в виде рядов по степеням независимых переменных и доказать их сходимость, удобно преобразовать ее так, чтобы начальные данные для неизвестных функций были, во-первых, заданы на координатных осях, во-вторых, были однородными. С этой целью делаются замены независимых переменных и неизвестных функций.

Вводятся новые независимые переменные x', y' по формулам

$$x' = \phi_1(x, y), \quad y' = \phi_2(x, y). \quad (4)$$

Якобиан данного преобразования имеет вид $J_1 = \begin{vmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ \phi_{2x} & \phi_{2y} \end{vmatrix}$. Предполагается, что

$$J_1|_{x=x_0, y=y_0} \neq 0, \quad (5)$$

а значит, замена (4) в некоторой окрестности точки $(x = x_0, y = y_0)$ невырожденная. Геометрический смысл условия (5) состоит в том, что кривые $\phi_1(x, y) = 0$, $\phi_2(x, y) = 0$ в точке $(x = x_0, y = y_0)$ пересекаются, не касаясь друг друга.

После замены (4) кривая $\phi_1(x, y) = 0$ переходит в координатную ось $x' = 0$, кривая $\phi_2(x, y) = 0$ — в координатную ось $y' = 0$, точка $(x = x_0, y = y_0)$ — в точку $(x' = 0, y' = 0)$. Штрих у новых переменных для облегчения написания в дальнейшем опускается, и для системы уравнений сохраняется написание (1).

Для того чтобы было удобнее ввести новые неизвестные функции, выполняются вспомогательные преобразования начальных данных и системы уравнений.

Предполагается, что

$$\Phi_{1u}(0, 0, u_{00}, v_{00}) \neq 0, \quad \Phi_{2v}(0, 0, u_{00}, v_{00}) \neq 0. \quad (6)$$

Если для функций $\Phi_1(x, y, u, v)$, $\Phi_2(x, y, u, v)$, имеющих в окрестности точки $(x = 0, y = 0, u = u_{00}, v = v_{00})$ непрерывные производные по соответствующим переменным, выполняются условия (6), то по теореме о неявной функции начальные условия (2) можно переписать в виде

$$u|_{x=0} = u_0(y, v)|_{x=0}, \quad v|_{y=0} = v_0(x, u)|_{y=0}. \quad (7)$$

Таким образом, предполагается, что в окрестности рассматриваемой точки первое из условий (2) разрешается относительно неизвестной функции u, а второе — относительно неизвестной функции v. Из (3) следует, что справедливы равенства

$$u_{00} = u_0|_{x=0, y=0} = u_0(0, v_{00}), \quad v_{00} = v_0|_{x=0, y=0} = v_0(0, u_{00}).$$

Прежде чем делать замену неизвестных функций, уравнения системы (1) удобно разрешить относительно выводящих производных u_x, v_y. Это возможно при условии

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0,y=0,u=u_{00},v=v_{00}} = (a_{11}b_{22} - b_{12}a_{21})|_{x=0,y=0,u=u_{00},v=v_{00}} \neq 0, \tag{8}$$

где a_{11}, a_{21} — элементы 1-го столбца матрицы A; b_{12}, b_{22} — элементы 2-го столбца матрицы B. Если неравенство (8) выполняется, то систему (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u_x &= a(x,y,u,v)u_y + b(x,y,u,v)v_x + f(x,y,u,v), \\ v_y &= c(x,y,u,v)u_y + d(x,y,u,v)v_x + g(x,y,u,v). \end{aligned} \tag{9}$$

Введем следующие обозначения: $A = a(0,0,u_{00},v_{00})$, $B = b(0,0,u_{00},v_{00})$, $C = c(0,0,u_{00},v_{00})$, $D = d(0,0,u_{00},v_{00})$, a,b,c,d — константы,

$$\begin{aligned} f_1 &= [a(x,y,u,v) - A]u_y + [b(x,y,u,v) - B]v_x + f, \\ g_1 &= [c(x,y,u,v) - C]u_y + [d(x,y,u,v) - D]v_x + g. \end{aligned} \tag{10}$$

При таких обозначениях система (9) приобретет вид

$$u_x = Au_y + Bv_x + f_1, \quad v_y = Cu_y + Dv_x + g_1, \tag{11}$$

т. е. в системе (9) в точке $(x = 0, y = 0)$ выделена главная часть.

Теперь сделаем замену неизвестных функций, целью которой, как указано выше, является приведение начальных данных к однородному виду. Новые неизвестные функции u', v' вводятся по формулам

$$u' = u - u_0(y,v)|_{x=0}, \quad v' = v - v_0(x,u)|_{y=0}. \tag{12}$$

Якобиан замены (12) имеет вид

$$J_2 = \begin{vmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{vmatrix} = 1 - u_{0v}(y,v)|_{x=0} v_{0u}(x,u)|_{y=0}.$$

Введем обозначения:

$$\theta = u_{0v}(0,v_{00}), \quad \kappa = v_{0u}(0,u_{00}), \quad \theta, k \text{ — постоянные.} \tag{13}$$

Предположим, что

$$J_2|_{x=0,y=0,u=u_{00},v=v_{00}} = 1 - \theta\kappa \neq 0, \tag{14}$$

следовательно, замена (12) в некоторой окрестности точки $O(x = 0, y = 0, u = u_{00}, v = v_{00})$ невырожденная. В результате замены (12) начальные условия (7) примут вид

$$u'|_{x=0} = 0, \quad v'|_{y=0} = 0.$$

Выражения старых неизвестных функций u, v через новые неизвестные функции u', v' (и независимые переменные x, y) имеют вид

$$u = u' + u_0(y, v' + v_{00})|_{x=0}, \quad v = v' + v_0(x, u' + u_{00})|_{y=0}. \tag{15}$$

Положим

$$\begin{aligned} u_1|_{x=0} &= u_{0y}(y, v' + v_{00})|_{x=0} + [u_{0v}(y, v' + v_{00})|_{x=0} - \theta]v'_y|_{x=0}, \\ v_1|_{y=0} &= v_{0x}(x, u' + u_{00})|_{y=0} + [v_{0u}(x, u' + u_{00})|_{y=0} - \kappa]u'_x|_{y=0}. \end{aligned} \tag{16}$$

С учетом обозначений (13), (16) выражения производных старых неизвестных функций u, v через новые неизвестные функции u', v' (и независимые переменные) имеют вид

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x, \quad u_y = u'_y + \theta v'_y|_{x=0} + u_1|_{x=0}, \\ v_y &= v'_y, \quad v_x = v'_x + \kappa u'_x|_{y=0} + v_1|_{y=0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Соотношения (15), (17) подставим в систему (11). В результате эта система преобразуется к виду

$$\begin{aligned} u_x &= Au_y + Bv_x + A\theta v_y|_{x=0} + B\kappa u_x|_{y=0} + p, \\ v_y &= Cu_y + Dv_x + C\theta v_y|_{x=0} + D\kappa u_x|_{y=0} + q. \end{aligned} \tag{18}$$

где $p = Au_1|_{x=0} + Bv_1|_{y=0} + f_1$, $q = Cu_1|_{x=0} + Dv_1|_{y=0} + g_1$. С целью облегчения написания штрих у неизвестных функций u, v здесь и далее опускается. Из построения функций p, q следует (см. (10), (16)), что они зависят от независимых переменных x, y, неизвестных функций u, v и их первых производных, причем линейны относительно производных u_y, v_x, $u_x|_{y=0}$, $v_y|_{x=0}$, и коэффициенты перед этими производными обращаются в точке $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$ в нуль.

Как показано выше, начальные данные для системы (18) будут однородными:

$$u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0. \tag{19}$$

Замечание 2. Ранее задача (1), (2) была поставлена в работе С. П. Баутина [9]. Однако в [9] делается замена неизвестных функций, которая возможна, вообще говоря, только в случае, когда начальные условия (2) имеют вид

$$\Phi_1(x, y, u)|_{\phi_1(x,y)=0} = 0, \quad \Phi_2(x, y, v)|_{\phi_2(x,y)=0} = 0.$$

Правые части условий (7) в этом случае зависят только от независимых переменных:

$$u|_{x=0} = u_0(y), \quad v|_{y=0} = v_0(x),$$

а значит, $\theta = 0$, $\kappa = 0$. Таким образом, в настоящей статье исследуется задача А в более общей постановке, чем в статье [9].

Теорема 1. *Пусть в задаче (18), (19) функции* $p = p(x, y, u, v, u_y, v_x, u_x|_{y=0}, v_y|_{x=0})$, $q = q(x, y, u, v, u_y, v_x, u_x|_{y=0}, v_y|_{x=0})$ *обладают следующими свойствами:* а) *линейны относительно переменных* u_y, v_x, $u_x|_{y=0}$, $v_y|_{x=0}$, *причем коэффициенты перед этими переменными обращаются в точке* $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$ *в нуль;* б) *аналитичны в некоторой окрестности точки* $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$ *по переменным* x, y, u, v.

Положим $\alpha = AD$, $\beta = BC$, $\gamma = 1 + \alpha - \beta$ *и*

$$\Delta_0^* = \gamma, \quad \Delta_{n+1}^* = \gamma - \frac{\alpha}{\Delta_n^*}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{20}$$

$$\Delta_0 = \begin{cases} \frac{(1-C\theta)(1-B\kappa)-\alpha\theta\kappa}{1-\theta\kappa}, & 1-\theta\kappa \neq 0, \\ (1-C\theta)(1-B\kappa) - \alpha\theta\kappa, & 1-\theta\kappa = 0, \end{cases} \quad \Delta_1 = \begin{cases} \gamma - \frac{\alpha}{\Delta_0}, & 1-\theta\kappa \neq 0, \\ \gamma, & 1-\theta\kappa = 0, \end{cases}$$

$$\Delta_{n+1} = \gamma - \frac{\alpha}{\Delta_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Если выполняются условия

$$\Delta_n \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{22}$$

$$\Delta_n^* \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{23}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n^* = \Delta_\infty^*, \quad \lim_{n\to\infty} \Delta_n = \Delta_\infty, \quad \Delta_\infty^* = \Delta_\infty, \quad 0 < |\Delta_\infty| < +\infty, \tag{24}$$

$$\frac{|\alpha|}{\Delta_\infty^2} < 1, \tag{25}$$

то у задачи (18), (19) *существует единственное локально аналитическое решение. При этом условия* (22) *являются необходимыми и достаточными условиями существования и единственности решения в виде формальных степенных рядов.*

Замечание 3. Выполнение условия $1 - \theta\kappa \neq 0$, как показано выше (см. (14)), необходимо для того, чтобы было возможно перейти от задачи (1), (2) к задаче (18), (19), однако задача (18), (19) может иметь аналитическое решение в случае $1 - \theta\kappa = 0$.

Доказательство теоремы 1. Если выполнено условие (25), то с помощью замены независимых переменных $x' = \varepsilon_1 x$, $y' = \varepsilon_2 y$, ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ можно добиться (см. [9]) выполнения неравенств

$$|A| < |\Delta_\infty|, \quad |D| < |\Delta_\infty|. \tag{26}$$

В дальнейшем предполагается, что такая замена уже сделана и неравенства (26) выполняются.

Решение задачи (18), (19) строится в виде рядов (символ z принимает значения u, v)

$$z(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0} \frac{z_{k,l}x^k y^l}{k!l!}, \quad z_{k,l} = \frac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k \partial y^l}\bigg|_{x=y=0}. \tag{27}$$

Пусть

$$r_{k,l} = \frac{\partial^{k+l} r}{\partial x^k \partial y^l}\bigg|_{\substack{x=y=0,\\ u=v=0}}, \ \vec{z}_n = (z_{n,0}; z_{n-1,1}; \dots; z_{0,n}), \ \vec{r}_n = (r_{n,0}; r_{n-1,1}; \dots; r_{0,n}),$$

где символ r принимает значения p, q. Из построения функций p, q следует, что в $r_{k,l}$ будут входить компоненты векторов $\vec{z}_m$ при $0 \le m \le l + k = n$ и не будут входить компоненты векторов $\vec{z}_m$ при $m > l + k = n$.

Возможность однозначного определения коэффициентов рядов (27) доказывается индукцией по $n = k + l$. Из начальных условий (19) вытекает, что

$$u_{0,l} = v_{k,0} = 0, \quad k, l \in \mathbb{N}_0, \tag{28}$$

в частности, $u_{0,0} = v_{0,0} = 0$, $u_{0,1} = v_{1,0} = 0$. Остальные компоненты векторов $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$u_{1,0} = A\theta v_{0,1} + B\kappa u_{1,0} + p_{0,0}, \quad v_{0,1} = C\theta v_{0,1} + D\kappa u_{1,0} + q_{0,0}, \tag{29}$$

которая получается, если в обеих частях системы (18) положить $x = y = u = v = 0$ и учесть начальные условия в виде (28) при $k = 1$ и при $l = 1$. Определитель системы (29) равен $(1 - B\kappa)(1 - C\theta) - AD\theta\kappa$, т. е. компоненты векторов $\vec{z}_1$ однозначно определяются тогда и только тогда, когда $\Delta_0 \neq 0$ (см. (21)).

Пусть все $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$, $n \ge 1$, найдены. Чтобы найти $\vec{z}_{n+1}$, уравнения (18) продифференцируем k раз по x, $n - k$ раз по y, положим $x = y = u = v = 0$ и учтем начальные условия в виде (28). В результате получим соотношения

$$\left\{\begin{aligned}
u_{0,n+1} &= 0\\
v_{0,n+1} &= Cu_{0,n+1} + Dv_{1,n} + C\theta v_{0,n+1} + q_{0,n}\\
u_{1,n} &= Au_{0,n+1} + Bv_{1,n} + A\theta v_{0,n+1} + p_{0,n}\\
v_{1,n} &= Cu_{1,n} + Dv_{2,n-1} + q_{1,n-1}\\
u_{2,n-1} &= Au_{1,n} + Bv_{2,n-1} + p_{1,n-1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_{k,n+1-k} &= Cu_{k,n-k+1} + Dv_{k+1,n-k} + q_{k,n-k}\\
u_{k+1,n-k} &= Au_{k,n-k+1} + Bv_{k+1,n-k} + p_{k,n-k}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_{n-1,2} &= Cu_{n-1,2} + Dv_{n,1} + q_{n-1,1}\\
u_{n,1} &= Au_{n-1,2} + Bv_{n,1} + p_{n-1,1}\\
v_{n,1} &= Cu_{n,1} + Dv_{n+1,0} + D\kappa u_{n+1,0} + q_{n,0}\\
u_{n+1,0} &= Au_{n,1} + Bv_{n+1,0} + B\kappa u_{n+1,0} + p_{n,0}\\
v_{n+1,0} &= 0,
\end{aligned}\right. \tag{30}$$

которые являются СЛАУ для компонент векторов $\vec{u}_{n+1}$, $\vec{v}_{n+1}$.

СЛАУ (30) решается методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса). При этом «прямой ход» состоит в построении величин

$$\begin{gathered}
\mu_0^{(1)} = 1, \quad \mu_0^{(2)} = 1, \quad \mu_1^{(1)} = 1 - C\theta, \quad \mu_1^{(2)} = 1 - B\kappa,\\
\mu_{m+1}^{\nu} = \gamma\mu_m^{\nu} - \alpha\mu_{m-1}^{\nu}, \quad \nu = 1,2,\ m = 1,\dots,n,
\end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered}
\lambda_0^{(1)} = \theta, \quad \lambda_0^{(2)} = \kappa, \quad \lambda_1^{(1)} = B(1 - C\theta) + \alpha\theta, \quad \lambda_1^{(2)} = C(1 - B\kappa) + \alpha\kappa,\\
\lambda_{m+1}^{\nu} = \gamma\lambda_m^{\nu} - \alpha\lambda_{m-1}^{\nu}, \quad \nu = 1,2,\ m = 1,\dots,n.
\end{gathered} \tag{32}$$

$$\mu_0 = 1 - \theta\kappa,\ \mu_1 = (1 - C\theta)(1 - B\kappa) - \alpha\theta\kappa,\ \mu_{m+1} = \gamma\mu_m - \alpha\mu_{m-1}, \quad m = 1,\dots,n. \tag{33}$$

«Обратный ход» состоит в построении величин

$$u_{0,n+1} = 0,$$

$$\begin{aligned}
u_{k+1,n-k} = \frac{1}{\mu_{n+1}}\Bigg[&\mu_{n-k}^{(2)} \sum_{i=0}^{k} A^{k-i}\big(A\lambda_i^{(1)} q_{i,n-i} + \mu_{i+1}^{(1)} p_{i,n-i}\big)\\
&+ \lambda_{k+1}^{(1)} \sum_{i=k+1}^{n} D^{i-k-1}\big(\mu_{n+1-i}^{(2)} q_{i,n-i} + D\lambda_{n-i}^{(2)} p_{i,n-i}\big)\Bigg], \quad k = 0,1,\dots,n-1,
\end{aligned} \tag{34}$$

$$u_{n+1,0} = \frac{1}{\mu_{n+1}}\left[\sum_{i=0}^{n} A^{n-i}\big(A\lambda_i^{(1)} q_{i,n-i} + \mu_{i+1}^{(1)} p_{i,n-i}\big)\right]; \tag{35}$$

$$v_{n+1,0} = 0,$$

$$\begin{aligned}
v_{n-k,k+1} = \frac{1}{\mu_{n+1}}\Bigg[&\mu_{n-k}^{(1)} \sum_{i=0}^{k} D^{k-i}\big(D\lambda_i^{(2)} p_{n-i,i} + \mu_{i+1}^{(2)} q_{n-i,i}\big)\\
&+ \lambda_{k+1}^{(2)} \sum_{i=k+1}^{n} A^{i-k-1}\big(\mu_{n+1-i}^{(1)} p_{n-i,i} + A\lambda_{n-i}^{(1)} q_{n-i,i}\big)\Bigg], \quad k = 0,1,\dots,n-1,
\end{aligned} \tag{36}$$

$$v_{0,n+1} = \frac{1}{\mu_{n+1}}\left[\sum_{i=0}^{n} D^{n-i}\big(D\lambda_i^{(2)} p_{n-i,i} + \mu_{i+1}^{(2)} q_{n-i,i}\big)\right]. \tag{37}$$

Лемма 1. *Пусть*

$$\Delta_{00} = \begin{cases} 1-\theta\kappa, & \text{если } 1-\theta\kappa \neq 0, \\ 1, & \text{если } 1-\theta\kappa = 0. \end{cases}$$

Если $\Delta_i \neq 0$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, *то справедливо равенство*

$$\mu_n = \Delta_{00} \prod_{i=0}^{n-1} \Delta_i, \tag{38}$$

здесь Δ_i *определяются по формулам* (21).

Доказательство леммы проводится индукцией по n и не приводится.

Следствие. *Условия* $\mu_n \neq 0$ *выполнены при всех* $n \in \mathbb{N}$ *тогда и только тогда, когда при всех* $n \in \mathbb{N}_0$ *выполнены условия* (22): $\Delta_n \neq 0$.

Таким образом, условия (22) — необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости СЛАУ (30). При этом для нахождения $\vec{u}_1$, $\vec{v}_1$ надо требовать выполнения условия $\mu_1 = \Delta_{00}\Delta_0 \neq 0$, для нахождения $\vec{u}_2$, $\vec{v}_2$ — выполнения условия $\mu_2 = \Delta_{00}\Delta_0\Delta_1 \neq 0$, для нахождения $\vec{u}_3$, $\vec{v}_3$ — неравенства $\mu_3 = \Delta_{00}\Delta_0\Delta_1\Delta_2 \neq 0$. Вообще, при переходе от нахождения $\vec{u}_n$, $\vec{v}_n$ к нахождению $\vec{u}_{n+1}$, $\vec{v}_{n+1}$ к ранее указанным условиям: $\Delta_0 \neq 0, \Delta_1 \neq 0, \dots, \Delta_{n-1} \neq 0$ ($\Delta_{00} \neq 0$ по определению), добавляется условие $\Delta_n \neq 0$.

Итак, индукцией по n доказано, что условия (22) суть необходимые и достаточные условия существования и единственности коэффициентов рядов (27), которые можно найти по формулам (34)–(37).

Для доказательства сходимости рядов (27) используется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{\mu_n\}$ *определяется из* (33) *и обладает свойством* (38). *Если выполнены условия* (22)–(25) *теоремы* 1, *то найдутся константы* $M > 0$, $0 < q_* < 1$ *такие, что при всех* $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ *выполнены неравенства*

$$\left| \frac{E^k \pi_i^{(1)} \pi_j^{(2)}}{\mu_{i+j+k}} \right| < M q_*^k.$$

Здесь символ E *принимает значения* A, D, *символ* π — *значения* μ, λ.

Доказательство леммы опирается на соотношения (23)–(26) и лемму 1, весьма громоздко и здесь не приводится.

Сходимость рядов (27) доказывается классическим методом мажорант.

Для задачи (18), (19) мажорантная задача строится следующим образом. Вначале выбираются положительные константы M_1, ρ такие, что функция

$$R = \frac{M_1}{\left[1 - \frac{(x+y+U+V)}{\rho}\right]}[(x+y+U+V)(U_y + V_x + U_x + V_y) + 1]$$

мажорирует функции p, q ($R \gg p, q$). Это возможно при условии $U_{k,l} \geq |u_{k,l}|$, $V_{k,l} \geq |v_{k,l}|$, $k, l \in \mathbb{N}_0$, в силу аналитичности функций $a, b, c, d, f, g, u_0, v_0$.

Пусть

$$R_{k,l} = \left. \frac{\partial^{k+l} R}{\partial x^k \partial y^l} \right|_{\substack{x=y=0, \\ U=V=0}}.$$

Далее строятся константы $U_{k,l}$, $V_{k,l}$ и индукцией по $n = k+l$ доказывается, что $|U_{k,l}| \geq |u_{k,l}|$, $|V_{k,l}| \geq |v_{k,l}|$,

$$V_{1,0} = U_{0,1} = 0, \quad V_{0,1} = U_{1,0} = R_{0,0},$$

из построения функции R вытекает, что $|V_{0,1}| \geq |v_{0,1}|$, $|U_{1,0}| \geq |u_{1,0}|$.

Пусть $U_{k,l} \geq |u_{k,l}|$, $V_{k,l} \geq |v_{k,l}|$, $k+l = m$, при $m = 1, \ldots, n$ и

$$U_{0,n+1} = 0,$$

$$U_{k+1,n-k} = M(q_*+1)\left(\sum_{i=0}^{k} Mq_*^{k-i}R_{i,n-i} + \sum_{i=k+1}^{n} q_*^{i-k-1}R_{i,n-i}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$U_{n+1,0} = M(q_*+1)\sum_{i=0}^{n} Mq_*^{n-i}R_{i,n-i};$$

$$V_{n+1,0} = 0,$$

$$V_{n-k,k+1} = M(q_*+1)\left(\sum_{i=0}^{k} Mq_*^{k-i}R_{n-i,i} + \sum_{i=k+1}^{n} q_*^{i-k-1}R_{n-i,i}\right), \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$V_{0,n+1} = M(q_*+1)\sum_{i=0}^{n} Mq_*^{n-i}R_{n-i,i}.$$

Из построения функции R, леммы 2 и предположения индукции следует, что можно подобрать константы $M > 0$, $0 < q_* < 1$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства $V_{k,l} \geq |v_{k,l}|$, $U_{k,l} \geq |u_{k,l}|$, $k+l = n$. Следовательно,

$$U(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} \frac{U_{k,l}x^k y^l}{k!l!} \gg u(x,y), \quad V(x,y) = \sum_{k,l \in \mathbb{N}_0} \frac{V_{k,l}x^k y^l}{k!l!} \gg v(x,y). \tag{39}$$

Далее доказывается сходимость рядов (39). Строятся константы W_n по формулам

$$W_0 = 0,\ W_1 = V_{1,0} = U_{0,1} = R_0^* > U_{0,1} = V_{1,0} = 0,\ W_{n+1} = R_n^*, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$R^* = \frac{M_1M_2}{\left[1 - \frac{(t+2W)}{\rho}\right]}[(t+2W)4W_t + 1], \quad R_n^* = \left.\frac{d^nR^*}{dt^n}\right|_{t=W=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$M_2 = \frac{2M(q_*+1)}{1-q_*} > M(q_*+1)\left(\sum_{i=0}^{k} q_*^{k-i} + \sum_{i=k+1}^{n} q_*^{i-k-1}\right) > M(q_*+1)\sum_{i=0}^{n} q_*^{n-i}.$$

Тогда $W_n \geq \max\limits_{k+l=n}\{U_{k,l}; V_{k,l}\}$.

Построение коэффициентов рядов $\sum\limits_{n\in\ \mathbb{N}_0} W_n t^n/n!$ по изложенной процедуре равносильно решению ЗК:

$$W_t = \frac{M_2M_1}{\left[1 - \frac{(t+2W)}{\rho}\right]}[(t+2W)4W_t + 1], \quad W(0) = 0. \tag{40}$$

Если задачу (40) записать в нормальном виде:

$$W_t = G_1(t, W), \quad W(0) = 0, \tag{41}$$

где

$$G_1 = \frac{M_3}{1 - \left[\frac{(t+2W)}{\rho} + 4M_3(t+2W)\right]}, \quad M_3 = M_1 M_2,$$

то правая часть дифференциального уравнения — функция $G_1(t, W)$ — является аналитической в окрестности точки $(t = 0, W = 0)$ функцией, мажорирующей нуль.

По теореме Ковалевской задача (41) имеет единственное аналитическое мажорирующее нуль решение. Из способа построения задачи следует, что функция $W(x+y)$ мажорирует функции $U(x,y)$, $V(x,y)$ (см. (39)), а значит, задача (41) является мажорантной для задачи (18), (19) и $W(x+y) \gg u(x,y), v(x,y)$.

Теорема 1 доказана.

Теперь сформулируем теорему, устанавливающую удобные для проверки достаточные условия существования формального решения и достаточные условия аналитической разрешимости задачи (18), (19).

Положим $\Delta_+ = \frac{1}{2}(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha})$, $\Delta_- = \frac{1}{2}(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\alpha})$. Значения $\Delta_\pm$ являются корнями уравнения $\Delta = \gamma - \frac{\alpha}{\Delta}$. Через $\Delta_{\max}$ обозначается то из значений Δ_+, Δ_-, модуль которого больше, а через $\Delta_{\min}$ — то из значений, модуль которого меньше. Если $\gamma^2 - 4\alpha = 0$, то $\Delta_{\max} = \Delta_{\min}$.

Теорема 2 (достаточные условия существования формального решения и достаточные условия аналитической разрешимости задачи (18), (19)). 1. *Пусть*

$$\gamma \neq 0, \quad \gamma^2 - 4\alpha \geq 0, \quad \mu_0 \neq 0, \quad \Delta_0 \neq 0, \quad \Delta_0 \notin \Lambda(\alpha, \gamma). \tag{42}$$

Тогда задача (18), (19) *имеет единственное формальное решение в виде рядов по степеням x, y. При этом*

1.1) *если* $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}; \Delta_{\min}\right)$,

1.2) *если* $\gamma < 0$, $\alpha > 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left(\Delta_{\min}; \frac{\alpha}{\gamma}\right]$,

1.3) *если* $\gamma < 0$, $\alpha < 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\gamma\alpha}{\gamma^2-\alpha}; \frac{\alpha}{\gamma}\right]$,

1.4) *если* $\gamma > 0$, $\alpha < 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \left[\frac{\alpha}{\gamma}; \frac{\gamma\alpha}{\gamma^2-\alpha}\right]$,

1.5) *если* $\gamma \neq 0$, $\alpha = 0$, *то* $\Lambda(\alpha,\gamma) = \{0\}$.

2. *Пусть*

$$\gamma \neq 0, \quad \gamma^2 - 4\alpha \geq 0, \quad \mu_0 = 0, \quad \Delta_0 \neq 0. \tag{43}$$

Тогда задача (18), (19) *имеет единственное формальное решение в виде рядов по степеням x, y.*

3. *Пусть*

$$\gamma = 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \Delta_0 \neq 0. \tag{44}$$

Тогда задача (18), (19) *имеет единственное формальное решение в виде рядов по степеням x, y.*

4. *Пусть* $\Delta_n \neq 0$;

$$\gamma \neq 0, \quad \gamma^2 - 4\alpha > 0, \quad \Delta_0 \neq \Delta_{\min}. \tag{45}$$

Тогда задача (18), (19) *имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0)$.

Доказательство теоремы 2 проводится сведением к теореме 1 и здесь не приводится.

Следствие. *Пусть выполнены условие* (45) *и любое из условий* (42)–(44). *Тогда задача* (18), (19) *имеет единственное локально аналитическое решение в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0)$.

Замечание 4. Множество $\Lambda(\alpha, \gamma)$ при $\alpha \neq 0$ всегда лежит по одну сторону от нуля.

Замечание 5. Если $\gamma^2 - 4\alpha = 0$, то $\Delta^2_{\max} = \Delta^2_{\min} = \gamma^2/4 = \alpha$ и достаточное условие (25) сходимости рядов не выполняется.

Замечание 6. В случае 3: $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\Delta_0 \neq 0$, условие $\gamma^2 - 4\alpha \geq 0$ не используется.

Замечание 7. Если $\theta = \kappa = 0$, то для всех точек из областей Ω_1–Ω_5, описанных в работе [9], справедливо одно из условий (42)–(44).

Далее приводятся две теоремы существования и единственности локально аналитического решения задачи (18), (19) в случае, когда достаточные условия (23)–(25) сходимости рядов (27) не выполняются и система (18) полулинейна: коэффициенты перед производными неизвестных функций являются константами, а функции p, q зависят от неизвестных функций u, v и независимых переменных x, y.

Теорема 3. *Рассмотрим задачу*

$$\begin{gathered} u_x = Au_y + Bv_x + A\theta v_y|_{x=0} + B\kappa u_x|_{y=0} + p(x, y, u, v), \\ v_y = Cu_y + Dv_x + C\theta v_y|_{x=0} + D\kappa u_x|_{y=0} + q(x, y, u, v), \\ u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0. \end{gathered} \tag{46}$$

Пусть функции $p(x, y, u, v)$, $q(x, y, u, v)$ *являются аналитическими в некоторой окрестности точки* $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$.

Если выполняются условия

$$\alpha = AD \neq 0, \quad \gamma = 1 + AD - BC = 0,$$

$$\mu_0 = 1 - \theta\kappa \neq 0, \quad \mu_1 = (1 - C\theta)(1 - B\kappa) - \alpha\theta\kappa \neq 0,$$

то задача (46) *в некоторой окрестности точки* $(x = 0, y = 0)$ *имеет единственное аналитическое решение.*

Для задачи (46) *не выполняются условия* (23), *так как* $\Delta^*_0 = \gamma = 0$.

Доказательство. Легко убедиться (см. (31)–(33)), что при выполнении условий данной теоремы справедливы равенства

$$\pi_{2n} = \pi_0(-\alpha)^n, \quad \pi_{2n+1} = \pi_1(-\alpha)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{47}$$

где символ π принимает значения $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, μ, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$. Из соотношений (47) и условия теоремы, в частности, следует, что $\mu_n \neq 0$, т. е. выполнены условия (22) (см. следствие из леммы 1), и у задачи (46) по теореме 1 существует формальное решение в виде рядов по степеням x и y. Коэффициенты рядов строятся по формулам (34)–(37).

Коэффициенты мажорантного ряда строятся по формулам

$$W_0 = 0, \quad W_1 = R^*_0, \quad W_{n+1} = (n+1)R^*_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$R^* = \frac{M_*}{1 - \frac{(t+2W)}{\rho}}, \quad R^*_n = \left.\frac{d^n R^*}{dt^n}\right|_{t=W=0}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

что равносильно решению ЗК:

$$W_t = tR_t^* + R^*, \quad W(0) = 0.$$

Если последнюю задачу записать в нормальном виде:

$$W_t = G_3(t, W), \quad W(0) = 0, \tag{48}$$

где

$$G_3 = \frac{R^*(1 + tG_2)}{1 - 2tR^*G_2}, \quad G_2 = \frac{1}{\rho - t - 2W},$$

то правая часть дифференциального уравнения — функция $G_3(t, W)$ — является аналитической в окрестности точки $(t = 0, W = 0)$ функцией, мажорирующей нуль. По теореме Ковалевской задача (48) имеет единственное аналитическое мажорирующее нуль решение. Теорема 3 доказана.

Замечание 8. Теорема 3 справедлива как в случае $\gamma = 0$, $\alpha < 0$, а значит, $\gamma^2 - 4\alpha > 0$, так и в случае $\gamma = 0$, $\alpha > 0$, а значит, $\gamma^2 - 4\alpha < 0$.

Теорема 4. *Если функции $p(x, y, u, v)$, $q(x, y, u, v)$ аналитические в некоторой окрестности точки $O(x = 0, y = 0, u = 0, v = 0)$, $1 - \theta\kappa \neq 0$, то задача*

$$\begin{gathered} u_x = u_y + \theta v_y|_{x=0} + p(x, y, u, , v), \quad v_y = v_x + \kappa u_x|_{y=0} + q(x, y, u, , v), \\ u(0, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \end{gathered} \tag{49}$$

в некоторой окрестности точки $(x = 0, y = 0)$ имеет единственное аналитическое решение.

Для задачи (49) *справедливы равенства $\Delta_\infty = \alpha = 1$, т. е. не выполняется условие* (25).

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 3 и здесь не приводится.

Далее приведены пять контрпримеров для задачи А. Контрпример 1 показывает, что сформулировать для задачи А, как и для задачи Коши, необходимые и достаточные условия существования аналитического решения невозможно. Контрпримеры 2–4 показывают, что при существовании у задачи А формального решения в виде степенных рядов (рядов (27)) аналитическое решение задачи тем не менее может отсутствовать, так как ряды сходятся только в точке $(x = 0, y = 0)$. Для контрпримеров 2–4 справедливы условия существования и единственности формального решения (22), но не выполняется одно из достаточных условий сходимости (23)–(25). Для контрпримера 2 $\Delta_0 = \Delta_{\min}$, т. е. не выполняются условия (45), вследствие этого $\Delta_\infty \neq \Delta_\infty^*$, $\frac{|\alpha|}{\Delta_\infty^2} > 1$, т. е. не выполняются условия (24) и (25). Для контрпримеров 3 и 4 $\gamma^2 - 4\alpha = 0$, т. е. не выполняются условия (45), вследствие этого $\frac{|\alpha|}{\Delta_\infty^2} = 1$, т. е. не выполняется условие (25). Контрпример 5 показывает, что наличие в системе (18) слагаемых, содержащих выводящие производные неизвестных функций, заданные на координатных осях, существенным образом отличает задачу (18), (19), рассмотренную в данной работе, от задачи, рассмотренной в работе [9], где $\theta = \kappa = 0$.

Контрпример 1. Для любых значений A, B, C, D, θ, κ и любых аналитических в окрестности точки $(x = 0, y = 0)$ функций $u^0(x, y)$, $v^0(x, y)$ если функции p, q взять в виде

$$p = u^0 + xu_x^0 - Axu_y^0 - Byv_x^0 - A\theta(v^0 + yv_y^0)|_{x=0} - B\kappa(u^0 + xu_x^0)|_{y=0},$$

$$q = u^0 + yv^0_y - Cxu^0_y - Dyv^0_x - C\theta(v^0 + yv^0_y)|_{x=0} - D\kappa(u^0 + xu^0_x)|_{y=0},$$

то у задачи (18), (19) существует аналитическое решение $u = xu^0(x,y)$, $v = yv^0(x,y)$.

Обоснование контрпримера проводится прямой подстановкой функций u, v, p, q в систему (18).

Контрпример 2. Задача

$$u_x = Mu_y + v + 1, \quad v_y = v_x + u + 1, \quad u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0,$$

где $M = \mathrm{const} > 1$, имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x = 0, y = 0)$.

Обоснование контрпримера. С использованием формул (34)–(37) индукцией по n устанавливается, что при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство $u_{n+1,0} > M^n u_{n-1,0} > 0$, и поэтому формальный степенной ряд для $u(x,y)$ расходится при $x \neq 0$. Аналогично устанавливается расходимость ряда для $v(x,y)$ при $y \neq 0$.

Замечание 9. Идея, лежащая в основе контрпримера 2, та же, что лежит в основе контрпримера 2 из работы [9], однако функции p, q имеют в настоящей работе более простой вид.

Контрпример 3. Задача

$$u_x = u_y + \theta v_y|_{x=0} + yv_y + xv_x + v + 1, \quad v_y = v_x + \kappa u_x|_{y=0} + xu_x + yu_y + u + 1,$$
$$u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \tag{50}$$

где $\theta \geq 0$, $\kappa \geq 0$, $1 - \theta\kappa \neq 0$, имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x = 0, y = 0)$.

Обоснование контрпримера. С использованием формул (34)–(37) индукцией по n устанавливается, что при всех $n \geq 2$ справедливо неравенство $|u_{n+1,0}| > n^3|u_{n-1,0}| > 0$. Отсюда следует расходимость ряда $u(x,y)$ при $x \neq 0$. Аналогично устанавливается расходимость ряда $v(x,y)$ при $y \neq 0$.

Замечание 10. Задача (50) из контрпримера 3 в главной части совпадает с задачей (49), для которой доказана теорема 4, однако система в задаче (50) не является полулинейной. Таким образом, контрпример 3 показывает, что условие полулинейности системы в теореме 4 существенно.

Контрпример 4. Задача

$$u_x = u_y + \varepsilon v_x + \theta v_y|_{x=0} + u + 1 - \theta, \quad v_y = v_x + u + 1,$$
$$u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0,$$

где $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $\theta = \mathrm{const}$, $\theta + \varepsilon > 0$, имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x = 0, y = 0)$.

Обоснование контрпримера. С использованием формул (34)–(37) индукцией по n устанавливается, что при всех $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$u_{n+1,0} = \sum_{i=0}^{n}(\theta + i\varepsilon + 1)u_{i,n-i} > \sum_{i=0}^{n}(\theta + i\varepsilon + 1)(\theta + i\varepsilon)u_{n-1,0} > u_{n-1,0}L\sum_{i=1}^{n} i^2 > 0,$$

где $L = \min\{\varepsilon^2, (\varepsilon + \theta)^2\} > 0$. Отсюда с учетом неравенства $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 > \frac{n^3}{3}$ следует, что

$$u_{n+1,0} > \frac{Ln^3}{3}u_{n-1,0} > 0,$$

а значит, ряд для $u(x,y)$ расходится при $x \neq 0$. Аналогично доказывается, что ряд для $v(x,y)$ расходится при $y \neq 0$.

Наличие в системе (18) слагаемых, содержащих выводящие производные неизвестных функций, заданные на координатных осях, существенно меняет задачу (18), (19) по сравнению с задачей, рассмотренной в работе [9], где $\theta = \kappa = 0$. При надлежащем выборе констант θ, κ в задаче (18), (19) ряды (27) расходятся или формальное решение задачи в виде рядов вообще невозможно построить. В самом деле, справедлив следующий

Контрпример 5. Рассматривается задача

$$\begin{gathered} u_x = Mu_y + M\theta v_y|_{x=0} + v + 1, \quad v_y = v_x + \kappa u_x|_{y=0} + u + 1, \\ u(0,y) = 0, \quad v(x,0) = 0, \end{gathered} \tag{51}$$

где $M, \theta, \kappa = \mathrm{const}$.

1. Если $M \neq 1$, $\theta\kappa \neq 0$, $\theta\kappa \neq \frac{1}{M^n}$ при всех $n \in \mathbb{N}_0$, то у задачи (51) существует единственное локально аналитическое решение.

2. Если $\theta\kappa = \frac{1}{M^n}$, где $n \in \mathbb{N}_0$, то построить решение задачи (51) в виде степенных рядов невозможно.

3. Если $M = \mathrm{const} > 1$, $\theta = \kappa = 0$, то задача (51) имеет единственное решение в виде формальных степенных рядов, которые сходятся только в точке $(x = 0, y = 0)$.

Обоснование контрпримера. Как легко убедиться, для данного контрпримера справедливы равенства

$$\gamma = M + 1, \quad \alpha = M, \quad \gamma^2 - 4\alpha = (1-M)^2 > 0, \quad \Delta_n = \frac{1 - M^{n+1}\theta\kappa}{1 - M^n\theta\kappa}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{52}$$

1. В данном случае обоснование контрпримера проводится сведением к теореме 2. Так как $M \neq 1$, $\theta\kappa \neq 0$, $\theta\kappa \neq \frac{1}{M^n}$, из (52) следует, что $\Delta_n \neq 0$, $\Delta_n \neq \Delta_\pm = \frac{1}{2}(M + 1 \pm |M-1|)$. Таким образом, по теореме 2 у задачи (51) существует в данном случае единственное локально аналитическое решение.

2. Из (52) вытекает, что условия (22) в данном случае не выполняются.

3. В данном случае контрпример 5 совпадает с контрпримером 2.

Автор признателен С. П. Баутину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Riquier C.* Les systemes d'equations aux derivees partielles. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
2. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
3. *Гюнтер Н. М.* Об аналитических решениях уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\big(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\big)$ // Мат. сб. 1925. Т. 32. С. 26–42.
4. *Гюнтер Н. М.* О распространении теоремы Коши на любую систему уравнений в частных производных // Мат. сб. 1925. Т. 32. С. 367–447.
5. *Соболев С. Л.* Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Мат. сб. 1931. Т. 38, № 1–2. С. 107–147.
6. *Соболев С. Л.* К вопросу об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Тр. физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1934. Т. 5. С. 265–282.
7. *Леднев Н. А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Мат. сб. 1948. Т. 2. С. 205–266.
8. *Баутин С. П.* Задача Коши с начальными данными на разных поверхностях // Докл. РАН. 1995. Т. 345, № 5. С. 586–589.

9. *Баутин С. П.* Задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для квазилинейной аналитической системы // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 804–813.
10. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Одна задача Коши с начальными данными на разных поверхностях для системы с особенностью // Изв. вузов. Математика. 1997. № 10. С. 13–23.
11. *Тешуков В. М.* Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // Прикл. механика и техн. физика. 1980. № 2. С. 126–133.
12. *Тешуков В. М.* Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. № 33. С. 114–133.
13. *Тешуков В. М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 225–234.
14. *Тешуков В. М.* Пространственное взаимодействие сильных разрывов в газе // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, № 4. С. 225–234.
15. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Течения газа с ударными волнами, расходящимися от оси или центра симметрии с конечной скоростью // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 3. С. 465–474.
16. *Казаков А. Л.* Построение кусочно аналитических течений газа, состыкованных через ударные волны, вблизи оси или центра симметрии // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 5. С. 25–38.
17. *Баутин С. П.* Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.

Статья поступила 5 мая 2004 г.

Казаков Александр Леонидович
Уральский гос. университет путей сообщения, кафедра прикладной математики,
ул. Колмогорова, 66, Екатеринбург 620034
`AKazakov@math.usurt.ru`