Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева

Аннотация: Рассматриваются системы квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах. Установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения, получены оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности, указано множество притяжения нулевого решения. Аналогичные результаты получены для систем с параметрами.

Ключевые слова: уравнения с запаздывающим аргументом, периодические коэффициенты, асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского.

Мы рассматриваем системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом следующего вида:

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau > 0, \tag{0.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad T > \tau,$$

$F(t, u, v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица, и

$$\|F(t, u, v)\| \le q\|u\|^{1+\omega}, \quad q,\ \omega \ge 0 \text{ — постоянные.}$$

Мы исследуем асимптотическую устойчивость нулевого решения системы (0.1), получаем оценки решений, характеризующие скорость убывания при $t \to \infty$, и указываем множество притяжения нулевого решения. Из полученных результатов вытекает, что асимптотические свойства решений системы (0.1) определяются интегралами вида

$$\int\limits_0^T \frac{\alpha(s)}{\|H(s)\|}\, ds, \quad \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{\beta(s)}\, ds, \quad \alpha(s) > 0,\ \beta(s) > 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00289).

где $H(t)$ — эрмитово положительно определенное решение матричного дифференциального неравенства типа Риккати

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0), \quad t \in [0,T],$$

$$K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau].$$

Эти результаты обобщают результаты авторов из работы [1], в которой аналогичные исследования проведены для систем уравнений с запаздывающим аргументом в случае постоянных коэффициентов в линейных членах.

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

Как хорошо известно, для систем линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в случае постоянных коэффициентов

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-\tau), \quad t > \tau, \tag{1.1}$$

имеет место спектральный критерий асимптотической устойчивости (см., например, [2–5]), который формулируется в терминах принадлежности корней квазимногочлена

$$\det(A + e^{-\lambda\tau}B - \lambda I) = 0 \tag{1.2}$$

левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$. Однако на практике проверка этого условия является сложной задачей. В случае систем дифференциальных уравнений без запаздывания ($B = 0$) вместо спектрального критерия при исследовании асимптотической устойчивости решений обычно используют критерий, формулируемый в терминах разрешимости матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0. \tag{1.3}$$

Для линейных систем (1.1) также имеет место аналог теоремы об асимптотической устойчивости, который формулируется на основе матричного уравнения Ляпунова. Его доказательство проводится с использованием функционала Ляпунова — Красовского

$$v_0(t,y) = \langle Hy(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle Hy(s), y(s)\rangle\, ds, \tag{1.4}$$

рассматриваемого на решениях системы (1.1), и вытекает из теоремы Красовского об асимптотической устойчивости (см., например, [2]). С использованием функционала вида (1.4) также устанавливается асимптотическая устойчивость нулевого решения для систем квазилинейных уравнений.

Отметим, что функционал Ляпунова — Красовского вида (1.4) для систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом является аналогом функционала Ляпунова $\langle Hy, y\rangle$ для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Однако использование функционала (1.4) не позволяет получить оценки скорости убывания на бесконечности решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, в то время как в случае дифференциальных уравнений без запаздывания

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

это удается сделать с использованием функционала Ляпунова. Действительно, если спектр матрицы A содержится в левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ и $H = H^* > 0$ — решение уравнения Ляпунова (1.3) при $C = I$, то неравенство [6]

$$\|e^{tA}\| \leq \sqrt{2\|A\|\|H\|}e^{-\frac{t}{2\|H\|}}, \quad t > 0, \tag{1.5}$$

дает оценку для скорости убывания решений при $t \to \infty$. Отметим также, что при численном исследовании асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений оценки типа (1.5) играют важную роль. Именно наличие таких оценок позволяет разрабатывать алгоритмы с гарантированной точностью [7]. Поэтому получение аналогов оценок такого типа представляет очень важную задачу в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Следует отметить, что в последние годы в ряде работ получены оценки экспоненциального убывания решений систем линейных уравнений (1.1) (см. обзор [8]). При получении таких оценок используются различные модификации функционала Ляпунова — Красовского.

В работе [1] мы предложили одну модификацию функционала Ляпунова — Красовского, с помощью которой были получены оценки экспоненциального убывания на бесконечности решений линейных (1.1) и квазилинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (0.1) в случае постоянных коэффициентов в линейных членах, а также указаны множества притяжения нулевого решения. Отметим, что такая модификация функционала в частных случаях совпадает с функционалом из работы [9].

Используя результаты из работ авторов [10, 11], в настоящей статье мы предлагаем модификацию функционала Ляпунова — Красовского, которая позволяет получить аналогичные оценки решений линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (0.1) в случае периодических коэффициентов.

Вначале рассмотрим линейную систему уравнений с T-периодическими коэффициентами

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > \tau. \tag{1.6}$$

Отметим, что для систем дифференциальных уравнений без запаздывания

$$y' = A(t)y, \quad t > 0, \tag{1.7}$$

имеет место критерий асимптотической устойчивости, на основе которого выводятся [10] оценки решений системы (1.7), характеризующие их экспоненциальное убывание при $t \to \infty$. Напомним, что критерием асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.7) является существование эрмитова решения следующей краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -L(t), \ L(t) = L^*(t) > 0, \ 0 \leq t \leq T, \\ H(0) = H(T) > 0. \end{cases} \tag{1.8}$$

Пусть $H(t)$ — эрмитово решение краевой задачи (1.8). Тогда $H(t) > 0$ при $t \in [0, T]$ (см. [10]). Продолжим периодическим образом $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя для продолженной матрицы то же обозначение. В [10, 11] в терминах нормы решения краевой задачи (1.8) установлены оценки, характеризующие скорость убывания решений линейных и квазилинейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах

$$y' = A(t)y + \varphi(t, y).$$

Приведем одно из таких неравенств в линейном случае.

Теорема 1. *Для решений системы дифференциальных уравнений* (1.7) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\|^2 \le h_1^{-1}(t) \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{l_1(\xi)}{\|H(\xi)\|} d\xi\right) \|H(0)\| \|y(0)\|^2, \quad t > 0, \tag{1.9}$$

где $h_1(t) > 0$, $l_1(t) > 0$ — *минимальные собственные числа матриц* $H(t)$, $L(t)$ *соответственно.*

Отметим, что неравенство (1.9) является аналогом оценки (1.5), поскольку в случае линейных систем с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$) и $L(t) \equiv I$ решение краевой задачи (1.8) не зависит от t и совпадает с решением матричного уравнения Ляпунова $HA + A^*H = -I$, при этом $h_1 \ge \frac{1}{2\|A\|}$. Следовательно, из (1.9) вытекает неравенство

$$\|e^{tA} y(0)\|^2 \le 2\|A\| \|H\| e^{-\frac{t}{\|H\|}} \|y(0)\|^2, \quad t > 0,$$

а отсюда следует (1.5).

В следующих двух теоремах мы укажем достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы с запаздывающим аргументом (1.6) и приведем аналог оценки (1.9) для решений этой системы.

Теорема 2. *Предположим, что существуют матрицы*

$$H(t) = H^*(t) \in C^1[0,T] \quad \text{и} \quad K(s) = K^*(s) \in C^1[0,\tau] \tag{1.10}$$

такие, что

$$H(0) = H(T) > 0, \quad K(s) > 0, \quad \frac{d}{ds} K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{1.11}$$

и составная матрица

$$C(t) = -\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0) & H(t)B(t) \\ B^*(t)H(t) & -K(\tau) \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

положительно определена на отрезке $[0,T]$. *Тогда нулевое решение системы* (1.6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из положительной определенности матрицы (1.12) следует, что

$$-\frac{d}{dt} H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) = M(t),$$

где $M(t) = M^*(t) > 0$ на $[0,T]$. Поскольку $H(0) = H(T) > 0$, то матрица $H(t)$ является решением краевой задачи (1.8) с матрицей $L(t) = M(t) + K(0)$. Поэтому $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$ (см. [10]). Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \ge 0\}$, сохраняя то же обозначение.

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи для системы (1.6)

$$y'(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \ t > \tau, \quad y(t) = \varphi(t), \ t \in [0,\tau], \tag{1.13}$$

где $\varphi(t) \in C[0,\tau]$ — заданная вектор-функция. По аналогии с [1], используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, рассмотрим следующую модификацию функционала Ляпунова — Красовского:

$$v(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds. \tag{1.14}$$

В силу сказанного выше и условий (1.10), (1.11) этот функционал является положительно определенным. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \equiv \left\langle \left[\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0)\right] y(t), y(t) \right\rangle$$
$$+ \langle H(t)B(t)y(t-\tau), y(t)\rangle + \langle B^*(t)H(t)y(t), y(t-\tau)\rangle$$
$$- \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Матрицу $C(t)$ в (1.12) можно рассматривать как положительно определенную T-периодическую матрицу на всей полуоси $\{t \geq 0\}$. Используя ее, полученное тождество можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \equiv -\left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \tag{1.15}$$

Отсюда в силу условий теоремы вытекает, что функционал $v(t,y)$, определенный в (1.14), удовлетворяет условиям теоремы Красовского [2] об асимптотической устойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Предположим, что существуют эрмитовы матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$, *удовлетворяющие условиям* (1.10), (1.11) *и дифференциальному неравенству*

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0), \quad t \in [0,T]. \tag{1.16}$$

Тогда нулевое решение системы (1.6) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство проведем по аналогии с рассуждениями из [12, с. 559]. Очевидно, что матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) & -H(t)B(t) \\ -B^*(t)H(t) & K(\tau) \end{pmatrix}$$

положительно определена на отрезке $[0,T]$ тогда и только тогда, когда матрица

$$M(t) = \begin{pmatrix} I & D^*(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} C(t) \begin{pmatrix} I & 0 \\ D(t) & I \end{pmatrix}$$

положительно определена при $t \in [0,T]$. Возьмем $D(t) = K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t)$, тогда

$$M(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) & 0 \\ 0 & K(\tau) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если $H(t) > 0$ и $K(s) > 0$ удовлетворяют неравенству (1.16), то $C(t)$ положительно определена на $[0,T]$, и в силу теоремы 2 нулевое решение системы (1.6) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Используя функционал (1.14) и проведенные рассуждения, ниже мы получим оценки решений системы линейных дифференциальных уравнений (1.6).

Теорема 4. *Пусть существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Обозначим через $c_1(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы (1.12) и через $k > 0$ — максимальное число такое, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \le 0, \quad s \in [0,\tau]. \tag{1.17}$$

Тогда для решения задачи (1.13) справедливо неравенство

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$\le \exp\left(-\int\limits_{\tau}^{t} \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right)\left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right],\ t > \tau, \tag{1.18}$$

где

$$\varepsilon(t) = \min\{c_1(t), k\|H(t)\|\}. \tag{1.19}$$

Доказательство. Для решения $y(t)$ начальной задачи (1.13) выше было установлено тождество (1.15). По условию $c_1(t) > 0$ является минимальным собственным числом матрицы $C(t)$, тогда

$$\left\langle C(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge c_1(t)(\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^2)$$

$$\ge \frac{c_1(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle. \tag{1.20}$$

Из условия (1.17) имеем

$$-\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle \ge k\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle. \tag{1.21}$$

Учитывая оценки (1.20) и (1.21), из тождества (1.15) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\left[\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds\right]$$

$$+ \frac{c_1(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le 0, \quad t > \tau.$$

Поскольку $\varepsilon(t) = \min\{c_1(t), k\|H(t)\|\}$, из определения (1.14) функционала $v(t,y)$ имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon(t)}{\|H(t)\|}v(t,y) \le 0, \quad t > \tau.$$

Следовательно,

$$v(t,y) \le e^{-\int\limits_{\tau}^{t}\frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi}v(\tau,y), \quad t > \tau.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для решения начальной задачи* (1.13) *справедливо неравенство*

$$\|y(t)\|^2 \le h_1^{-1}(t) \exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|} d\xi \right) \times \left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds \right], \quad t > \tau,$$

где $h_1(t) > 0$ *— минимальное собственное число матрицы* $H(t)$.

Доказательство непосредственно вытекает из оценки (1.18).

Рассмотрим систему (1.6) с возмущением:

$$y'(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) + (B(t) + B_1(t))y(t - \tau), \quad t > \tau, \tag{1.22}$$

где $A_1(t)$, $B_1(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами. Предположим, что нулевое решение невозмущенной системы (1.6) асимптотически устойчиво. Ниже мы укажем условия на матрицы $A_1(t)$ и $B_1(t)$, при которых нулевое решение системы (1.22) также будет асимптотически устойчиво.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Предположим, что матрицы* $A_1(t)$ *и* $B_1(t)$ *такие, что*

$$C(t) - C_1(t) > 0, \quad t \in [0, T], \tag{1.23}$$

где

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} H(t)A_1(t) + A_1^*(t)H(t) & H(t)B_1(t) \\ B_1^*(t)H(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда нулевое решение системы (1.22) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи для системы (1.22)

$$\begin{gathered} y'(t) = (A(t) + A_1(t))y(t) + (B(t) + B_1(t))y(t - \tau), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad t \in [0, \tau], \end{gathered} \tag{1.24}$$

где $\varphi(t) \in C[0, \tau]$ — заданная вектор-функция. Используя функционал (1.14), как при доказательстве теоремы 2, получим тождество

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \equiv -\left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle C_1(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle + \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t - s) y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Следовательно, если матрицы $A_1(t)$ и $B_1(t)$ такие, что выполнено неравенство (1.23), то функционал $v(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы Красовского [2] об асимптотической устойчивости. Следовательно, нулевое решение системы (1.22) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *матрицы* $A_1(t)$ *и* $B_1(t)$ *такие, что*

$$\|C_1(t)\| < c_1(t),$$

где $c_1(t)$ — *минимальной собственное число матрицы* $C(t)$. *Тогда для решения начальной задачи* (1.24) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leq h_1^{-1}(t) \exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{\varepsilon_1(\xi)}{\|H(\xi)\|}\,d\xi\right) \times \left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds\right], \quad t > \tau,$$

где $h_1(t) > 0$ — *минимальное собственное число матрицы* $H(t)$, $\varepsilon_1(t) = \min\{c_1(t) - \|C_1(t)\|, k\|H(t)\|\} > 0$, *число* $k > 0$ *определяется неравенством* (1.17).

§ 2. Линейные дифференциальные уравнения с параметром

В этом параграфе мы рассмотрим системы вида (1.6) с параметрами и укажем условия, при которых имеет место асимптотическая устойчивость нулевых решений.

Вначале рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > \tau > 0, \tag{2.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\mu > 0$ — вещественный параметр.

Для системы дифференциальных уравнений без запаздывания ($B(t) \equiv 0$) имеет место следующий результат [6].

Теорема (Крейн). *Если для любого* $t \in [0, T]$ *спектр матрицы* $A(t)$ *принадлежит левой полуплоскости* $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, *то существует* $\mu_1 > 0$ *такое, что при* $\mu > \mu_1$ *нулевое решение системы*

$$\frac{dy}{dt} = \mu A(t)y, \quad t > 0, \tag{2.2}$$

асимптотически устойчиво.

Мы покажем, что аналогичный результат имеет место в случае систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Теорема 6. *Если для любого* $t \in [0, T]$ *спектр матрицы* $A(t)$ *принадлежит левой полуплоскости* $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, *то существует* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu > \mu_0$ *нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В силу теоремы 3 если существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.10), (1.11) и неравенству вида (1.16)

$$\frac{d}{dt}H(t) + \mu H(t)A(t) + \mu A^*(t)H(t) + H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0), \tag{2.3}$$

то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво. Построим такие матрицы $H(t)$ и $K(s)$.

Из доказательства теоремы Крейна вытекает, что для матрицанта системы (2.2) имеет место оценка

$$\|Y(t)\|^2 \le c_\varepsilon e^{-\varepsilon\mu t}, \quad t \in [0,T],\ \varepsilon > 0,\ \mu > \mu_1.$$

Следовательно, в силу упомянутого выше критерия асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (1.7) при $\mu > \mu_1$ существует единственное решение $H(t) = H^*(t)$ краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H + \mu H A(t) + \mu A^*(t) H = -I, \\ H(0) = H(T) > 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Решение этой задачи может быть записано в виде

$$H(t) = (Y^{-1}(t))^* \left[\int_t^\infty (Y(s))^* Y(s)\, ds \right] Y^{-1}(t)$$
$$= \int_0^\infty (Y(\eta + t) Y^{-1}(t))^* (Y(\eta + t) Y^{-1}(t))\, d\eta.$$

При каждом фиксированном t рассмотрим матрицу

$$\widetilde{Y}(\eta) = Y(\eta + t) Y^{-1}(t).$$

Очевидно, она является матрицантом системы

$$\frac{d\tilde{y}}{d\eta} = \mu A(\eta + t)\tilde{y}.$$

Тогда из теоремы Крейна имеем оценку

$$\|\widetilde{Y}(\eta)\|^2 \le \tilde{c}_\varepsilon e^{-\varepsilon\mu\eta}, \quad \eta \in [0,T],\ \varepsilon > 0,\ \mu > \mu_1. \tag{2.5}$$

Учитывая свойство матрицанта

$$\widetilde{Y}(\eta + kT) \equiv \widetilde{Y}(\eta)\widetilde{Y}^k(T), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

перепишем формулу для решения $H(t)$ задачи (2.4) в виде

$$H(t) = \int_0^\infty (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta$$
$$= \int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta + (\widetilde{Y}(T))^* \left[\int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta \right] \widetilde{Y}(T)$$
$$+ (\widetilde{Y}^2(T))^* \left[\int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta \right] \widetilde{Y}^2(T) + \ldots .$$

Обозначим

$$D = \int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta,$$

тогда, очевидно, имеем неравенство

$$\|H(t)\| \le \|D\| + \|\widetilde{Y}(T)\|^2\|D\| + \|\widetilde{Y}(T)\|^4\|D\| + \dots .$$

В силу оценки (2.5) существует $\mu_2 \ge \mu_1$ такое, что при $\mu \ge \mu_2$

$$\|\widetilde{Y}(T)\|^2 \le 1/2.$$

Отсюда

$$\|H(t)\| \le \frac{1}{1 - \|\widetilde{Y}(T)\|^2}\|D\| \le 2\|D\|.$$

Учитывая определение интеграла D и оценку (2.5), получим

$$\|D\| \le \int\limits_0^T \|\widetilde{Y}(\eta)\|^2 d\eta \le \tilde{c}_\varepsilon \int\limits_0^T e^{-\varepsilon\mu\eta} d\eta = \frac{\tilde{c}_\varepsilon}{\varepsilon\mu}(1 - e^{-\varepsilon\mu T}) \le \frac{\tilde{c}_\varepsilon}{\varepsilon\mu}.$$

Следовательно,

$$\|H(t)\| \le \frac{\tilde{c}}{\mu}, \quad \tilde{c} = \frac{2\tilde{c}_\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{2.6}$$

Возьмем теперь $K(s) = \frac{1}{2}e^{-s}I$. Тогда проверка неравенства (2.3) для матриц $H(t)$ и $K(s)$ сводится к проверке неравенства

$$2e^\tau H(t)B(t)B^*(t)H(t) < \frac{1}{2}I. \tag{2.7}$$

В силу (2.6) при $\mu \ge \mu_2$ имеем

$$\|2e^\tau H(t)B(t)B^*(t)H(t)\| \le 2e^\tau\|H(t)\|^2\|B(t)\|^2 \le \frac{2\tilde{c}^2e^\tau}{\mu^2}\|B(t)\|^2.$$

Поэтому для любой непрерывной матрицы $B(t)$ и любого $\tau > 0$ существует $\mu_0 \ge \mu_2$ такое, что при $\mu > \mu_0$ неравенство (2.7) выполнено. Следовательно, при $\mu > \mu_0$ нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = [A_0 + A_1(\omega t)]y(t) + By(t-\tau), \quad t > \tau > 0, \tag{2.8}$$

где спектр постоянной матрицы A_0 размера $n \times n$ лежит в левой полуплоскости $\{\lambda \mid \operatorname{Re}\lambda < 0\}$, $A_1(t)$ — матрица размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, причем

$$\int\limits_0^T A_1(\xi)\, d\xi = 0, \tag{2.9}$$

B — постоянная матрица размера $n \times n$, $\omega > 0$ — вещественный параметр.

Теорема 7. *Пусть*

$$\|B\| < \frac{1}{8\|H_0\|},$$

где H_0 — решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA_0 + A_0^*H = -I. \tag{2.10}$$

Тогда существует $\omega_0 > 0$ *такое, что при* $\omega > \omega_0$ *нулевое решение системы* (2.8) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Сделав замену $\xi = \omega t$, $\tilde{y}(\xi) = y(\xi/\omega)$, перепишем систему (2.8) в виде

$$\frac{d}{d\xi}\tilde{y}(\xi) = \frac{1}{\omega}[A_0 + A_1(\xi)]\tilde{y}(\xi) + \frac{1}{\omega}B\tilde{y}(\xi - \omega\tau), \quad \tau > 0.$$

В силу теоремы 3 если существуют матрицы $H(\xi)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.10) и (1.11), такие, что

$$-\left[\frac{d}{d\xi}H(\xi) + \frac{1}{\omega}H(\xi)(A_0 + A_1(\xi)) + \frac{1}{\omega}(A_0 + A_1(\xi))^* H(\xi)\right] - K(0) > \frac{1}{\omega^2}H(\xi)BK^{-1}(\tau)B^*H(\xi), \quad (2.11)$$

то нулевое решение системы (2.8) асимптотически устойчиво. Рассмотрим матрицу

$$H(\xi) = \omega H_0 - H_1(\xi),$$

где H_0 — решение уравнения (2.10),

$$H_1(\xi) = H_0 \int_0^\xi A_1(\eta)\,d\eta + \int_0^\xi A_1^*(\eta)\,d\eta H_0.$$

Очевидно, $H(0) = \omega H_0 > 0$, и в силу условия (2.9) $H(T) = H(0)$, при этом

$$\frac{d}{d\xi}H(\xi) + \frac{1}{\omega}H(\xi)(A_0 + A_1(\xi)) + \frac{1}{\omega}(A_0 + A_1(\xi))^* H(\xi) = -C(\xi, \omega), \quad (2.12)$$

где

$$C(\xi, \omega) = I + \frac{1}{\omega}[H_1(\xi)(A_0 + A_1(\xi)) + (A_0 + A_1(\xi))^* H_1(\xi)].$$

Тогда найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при $\omega \geq \omega_1$

$$C(\xi, \omega) > \frac{1}{2}I, \quad \xi \in [0, T]. \quad (2.13)$$

Следовательно, матрица $H(\xi)$ является эрмитовым решением задачи вида (1.8). Тогда, как мы отмечали выше,

$$H(\xi) > 0, \quad \xi \in [0, T],$$

при этом по построению существует $\omega_0 \geq \omega_1$ такое, что при $\omega > \omega_0$

$$\|H(\xi)\| \leq 2\omega\|H_0\|, \quad \xi \in [0, T]. \quad (2.14)$$

По условию теоремы для нормы матрицы B существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\|B\| \leq \frac{e^{-\alpha}}{8\|H_0\|}. \quad (2.15)$$

Возьмем в качестве $K(s)$ следующую матрицу:

$$K(s) = \frac{1}{4}e^{-\frac{2\alpha s}{\tau}}I, \quad \alpha > 0.$$

Очевидно, матрицы $H(\xi)$ и $K(s)$ удовлетворяют условиям (1.10), (1.11). Покажем, что при $\omega > \omega_0$ неравенство (2.11) будет выполнено. Из (2.12), (2.13) имеем

$$-\left[\frac{d}{d\xi}H(\xi)+\frac{1}{\omega}H(\xi)(A_0+A_1(\xi))+\frac{1}{\omega}(A_0+A_1(\xi))^*H(\xi)\right]-K(0)>\frac{1}{2}I-K(0)=\frac{1}{4}I.$$

Следовательно, нужно показать, что при $\omega > \omega_0$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\omega^2}H(\xi)BK^{-1}(\tau)B^*H(\xi)\leq\frac{1}{4}I, \quad \xi\in[0,T]. \tag{2.16}$$

Действительно, учитывая (2.14) и (2.15), получаем

$$\frac{1}{\omega^2}\|H(\xi)BK^{-1}(\tau)B^*H(\xi)\|=\frac{4e^{2\alpha}}{\omega^2}\|H(\xi)B(\tau)B^*H(\xi)\|\leq 4^2e^{2\alpha}\|H_0\|^2\|B\|^2\leq\frac{1}{4},$$

т. е. (2.16) выполнено.

Теорема доказана.

§ 3. Квазилинейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

Рассмотрим квазилинейную систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (0.1)

$$y'(t)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t>\tau,$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — вещественнозначные непрерывные T-периодические матрицы, $F(t,u,v)$ — вещественнозначная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица и

$$\|F(t,u,v)\|\leq q\|u\|^{1+\omega}, \quad q,\ \omega\geq 0 \text{ — постоянные.} \tag{3.1}$$

Используя модифицированный функционал Ляпунова — Красовского вида (1.14), можно провести исследования асимптотической устойчивости нулевого решения этой системы и получить оценки решений, характеризующие убывание при $t\to\infty$.

Теорема 8. *Пусть $\omega > 0$, выполнены условия теоремы 4 и*

$$r^{\omega/2}=\left(1-\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int_0^T\frac{\varepsilon(s+\tau)}{\|H(s+\tau)\|}ds\right)\right)\times\left(q\omega\int_0^T\frac{\|H(\xi+\tau)\|}{h_1^{1+\omega/2}(\xi+\tau)}\exp\left(-\frac{\omega}{2}\int_0^\xi\frac{\varepsilon(s+\tau)}{\|H(s+\tau)\|}\,ds\right)d\xi\right)^{-1}, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon(t)>0$ определено в (1.19), $h_1(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво и множество вещественнозначных функций

$$\mathscr{E}=\left\{\varphi(t)\in C[0,\tau]:\ \langle H(\tau)\varphi(\tau),\varphi(\tau)\rangle+\int_0^\tau\langle K(\tau-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle\,ds<r\right\} \tag{3.3}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения системы (0.1) *с начальными данными* $\varphi(t) \in \mathscr{E}$ *имеет место оценка*

$$\|y(t)\|^2 \leq h_1^{-1}(t) \exp\left(-\int\limits_\tau^t \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|} d\xi\right)$$
$$\times \left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right]$$
$$\times \left(1 - r^{-\omega/2}\left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int\limits_0^\tau \langle K(\tau - s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right]^{\omega/2}\right)^{-2/\omega}, \quad t > \tau. \tag{3.4}$$

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу для системы (0.1)

$$\begin{aligned} y'(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [0, \tau], \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $\varphi(t) \in C[0, \tau]$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Рассмотрим функционал $v(t, y)$, определенный в (1.14). Как при доказательстве теоремы 2, имеем тождество

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \equiv -\left\langle C(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds + 2\,\mathrm{Re}\langle H(t)F(t, y(t), y(t-\tau)), y(t)\rangle. \tag{3.6}$$

Поскольку $c_1(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $C(t)$, в силу условия (3.1) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq -c_1(t)\|y(t)\|^2 + \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt} K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds + 2q\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega}.$$

Учитывая неравенство (1.17) и определение функционала $v(t, y)$, имеем

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq -\frac{\varepsilon(t)}{\|H(t)\|} v(t, y) + \frac{2q\|H(t)\|}{h_1^{1+\omega/2}(t)} v^{1+\omega/2}(t, y),$$

где $h_1(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $\varepsilon(t) > 0$ определено в (1.19). Введем следующие обозначения:

$$\alpha(t) = -\frac{\varepsilon(t)}{\|H(t)\|}, \quad \beta(t) = \frac{2q\|H(t)\|}{h_1^{1+\omega/2}(t)}. \tag{3.7}$$

По построению $\alpha(t) < 0$, $\beta(t) > 0$ — непрерывные T-периодические функции. Очевидно, последнее неравенство перепишется в виде

$$\frac{d}{dt} v(t, y) \leq \alpha(t) v(t, y) + \beta(t) v^{1+\omega/2}(t, y).$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла (см., например, [13]) получаем оценку

$$v(t,y) \le e^{\int_\tau^t \alpha(\xi)\,d\xi} v(\tau,y) \left(1 - \frac{\omega}{2} v^{\omega/2}(\tau,y) \int_\tau^t \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi\right)^{-2/\omega}. \tag{3.8}$$

Оценим выражение, стоящее в круглых скобках:

$$w(t,y,\tau) = 1 - \frac{\omega}{2} v^{\omega/2}(\tau,y) \int_\tau^t \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi$$
$$\ge 1 - \frac{\omega}{2} v^{\omega/2}(\tau,y) \int_\tau^\infty \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi. \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_\tau^\infty \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi$$
$$= \int_\tau^{T+\tau} \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi + \int_{T+\tau}^{2T+\tau} \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi + \ldots = J_1 + J_2 + \ldots.$$

В силу T-периодичности функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ получаем

$$J_k = e^{\frac{(k-1)\omega}{2}\int_\tau^{T+\tau} \alpha(s)\,ds} J_1, \quad k = 2, \ldots.$$

Поэтому, учитывая, что $\alpha(t) < 0$, интеграл J представим в виде

$$J = \left(1 - e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^{T+\tau} \alpha(s)\,ds}\right)^{-1} J_1 = \left(1 - e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^{T+\tau} \alpha(s)\,ds}\right)^{-1} \int_\tau^{T+\tau} \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi.$$

Отсюда в силу (3.9) получаем

$$w(t,y,\tau) \ge 1 - \frac{\omega}{2} v^{\omega/2}(\tau,y)\left(1 - e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^{T+\tau} \alpha(s)\,ds}\right)^{-1} \int_\tau^{T+\tau} \beta(\xi) e^{\frac{\omega}{2}\int_\tau^\xi \alpha(s)\,ds} d\xi$$
$$= 1 - \frac{\omega}{2} v^{\omega/2}(\tau,y)\left(1 - e^{\frac{\omega}{2}\int_0^{T} \alpha(s+\tau)\,ds}\right)^{-1} \int_0^{T} \beta(\xi+\tau) e^{\frac{\omega}{2}\int_0^\xi \alpha(s+\tau)\,ds} d\xi.$$

Вспоминая обозначения (3.7), имеем

$$w(t,y,\tau) \ge 1 - r^{-\omega/2} v^{\omega/2}(\tau,y),$$

где r определено в (3.2). Из определения (1.14) следует, что

$$v(\tau,y) = \langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int_0^\tau \langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\,ds.$$

Если $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathscr{E}$, определенному в (3.3), то $w(t,y,\tau) > 0$. Следовательно, из (3.8) для решения задачи (3.5) имеем оценку

$$v(t,y) \le \exp\left(-\int_\tau^t \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right) v(\tau,y)(1 - r^{-\omega/2}v^{\omega/2}(\tau,y))^{-2/\omega},$$

из которой вытекают асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (0.1), а также неравенство (3.4).

Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $\omega = 0$, выполнены условия теоремы 4 и*

$$c_1(t) - 2q\|H(t)\| > 0, \quad t \in [0,T],$$

где $c_1(t)$ — минимальное собственное число матрицы (1.12). Тогда нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво, при этом для решения системы (0.1) с начальными данными $\varphi(t) \in C[0,\tau]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned}&\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \\ &\le \exp\left(-\int_\tau^t \frac{\varepsilon(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right)\left[\langle H(\tau)\varphi(\tau), \varphi(\tau)\rangle + \int_0^\tau \langle K(\tau-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds\right],\ t > \tau,\end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\varepsilon(t) = \min\{c_1(t) - 2q\|H(t)\|, k\|H(t)\|\}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Рассмотрим начальную задачу (3.5) для системы (0.1). Пусть $v(t,y)$ — функционал (1.14). По аналогии с доказательством теоремы 2 имеем тождество (3.6), из которого, учитывая условия (1.17) и (3.1), получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}v(t,y) \le -(c_1(t) - 2q\|H(t)\|)\|y(t)\|^2 - k\int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Следовательно, имеем

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{(c_1(t) - 2q\|H(t)\|)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + k\int_{t-\tau}^t \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \le 0$$

и в силу определения функционала (1.14) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}v(t,y) + \frac{\varepsilon(t)}{\|H(t)\|}v(t,y) \le 0, \quad t > \tau,$$

где $\varepsilon(t)$ определено в (3.11). Отсюда непосредственно вытекает оценка (3.10).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
5. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наук. думка, 1989.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
7. *Годунов С. К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.
8. *Richard J. P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39, N 10. P. 1667–1694.
9. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
10. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.
11. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.
12. *Хорн Р., Джонсон* Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
13. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Статья поступила 18 апреля 2007 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, *Матвеева Инесса Изотовна*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, matveeva@math.nsc.ru