*Сибирский математический журнал*
*Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5*

*УДК 512.554*

# КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЯНГА — БАКСТЕРА НА АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ. СТРУКТУРА АЛЬТЕРНАТИВНОЙ Д–БИАЛГЕБРЫ НА МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЕ КЭЛИ — ДИКСОНА

**М. Е. Гончаров**

**Аннотация:** Рассматриваются уравнения Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах и доказывается, что биалгебры, индуцированные решениями этих уравнений, являются альтернативными Д-биалгебрами. Описана структура альтернативной Д-биалгебры, заданная на матричной алгебре Кэли — Диксона.

**Ключевые слова:** альтернативная алгебра, йорданова биалгебра, классическое уравнение Янга — Бакстера, неассоциативная коалгебра, алгебра Кэли — Диксона.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга — Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Там же описаны ассоциативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. Одним из условий ассоциативных Д-биалгебр является то, что коумножение — это дифференцирование исходной алгебры в ее тензорный квадрат, рассмотренный как бимодуль над исходной алгеброй. Такие биалгебры введены в [4] и изучались в [5]. В последней работе изучены некоторые свойства решений ассоциативного аналога уравнения Янга — Бакстера и свойства сбалансированных биалгебр (по-другому Д-биалгебр). Ассоциативные классические уравнения Янга — Бакстера с параметрами рассматривались в [6]. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга — Бакстера, определен в [7], где доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу.

С каждой лиевой, ассоциативной или йордановой биалгеброй можно связать так называемую тройку Манина. В [8] тройки Манина для ассоциативных алгебр изучались как инструмент построения решений уравнения Янга — Бакстера.

В настоящей работе изучаются альтернативные Д-биалгебры. В § 1 в терминах коумножения получены необходимые и достаточные условия альтернативности Д-биалгебры. В § 2 вводится класс биалгебр, связанных с уравнением

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00230) и Министерства образования (проект РНПВШ № 11617).

Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Показано, что биалгебры этого класса являются альтернативными Д-биалгебрами. В § 3 описана структура альтернативной Д-биалгебры, заданная на матричной алгебре Кэли — Диксона.

## § 1. Определения и предварительные результаты

Для линейных пространств $V$ и $U$ над полем $F$ через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над $F$. На пространстве $V \otimes V$ определим линейное отображение $\tau$, полагая $\tau\big(\sum_i a_i \otimes b_i\big) = \sum_i b_i \otimes a_i$. Через $V^*$ обозначим пространство всех линейных функционалов, заданных на $V$. Для элементов $f \in V^*$ и $\upsilon \in V$ выражение $\langle f, \upsilon\rangle$ обозначает значение линейного функционала $f$ на элементе $\upsilon$. Подпространство $S$ в $V^*$ называется *всюду плотным* в $V^*$, если для любого элемента $a \in V$ существует $f \in S$ такой, что $\langle f, a\rangle \neq 0$.

Пусть $\rho : V^* \otimes U^* \to (V \otimes U)^*$ — линейное отображение, определенное равенством

$$\Big\langle \rho(f \otimes g), \sum_i a_i \otimes b_i \Big\rangle = \sum_i \langle f, a_i\rangle\langle g, b_i\rangle.$$

Поскольку отображение $\rho$ является вложением, элемент $\rho(f \otimes g)$ будем отождествлять с элементом $f \otimes g$.

Определение. Пара $(A, \Delta)$, где $A$ — линейное пространство над $F$, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй*. При этом отображение $\Delta$ называется *коумножением*.

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве $A^*$ определим умножение, полагая

$$\langle fg, a\rangle = \sum_a \langle f, a_{(1)}\rangle\langle g, a_{(2)}\rangle,$$

где $f, g \in A^*, a \in A$ и $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры $(A, \Delta)$.

Дуальная алгебра $A^*$ коалгебры $(A, \Delta)$ задает бимодульное действие $(\cdot)$ на $A$, которое определяется следующим образом:

$$f \cdot a = \sum_a a_{(1)}\langle f, a_{(2)}\rangle, \quad a \cdot f = \sum_a \langle f, a_{(1)}\rangle a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

В работе [9] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть $M$ — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара $(A, \Delta)$ называется $M$*-коалгеброй*, если дуальная алгебра $A^*$ принадлежит многообразию $M$.

Пусть теперь $A$ — произвольная алгебра, на которой задано коумножение $\Delta$, и $A^*$ — дуальная алгебра коалгебры $(A, \Delta)$. Алгебра $A$ задает бимодульное действие $(\bullet)$ на пространстве $A^*$, определенное формулами

$$\langle f \bullet a, b\rangle = \langle f, ab\rangle, \quad \langle b \bullet f, a\rangle = \langle f, ab\rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нем умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \cdot b + a \cdot g) + (fg + f \bullet b + a \bullet g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем $F$, а $A$ и $A^*$ — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть *дублем Дринфельда*.

На пространстве $D(A)$ определим форму $Q$, полагая

$$Q(a+f,b+g)=\langle g,a\rangle+\langle f,b\rangle$$

для любых $f,g\in A^*$ и $a,b\in A$. Тогда $Q$ — невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма, т. е. $Q(xy,z)=Q(x,yz)$.

В работе [2] дано следующее определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть $M$ — произвольное многообразие $F$-алгебр и $A$ — алгебра из $M$, на которой дополнительно задано коумножение $\Delta$. Тогда пару $(A,\Delta)$ будем называть *$M$-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию $M$.

Алгебра $A$ называется *альтернативной*, если для любых $x,y\in A$ в ней выполняются следующие тождества:

$$(x,x,y)=0,\quad (y,x,x)=0.$$

Хорошо известно, что в альтернативной алгебре $A$ для любых $x,y,z\in A$ имеют место тождества

$$(x,z,y)+(z,x,y)=0,\quad (x,y,z)+(x,z,y)=0,\quad (x,y,z)-(y,z,x)=0.$$

Раскрыв ассоциаторы в последнем равенстве, получим

$$x(yz)+(yz)x=y(zx)+(xy)z. \tag{1}$$

Как легко видеть, справедлива

**Лемма 1.** *Пусть $A$ — алгебра, на которой задана невырожденная симметрическая ассоциативная билинейная форма $Q$. Тогда алгебра $A$ альтернативна в том и только том случае, если в ней выполняется хотя бы одно из тождеств:*

$$(x,x,y)=0\quad \textit{или}\quad (y,x,x)=0.$$

Пусть $A$ — альтернативная алгебра над полем $F$, на которой задано коумножение $\Delta$. Наша ближайшая цель — получить необходимые и достаточные условия в терминах коумножения, при которых пара $(A,\Delta)$ является альтернативной Д-биалгеброй.

**Лемма 2.** *Пусть пара $(A,\Delta)$ — произвольная коалгебра. Предположим, что алгебра $D(A)$ является альтернативной алгеброй. Тогда $A$ — альтернативная алгебра, $(A,\Delta)$ — альтернативная коалгебра и справедливы равенства*

$$\Delta(ab)=\sum_a(a_{(1)}b\otimes a_{(2)}+a_{(2)}b\otimes a_{(1)}-a_{(2)}\otimes ba_{(1)}) + \sum_b(b_{(1)}\otimes ab_{(2)}+b_{(1)}\otimes b_{(2)}a-ab_{(1)}\otimes b_{(2)}); \tag{2}$$

$$\sum_{ba}((ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)}+(ba)_{(2)}\otimes(ba)_{(1)}) = \sum_a(a_{(1)}\otimes ba_{(2)}+ba_{(2)}\otimes a_{(1)})\sum_b(b_{(1)}a\otimes b_{(2)}+b_{(2)}\otimes b_{(1)}a); \tag{3}$$

$$\Delta(a^2) = \sum_a a_{(1)}a \otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)} \otimes aa_{(2)}. \tag{4}$$

Доказательство. Ясно, что $A$ — альтернативная алгебра, а $(A, \Delta)$ — альтернативная коалгебра.

В силу альтернативности алгебры $D(A)$ для любых элементов $a, b \in A$, $f, g \in A^*$ имеем

$$((a+f)*(a+f))*(b+g) = (a+f)*((a+f)*(b+g)). \tag{$*$}$$

Если $g = 0$, то, вычислив левую часть, получим

$$\begin{aligned}((a+f)*(a+f))*b &= a^2b + (a\cdot f)b + (f\cdot a)b \\ &+ f^2\cdot b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b + f^2\bullet b + (a\bullet f)\bullet b + (f\bullet a)\bullet b.\end{aligned}$$

Аналогично для правой части:

$$\begin{aligned}(a+f)*((a+f)*b) &= a(ab) + a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) \\ &+ f\cdot(ab) + f\cdot(f\cdot b) + f(f\bullet b) + f\bullet(f\cdot b) + a\bullet(f\bullet b) + f\bullet(ab).\end{aligned}$$

В силу альтернативности алгебры $A^*$ и ассоциативности формы $Q$ для произвольного $h \in A^*$ имеем

$$Q(h, f^2\cdot b) = Q(h, f\cdot(f\cdot b)).$$

Из невырожденности формы $Q$ следует, что $f^2\cdot b = f\cdot(f\cdot b)$. Отсюда, используя альтернативность алгебры $A$, приходим к равенству

$$(a\cdot f)b + (f\cdot a)b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b = a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) + f\cdot(ab).$$

Так как, с одной стороны,

$$\begin{aligned}&Q(g, (a\cdot f)b + (f\cdot a)b + (a\bullet f)\cdot b + (f\bullet a)\cdot b) \\ &\quad\langle g\otimes f, \sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + \sum_a a_{(1)}b\otimes a_{(2)} + \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \sum_b b_{(1)}\otimes ab_{(2)}\rangle,\end{aligned}$$

и, с другой —

$$\begin{aligned}&Q(g, a(f\cdot b) + a\cdot(f\bullet b) + f\cdot(ab)) \\ &\qquad= \langle g\otimes f, \sum_b ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + \sum_a a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + \sum_{ab}(ab)_{(1)}\otimes(ab)_{(2)}\rangle,\end{aligned}$$

в силу плотности пространства $\rho(A^*\otimes A^*)$ в $(A\otimes A)^*$ получаем

$$\begin{aligned}&\sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + \sum_a a_{(1)}b\otimes a_{(2)} + \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \sum_b b_{(1)}\otimes ab_{(2)} \\ &\qquad= \sum_b ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + \sum_a a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + \sum_{ab}(ab)_{(1)}\otimes(ab)_{(2)},\end{aligned}$$

и равенство (2) доказано.

Полагая в $(*)$ $g = 0$ и $a = 0$, получим

$$(ff)\bullet b = f(f\bullet b) + f\bullet(f\cdot b).$$

В силу ассоциативности формы $Q$ для любого элемента $a \in A$ имеем

$$Q(ff, ba) = Q(f(f\bullet b), a) + Q(f, (f\cdot b)a).$$

Следовательно,

$$\Big\langle f\otimes f, \sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)}\Big\rangle = \Big\langle f\otimes f, \sum_a a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + \sum_b b_{(1)}a\otimes b_{(2)}\Big\rangle. \qquad (5)$$

Отсюда

$$\sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)} + (ba)_{(2)}\otimes(ba)_{(1)} = \sum_a (a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a\otimes b_{(2)} + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a),$$

и равенство (3) доказано.

Пусть в $(*)$ $b=0$, $f=0$. Тогда $(a*a)*g = a*(a*g)$. Отсюда $(a^2)\cdot g = a(a\cdot g) + a\cdot(a\bullet g)$. Поэтому для любого $f\in A^*$ имеем

$$Q(f,(a^2)\cdot g) = Q(f, a(a\cdot g) + a\cdot(a\bullet g)).$$

В силу ассоциативности формы $Q$

$$Q(gf,a^2) = \sum_a Q(f,aa_{(2)})Q(g,a_{(1)}) + \sum_a Q(f,a_{(2)})Q(g,a_{(1)}a);$$

$$\Big\langle g\otimes f, \sum_{a^2}(a^2)_{(1)}\otimes(a^2)_{(2)}\Big\rangle = \Big\langle g\otimes f, \sum_a a_{(1)}a\otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)}\otimes aa_{(2)}\Big\rangle.$$

Из плотности пространства $\rho(A^*\otimes A^*)$ в $(A\otimes A)^*$ следует, что

$$\sum_{a^2}(a^2)_{(1)}\otimes(a^2)_{(2)} = \sum_a a_{(1)}a\otimes a_{(2)} + \sum_a a_{(1)}\otimes aa_{(2)}.$$

Таким образом, равенство (4) и лемма доказаны.

**Предложение 1.** *Пусть для биалгебры $(A,\Delta)$ выполняются равенства* (2) *и* (3). *Тогда для любых элементов $a,b\in A$ имеет место равенство*

$$\sum_b (ab_{(1)}\otimes b_{(2)} + b_{(1)}a\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}\otimes ba_{(1)} + a_{(1)}\otimes ba_{(2)}) = \sum_b b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + \Delta(ba) + \sum_a a_{(2)}b\otimes a_{(1)}. \qquad (6)$$

Доказательство. В равенстве (2), сделав замену $a$ на $b$ и подействовав отображением $\tau$ на обе части равенства, получаем, что для любых $a,b\in(A,\Delta)$ имеет место равенство

$$\sum_{ba}(ba)_{(2)}\otimes(ba)_{(1)} = \sum_b (b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a - ab_{(1)}\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)} - a_{(2)}\otimes ba_{(1)}).$$

Подставив последнее равенство в (3), получаем

$$\sum_{ba}(ba)_{(1)}\otimes(ba)_{(2)} + \sum_b (b_{(1)}\otimes b_{(2)}a + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a - ab_{(1)}\otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)}b\otimes a_{(1)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)} - a_{(2)}\otimes ba_{(1)}) = \sum_a (a_{(1)}\otimes ba_{(2)} + ba_{(2)}\otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a\otimes b_{(2)} + b_{(2)}\otimes b_{(1)}a).$$

Равенство (6) доказано.

Заметим, что если характеристика поля $F$ не равна 2, то равенство (4) следует из равенств (2) и (3).

**Лемма 3.** *Пусть $A$ — альтернативная алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$, на которой задано коумножение $\Delta$. Предположим, что пара $(A, \Delta)$ является альтернативной коалгеброй и выполняются равенства* (2) *и* (3)*. Тогда пара $(A, \Delta)$ является альтернативной Д-биалгеброй.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что для любых $a, b \in A$, $f, g \in A^*$ выполняются следующие равенства:

$$((a+f)*(a+f))*b = (a+f)*((a+f)*b), \tag{7}$$

$$((a+f)*(a+f))*g = (a+f)*((a+f)*g). \tag{8}$$

Докажем равенство (7). Для этого достаточно установить, что

$$(f \cdot a)b + (a \cdot f)b + (f \bullet a) \cdot b + (a \bullet f) \cdot b = a(f \cdot b) + a \cdot (b \bullet f) + f \cdot (ab)$$

и

$$f^2 \bullet b + (f \bullet a) \bullet b + (a \bullet f) \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b) + a \bullet (f \bullet b) + f \bullet (ab).$$

Первое равенство имеет место ввиду равенства (2).

Докажем второе равенство. Поскольку форма $Q$ ассоциативна и в алгебре $A$ выполнено (1), то для любого $c \in A$ имеем

$$Q((a \bullet f) \bullet b + (f \bullet a) \bullet b, c) = Q(f \bullet (ab) + a \bullet (f \bullet b), c).$$

Отсюда получаем, что $(a \bullet f) \bullet b + (f \bullet a) \bullet b = f \bullet (ab) + a \bullet (f \bullet b)$. Таким образом, осталось показать, что $f^2 \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b)$. В силу равенства (3) имеем

$$\langle f \otimes f, \Delta(ba) + \tau(\Delta(ba)) \rangle$$
$$= \Big\langle f \otimes f, \sum_a (a_{(1)} \otimes ba_{(2)} + ba_{(2)} \otimes a_{(1)}) + \sum_b (b_{(1)}a \otimes b_{(2)} + b_{(2)} \otimes b_{(1)}a) \Big\rangle.$$

Следовательно,

$$2\langle f \otimes f, \Delta(ba) \rangle = 2\Big\langle f \otimes f, \sum_a a_{(1)} \otimes ba_{(2)} + \sum_b b_{(1)}a \otimes b_{(2)} \Big\rangle.$$

Поэтому

$$Q(f^2 \bullet b, a) = Q(f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b), a).$$

В силу невырожденности формы $Q$ получаем $f^2 \bullet b = f(f \bullet b) + f \bullet (f \cdot b)$, и равенство (7) доказано.

Равенство (8) доказывается аналогично с использованием равенства (1), которое выполняется в алгебре $A^*$, альтернативности алгебры $A$ и предложения 1.

Из леммы 2, замечания, сделанного после леммы 2, и леммы 3 следует

**Теорема 1.** *Пусть $A$ — альтернативная алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$, на которой задано коумножение $\Delta$. Тогда пара $(A, \Delta)$ является альтернативной биалгеброй по Дринфельду тогда и только тогда, когда пара $(A, \Delta)$ — альтернативная коалгебра и коумножение $\Delta$ удовлетворяет следующим равенствам:*

$$\Delta(ab) = \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)}b \otimes a_{(1)} - a_{(2)} \otimes ba_{(1)})$$
$$+ \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + b_{(1)} \otimes b_{(2)}a - ab_{(1)} \otimes b_{(2)});$$

$$\sum_{ab} ((ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} + (ab)_{(2)} \otimes (ab)_{(1)})$$
$$= \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)} \otimes a_{(1)}b) + \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + ab_{(2)} \otimes b_{(1)}).$$

Отметим, что теорема 1 — альтернативный аналог теоремы 1 из [3].

## § 2. Уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах

Напомним, что для алгебры Ли $L$ пара $(L, \Delta)$ является биалгеброй Ли тогда и только тогда, когда $(L, \Delta)$ — коалгебра Ли и коумножение $\Delta$ является 1-коциклом (см. [1]), т. е. удовлетворяет равенству

$$\Delta([a,b]) = \sum_a ([a_{(1)}, b] \otimes a_{(2)} + a_{(1)} \otimes [a_{(2)}, b]) + \sum_b ([a, b_{(1)}] \otimes b_{(2)} + b_{(1)} \otimes [a, b_{(2)}]).$$

Среди биалгебр Ли особою роль играют треугольные и квазитреугольные биалгебры Ли. Пусть $L$ — алгебра Ли над полем $F$ и $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ из $(\mathrm{id} - \tau)(L \otimes L)$, т. е. $\tau(R) = -R$. Определим на алгебре $L$ коумножение $\Delta_R$, полагая для любого $a \in L$

$$\Delta_R(a) = \sum_i [a_i, a] \otimes b_i - a_i \otimes [a, b_i].$$

Тогда коумножение $\Delta_R$ антикокоммутативно и является 1-коциклом. В [10] показано, что пара $(L, \Delta_R)$ — коалгебра Ли тогда и только тогда, когда элемент

$$C_L(R) = [R_{12}, R_{13}] + [R_{12}, R_{23}] + [R_{13}, R_{23}]$$

ad-инвариантен($L$-инвариантен), где $[R_{12}, R_{13}] = \sum_{ij} [a_i, a_j] \otimes b_i \otimes b_j$, $[R_{12}, R_{23}] = \sum_{ij} a_i \otimes [b_i, a_j] \otimes b_j$ и $[R_{13}, R_{23}] = \sum_{ij} a_i \otimes a_j \otimes [b_i, b_j]$. В частности, если

$$[R_{12}, R_{13}] + [R_{12}, R_{23}] + [R_{13}, R_{23}] = 0, \tag{9}$$

то пара $(L, \Delta_R)$ — коалгебра Ли. Уравнение (9) называется *классическим уравнением Янга — Бакстера* или *уравнением треугольников*. Уравнения Янга — Бакстера для ассоциативных и йордановых алгебр изучалось в работах [3, 5, 7].

В классе альтернативных биалгебр также можно выделить биалгебры, связанные с альтернативным аналогом уравнения (9).

Определение. Пусть $A$ — альтернативная алгебра и $r = \sum_i a_i \otimes b_i \in A \otimes A$. Пара $(A, r)$ называется *кограничной альтернативной* Д-*биалгеброй*, если пара $(A, \Delta_r)$, где

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a \otimes b_i - \sum_i a_i \otimes a b_i,$$

является альтернативной Д-биалгеброй.

Зафиксируем элемент $r = \sum_i a_i \otimes b_i$ из $(\mathrm{id} - \tau)(A \otimes A)$, т. е. $\tau\big(\sum_i a_i \otimes b_i\big) = -\sum_i a_i \otimes b_i$, и определим на алгебре $A$ коумножение $\Delta_r$, полагая

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a \otimes b_i - \sum_i a_i \otimes a b_i. \tag{10}$$

Пусть теперь $r_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $r_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$, $r_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$. По аналогии с [3] положим

$$C_A(r) = (\mathrm{id} + \xi + \xi^2)(r_{23} r_{12}),$$

где $\xi : A \otimes A \otimes A \mapsto A \otimes A \otimes A$ — линейное отображение, удовлетворяющее равенству $\xi(x \otimes y \otimes z) = y \otimes z \otimes x$.

Поскольку $r_{23}r_{12} = \big(\sum\limits_i 1 \otimes a_i \otimes b_i\big)\big(\sum\limits_i a_i \otimes b_i \otimes 1\big) = \sum\limits_{ij} a_j \otimes a_i b_j \otimes b_i$, имеем

$$C_A(r) = \sum_{ij} a_j \otimes a_i b_j \otimes b_i + \sum_{ij} a_i b_j \otimes b_i \otimes a_j + \sum_{ij} b_i \otimes a_j \otimes a_i b_j.$$

Во второй (соответственно в третьей) сумме, меняя местами элементы $a_j$ и $b_j$ (соответственно $a_i$ и $b_i$) и учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получаем

$$C_A(r) = \sum_{ij} a_j \otimes a_i b_j \otimes b_i - \sum_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j - \sum_{ij} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j.$$

Так как $r_{12}r_{13} = \sum\limits_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j$, $r_{13}r_{23} = \sum\limits_{ij} a_i \otimes a_j \otimes b_i b_j$, то

$$C_A(r) = r_{23}r_{12} - r_{12}r_{13} - r_{13}r_{23}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим

$$C_A(r) = -\sum_{ij} a_i a_j \otimes b_i \otimes b_j + b_j \otimes a_i a_j \otimes b_i + b_i \otimes b_j \otimes a_i a_j.$$

Ниже будет показано, что если $C_A(r) = 0$, то пара $(A, \Delta_r)$ — альтернативная Д-биалгебра.

**Предложение 2.** *Для коумножения $\Delta_r$ выполняются равенства* (2)–(4).

Доказательство. Докажем, что $\Delta_r$ удовлетворяет равенству (2). Это эквивалентно тому, что

$$\sum_i a_i(ab) \otimes b_i - a_i \otimes (ab)b_i = \sum_i (a_i a)b \otimes b_i - a_i b \otimes ab_i + b_i b \otimes a_i a - (ab_i)b \otimes a_i$$
$$-b_i \otimes b(a_i a) + ab_i \otimes ba_i + a_i b \otimes ab_i - a_i \otimes a(bb_i) + a_i b \otimes b_i a - a_i \otimes (bb_i)a - a(a_i b) \otimes b_i + aa_i \otimes bb_i.$$

Поскольку $\sum\limits_i b_i b \otimes a_i a + \sum\limits_i a_i b \otimes b_i a = 0$ и $\sum\limits_i aa_i \otimes bb_i + \sum\limits_i ab_i \otimes ba_i = 0$, достаточно показать, что

$$\sum_i a_i(ab) \otimes b_i - a_i \otimes (ab)b_i = \sum_i -(ab_i)b \otimes a_i + (a_i a)b \otimes b_i$$
$$- b_i \otimes b(a_i a) - a_i \otimes (bb_i)a - a_i \otimes a(bb_i) - a(a_i b) \otimes b_i.$$

Так так

$$-\sum_i b_i \otimes b(a_i a) = \sum_i a_i \otimes b(b_i a),$$

используя равенство (1), получаем

$$-\sum_i b_i \otimes b(a_i a) - \sum_i a_i \otimes (bb_i)a - \sum_i a_i \otimes a(bb_i) = -\sum_i a_i \otimes (ab)b_i.$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_i (a_i a)b \otimes b_i - \sum_i (ab_i)b \otimes a_i - \sum_i a(a_i b) \otimes b_i = \sum_i a_i(ab) \otimes b_i.$$

Тем самым доказано, что $\Delta_r$ удовлетворяет равенству (2).

Докажем, что $\Delta_r$ удовлетворяет равенству (3). Требуется доказать, что

$$\sum_i a_i(ba)\otimes b_i - a_i\otimes(ba)b_i + b_i\otimes a_i(ba) - (ba)b_i\otimes a_i = \sum_i a_i a\otimes b_i b - a_i\otimes b(ab_i) + bb_i\otimes a_i a - b(ab_i)\otimes a_i + (a_i b)a\otimes b_i - a_i a\otimes b_i b + b_i\otimes(a_i b)a - bb_i\otimes a_i a.$$

Приведя подобные члены и перенеся слагаемые в одну часть, заключаем, что данное равенство эквивалентно такому:

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i + \sum_i a_i\otimes(b,a,b_i) + \sum_i b_i\otimes(a_i,b,a) + \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i = 0.$$

Используя равенство $\sum\limits_i a_i\otimes b_i = -\sum\limits_i b_i\otimes a_i$, получаем

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i = -\sum_i (b_i,b,a)\otimes a_i.$$

В силу альтернативности алгебры $A$

$$\sum_i (b_i,b,a)\otimes a_i = \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i.$$

Следовательно,

$$\sum_i (a_i,b,a)\otimes b_i + \sum_i (b,a,b_i)\otimes a_i = 0.$$

Аналогично

$$\sum_i a_i\otimes(b,a,b_i) + \sum b_i\otimes(a_i,b,a) = 0.$$

Тем самым показано, что коумножение $\Delta_r$ удовлетворяет равенству (3).

Докажем, что $\Delta_r$ удовлетворяет равенству (4). Требуется доказать, что

$$\sum_i a_i a^2\otimes b_i - a_i\otimes a^2 b_i = \sum_i (a_i a)a\otimes b_i - a_i a\otimes ab_i + \sum_i a_i a\otimes ab_i - a_i\otimes a(ab_i).$$

Это следует из альтернативности алгебры $A$.

**Лемма 4.** *Пусть $A$ — альтернативная алгебра над полем $F$ характеристики, не равной 2, и $C_A(r)=0$. Тогда пара $(A,\Delta_r)$ — альтернативная коалгебра.*

Доказательство. Пусть $f,g\in A^*$ — произвольные элементы. Докажем, что $(f,f,g)=0$. Для произвольного $a\in A$ имеем

$$\begin{aligned}\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij} &\langle f, a_j(a_i a)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle \\ &- \langle f,a_j\rangle\langle f,(a_i a)b_j\rangle\langle g,b_i\rangle - \langle f,a_j a_i\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,ab_i\rangle + \langle f,a_j\rangle\langle f,a_i b_j\rangle\langle g,ab_i\rangle \\ &- \Big(\sum_{ij}\langle f,a_i a\rangle\langle f,a_j b_i\rangle\langle g,b_j\rangle - \langle f,a_i a\rangle\langle f,a_j\rangle\langle g,b_i b_j\rangle - \langle f,a_i\rangle\langle f,a_j(ab_i)\rangle\langle g,b_j\rangle \\ &+ \langle f,a_i\rangle\langle f,a_j\rangle\langle g,(ab_i)b_j\rangle\Big).\end{aligned}$$

В силу равенства (1), учитывая, что $\sum\limits_i a_i\otimes b_i = -\sum\limits_i b_i\otimes a_i$, получаем

$$\sum_{ij}\langle f,a_j(a_i a)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle - \sum_{ij}\langle f,a_j\rangle\langle f,(a_i a)b_j\rangle\langle g,b_i\rangle = \sum_{ij}\langle f,(a_j a_i)a\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle + \sum_{ij}\langle f,a_i(aa_j)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle g,b_i\rangle.$$

Поменяем в сумме $\sum\limits_{ij} a_i \otimes a_j(ab_i) \otimes b_j$ элементы $a_i$ и $b_i$ местами. Используя равенство $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получим

$$-\sum_{ij} \langle f, a_i\rangle \langle f, a_j(ab_i)\rangle \langle g, b_j\rangle = \sum_{ij} \langle f \otimes f \otimes g, b_i \otimes a_j(aa_i) \otimes b_j\rangle.$$

В последней сумме поменяем индексы суммирования. Будем иметь

$$-\sum_{ij} \langle f, a_i\rangle \langle f, a_j(ab_i)\rangle \langle g, b_j\rangle = \sum_{ij} \langle f, b_j\rangle \langle f, a_i(aa_j)\rangle \langle g, b_i\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij} \langle f, (a_j a_i)a\rangle \langle f, b_j\rangle \langle g, b_i\rangle - \langle f, a_j a_i\rangle \langle f, b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle \\ + \langle f, a_j\rangle \langle f, a_i b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle - \langle f, a_i a\rangle \langle f, a_j b_i\rangle \langle g, b_j\rangle + \langle f, a_i a\rangle \langle f, a_j\rangle \langle g, b_i b_j\rangle \\ - \langle f, a_i\rangle \langle f, a_j\rangle \langle g, (ab_i)b_j\rangle.\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{ij} \langle f, (a_j a_i)a\rangle \langle f, b_j\rangle \langle g, b_i\rangle - \sum_{ij} \langle f, a_i a\rangle \langle f, a_j b_i\rangle \langle g, b_j\rangle + \sum_{ij} \langle f, a_i a\rangle \langle f, a_j\rangle \langle g, b_i b_j\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем местами элементы $a_i$ и $b_i$, в третьем — элементы $a_i$ и $b_i$, $a_j$ и $b_j$. Учитывая, что $\sum\limits_i a_i \otimes b_i = -\sum\limits_i b_i \otimes a_i$, получим

$$S = \sum_{ij} \langle f \otimes f \otimes g, (a_j a_i)a \otimes b_j \otimes b_i + b_i a \otimes a_j a_i \otimes b_j + b_i a \otimes b_j \otimes a_i a_j\rangle.$$

В третьем слагаемом последней суммы, поменяв индексы суммирования, будем иметь

$$S = -\langle f \otimes f \otimes g, C_A(r)(a \otimes 1 \otimes 1)\rangle.$$

Поскольку $C_A(r) = 0$, то $S = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij} -\langle f, a_j a_i\rangle \langle f, b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle + \langle f, a_j\rangle \langle f, a_i b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle \\ - \langle f, a_i\rangle \langle f, a_j\rangle \langle g, (ab_i)b_j\rangle.\end{aligned}$$

Пусть

$$S = \sum_{ij} -\langle f, a_j a_i\rangle \langle f, b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle + \langle f, a_j\rangle \langle f, a_i b_j\rangle \langle g, ab_i\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем местами элементы $a_j$ и $b_j$, а затем индексы суммирования. Тогда, учитывая, что $C_A(r) = 0$, получим

$$S = \sum_{ij} \langle f \otimes f \otimes g, b_j \otimes b_i \otimes a(a_j a_i)\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle (f,f,g), a\rangle = \sum_{ij} \langle f, b_j\rangle \langle f, b_i\rangle \langle g, a(a_j a_i)\rangle - \sum_{ij} \langle f, a_i\rangle \langle f, a_j\rangle \langle g, (ab_i)b_j\rangle.$$

Во второй сумме, стоящей в правой части равенства, поменяем местами элементы $a_i$ и $b_i$, а затем $a_j$ и $b_j$. Так как $\sum\limits_i a_i\otimes b_i = -\sum\limits_i b_i\otimes a_i$, то

$$\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes a(a_ja_i)\rangle - \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (aa_i)a_j\rangle.$$

Поменяв индексы суммирования во второй сумме, получим

$$\langle (f,f,g),a\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes a(a_ja_i) - b_j\otimes b_i\otimes (aa_j)a_i\rangle$$
$$= -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Покажем, что $\sum\limits_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = 0$. Поменяем в этой сумме местами индексы суммирования:

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = \sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_i,a_j)\rangle.$$

Тогда в силу линеаризованного тождества правой альтернативности имеем

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_i,a_j)\rangle = -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Поэтому

$$\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_j\otimes b_i\otimes (a,a_j,a_i)\rangle = -\sum_{ij}\langle f\otimes f\otimes g, b_i\otimes b_j\otimes (a,a_j,a_i)\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$2\sum_{ij}\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle\langle g,(a,a_j,a_i)\rangle = 0 \tag{11}$$

и

$$\langle (f,f,g),a\rangle = 0.$$

Тем самым $(f,f,g)=0$ для любых $f,g\in A^*$.

Докажем, что $(g,f,f)=0$. Для произвольного $a\in A$ имеем

$$\langle (g,f,f),a\rangle = \sum_{ij}\langle g,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle$$
$$- \langle g,a_j\rangle\langle f,(a_ia)b_j\rangle\langle f,b_i\rangle - \langle g,a_ja_i\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,ab_i\rangle + \langle g,a_j\rangle\langle f,a_ib_j\rangle\langle f,ab_i\rangle$$
$$- \Big(\sum_{ij}\langle g,a_ia\rangle\langle f,a_jb_i\rangle\langle f,b_j\rangle - \langle g,a_ia\rangle\langle f,a_j\rangle\langle f,b_ib_j\rangle - \langle g,a_i\rangle\langle f,a_j(ab_i)\rangle\langle f,b_j\rangle$$
$$+ \langle g,a_i\rangle\langle f,a_j\rangle\langle f,(ab_i)b_j\rangle\Big).$$

Из (11) и альтернативности алгебры $A$ следует, что

$$\sum_{ij}\langle g,(a_j,a_i,a)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle = 0.$$

Поэтому

$$\sum_{ij}\langle g,a_j(a_ia)\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle = \sum_{ij}\langle g,(a_ja_i)a\rangle\langle f,b_j\rangle\langle f,b_i\rangle.$$

Рассмотрим сумму

$$S = \sum_{ij} \langle g, (a_j a_i)a\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, b_i\rangle - \langle g, a_i a\rangle\langle f, a_j b_i\rangle\langle f, b_j\rangle + \langle g, a_i a\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, b_i b_j\rangle.$$

Во втором слагаемом этой суммы поменяем элементы $a_i$ и $b_i$ местами, в третьем слагаемом поменяем местами элементы $a_i$ и $b_i$, $a_j$ и $b_j$, а также индексы суммирования. Учитывая, что $\sum_i a_i \otimes b_i = -\sum_i b_i \otimes a_i$, получаем

$$S = -\langle g \otimes f \otimes f, C_A(r)(a \otimes 1 \otimes 1)\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle (g, f, f), a\rangle = \sum_{ij} -\langle g, a_j\rangle\langle f, (a_i a)b_j\rangle\langle f, b_i\rangle - \langle g, a_j a_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle \\ + \langle g, a_j\rangle\langle f, a_i b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle + \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle f, b_j\rangle - \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, (ab_i)b_j\rangle.$$

Пусть

$$S = \sum_{ij} -\langle g, a_j\rangle\langle f, (a_i a)b_j\rangle\langle f, b_i\rangle + \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j(ab_i)\rangle\langle f, b_j\rangle - \langle g, a_i\rangle\langle f, a_j\rangle\langle f, (ab_i)b_j\rangle.$$

Поменяв в первом слагаемом индексы суммирования, а в третьем — элементы $a_j$ и $b_j$, получаем

$$S = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, -(a_j a)b_i + a_j(ab_i) + (ab_i)a_j\rangle\langle f, b_j\rangle.$$

Используя равенство (1), будем иметь

$$S = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, a(b_i a_j)\rangle\langle f, b_j\rangle.$$

Таким образом,

$$\langle (g, f, f), a\rangle = \sum_{ij} \langle g, a_i\rangle\langle f, a(b_i a_j)\rangle\langle f, b_j\rangle \\ - \langle g, a_j a_i\rangle\langle f, b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle + \langle g, a_j\rangle\langle f, a_i b_j\rangle\langle f, ab_i\rangle.$$

В первом слагаемом правой части поменяем местами элементы $a_i$ и $b_i$, во втором поменяем индексы суммирования, а в третьем поменяем местами элементы $a_j$ и $b_j$. Учитывая, что $\sum_i a_i \otimes b_i = -\sum_i b_i \otimes a_i$, получим

$$\langle (g, f, f), a\rangle = \langle g \otimes f \otimes f, (1 \otimes 1 \otimes a)C_A(r)\rangle = 0.$$

Отсюда следует, что алгебра $A^*$ альтернативна и, следовательно, коалгебра $(A, \Delta_r)$ альтернативна.

В силу теоремы 1 из предложения 2 и леммы 4 следует

**Теорема 2.** *Пусть $A$ — альтернативная алгебра над полем $F$ характеристики $\neq 2$, $r = \sum_i a_i \otimes b_i$ и $\tau(r) = -r$. Предположим, что $C_A(r) = 0$. Тогда пара $(A, \Delta_r)$, где*

$$\Delta_r(a) = \sum_i a_i a \otimes b_i - a_i \otimes ab_i,$$

*является альтернативной Д-биалгеброй.*

## § 3. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона

Пусть $F_2$ — алгебра $2 \times 2$-матриц над алгебраически замкнутым полем $F$. Через $e_{ij}$ обозначим матричные единицы алгебры $F_2$.

Пусть $\mathscr{C} = F_2 \oplus \upsilon F_2$ — матричная алгебра Кэли — Диксона. Напомним, что умножение в $F_2$ продолжается до умножения в алгебре $\mathscr{C}$ с помощью следующих соотношений:

$$a(\upsilon b) = \upsilon \bar{a} b, \quad (\upsilon b)a = \upsilon(ab), \quad (\upsilon a)(\upsilon b) = b\bar{a},$$

где $a, b \in \mathscr{F}_2$, а черта над буквой означает стандартную инволюцию алгебры $F_2$.

В этом параграфе мы опишем все структуры альтернативных Д-биалгебр, заданные на алгебре Кэли — Диксона $\mathscr{C}$. В дальнейшем будем считать, что характеристика поля $F$ не равна 2.

Определение. Пусть $A$ — произвольная $F$-алгебра и $\omega$ — билинейная кососимметрическая форма на $A$. Тогда $\omega$ называется *замкнутой формой*, если для любых элементов $a, b, c$ из $A$ выполняется равенство

$$\omega(ab, c) + \omega(bc, a) + \omega(ca, b) = 0. \tag{12}$$

В этом случае форму $\omega$ будем называть *симплектической*.

Заметим, что если $A$ является квадратичной алгеброй с единицей, то данное определение замкнутости формы эквивалентно следующим двум условиям:

$$\omega([a, b], c) + \omega([b, c], a) + \omega([c, a], b) = 0, \quad \omega(1, a) = 0$$

для любых $a, b, c \in A$.

Приведем примеры симплектических алгебр, которые являются подалгебрами в $\mathscr{C}$.

Пример 1. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(2, 1, 0)$ с базисом $e_{11}, e_{12}$.

Пример 2. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(2, 0, 1)$ с базисом $e_{11}, e_{21}$.

Пример 3. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $N(2)$ с базисом $e_{12}, \upsilon e_{11}$.

Симплектической формой в этих примерах является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма.

Пример 4. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(4, 1, 2)$ с базисом $e_{11}$, $e_{12}$, $\upsilon e_{11}$, $\upsilon e_{12}$. Симплектической формой на алгебре $A(4, 1, 2)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству $\omega(e_{11}, e_{12}) = -\omega(\upsilon e_{11}, \upsilon e_{12})$.

Пример 5. В алгебре $\mathscr{C}$ рассмотрим подалгебру $A(4, 2, 1)$ с базисом $e_{11}$, $\upsilon e_{21}$, $\upsilon e_{22}$, $e_{21}$. Симплектической формой на алгебре $A(4, 2, 1)$ является любая невырожденная кососимметрическая билинейная форма, удовлетворяющая равенству $\omega(e_{11}, e_{21}) = \omega(\upsilon e_{21}, \upsilon e_{22})$.

Аналогично теореме 2 и лемме 6 из [7] доказываются

**Утверждение 1.** *Пусть $\mathscr{C}$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над $F$. Предположим, что на $\mathscr{C}$ задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением $\Delta$. Пусть $N$ — ниль-радикал алгебры $D(\mathscr{C})$. Тогда $N \neq 0$, $N^2 = 0$ и $D(\mathscr{C}) = \mathscr{C} + N$.*

**Утверждение 2.** *Пусть $\mathscr{C}$ — матричная алгебра Кэли — Диксона над $F$. Предположим, что на $\mathscr{C}$ задана структура альтернативной Д-биалгебры с коумножением $\Delta$. Тогда существует такой элемент $r$ из $(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, что $C_{\mathscr{C}}(r)=0$ и $\Delta=\Delta_r$.*

Таким образом, поставленная нами задача свелась к нахождению всех элементов $r=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\in(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, которые удовлетворяют уравнению $C_{\mathscr{C}}(r)=0$. Как показано в [11], такие элементы находятся во взаимно однозначном соответствии с подалгебрами, на которых можно задать симплектическую невырожденную форму. Пусть $\phi_r:\mathscr{C}^*\mapsto\mathscr{C}$ задано равенством $\phi_r(f)=\sum\limits_i\langle f,a_i\rangle b_i$. Тогда (см. [11]) отображение $\phi_r$ является гомоморфизмом алгебр. Обозначим через $A$ образ пространства $\mathscr{C}^*$ при отображении $\phi_r$. Можно считать, что элементы $a_i$ (соответственно $b_i$), входящие в запись элемента $r$, являются базисом пространства $A$. Пусть $\dim A=n$. Выразив каждый элемент $b_i$ через $a_1,\dots,a_n$, получим, что $r=\sum\limits_{ij}\alpha_{ij}(a_i\otimes a_j)$, где $\alpha_{ij}\in F$. Пусть матрица $(\beta_{ij})$ — обратная матрица к матрице $(\alpha_{ij})$.

Пусть $a_1^*,\dots,a_n^*$ — дуальный базис к базису $a_1,\dots,a_n$. Определим на пространстве $A$ форму $\omega_r$, полагая

$$\omega_r(a,b)=\sum_{ij}\beta_{ij}\langle a_i^*\otimes a_j^*,a\otimes b\rangle.$$

Тогда (см. [11]) $\omega_r$ — невырожденная симплектическая форма на алгебре $A$.

Если $A$ — подалгебра в $\mathscr{C}$ и $\omega$ — невырожденная симплектическая форма на алгебре $A$, то $\omega=\omega_r$ для некоторого элемента $r\in(\mathrm{id}-\tau)(\mathscr{C}\otimes\mathscr{C})$, удовлетворяющего уравнению $C_{\mathscr{C}}(r)=0$.

В дальнейшем нам понадобится следующая техническая

**Лемма 5.** Пусть $A$ — нильпотентная подалгебра матричной алгебры Кэли — Диксона $\mathscr{C}$ над алгебраически замкнутым полем $F$. Тогда размерность алгебры $A$ не превосходит трех.

Доказательство. Для начала заметим, что если $H$ — некоторое подпространство необратимых матриц из $F_2$, то размерность $H$ не превосходит 2.

Алгебра Кэли — Диксона (см. [12]) является композиционной алгеброй, и каждый элемент в ней удовлетворяет квадратному уравнению $x^2-t(a)x+n(a)=0$, где $t(a)=a+\bar a\in F$ — след элемента $a$, $n(a)=a\bar a\in F$ — норма элемента $a$.

Для любого элемента $a\in A$ имеем $t(a)=0$, $n(a)=0$ и $a^2=0$. Поэтому $ab+ba=0$ для любых $a,b\in A$.

Пусть $a\in A$, $a\neq 0$. Тогда по [13, лемма 2] можно считать, что $a\in F_2$. Существует невырожденная матрица $T\in F_2$ такая, что $TaT^{-1}=e_{12}$. Отображение

$$\varphi:x+\upsilon y\to TxT^{-1}+\upsilon(TyT^{-1}),\quad x,y\in F_2,$$

является автоморфизмом алгебры $\mathscr{C}$, и, следовательно, размерность $\varphi(A)$ равна размерности $A$. В связи с этим мы будем предполагать, что $a=e_{12}$.

Пусть теперь $b\in A$ произвольный и

$$b=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}+\upsilon\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\gamma_1&\delta_1\end{pmatrix}.$$

Из условия $e_{12}b+be_{12}=0$ следует, что $\gamma=0$, $\alpha+\delta=0$. Поэтому

$$b=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\0&-\alpha\end{pmatrix}+\upsilon\begin{pmatrix}\alpha_1&\beta_1\\\gamma_1&\delta_1\end{pmatrix}.$$

Из условия $b^2 = 0$ вытекает, что

$$\alpha^2 + \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = 0. \tag{13}$$

Тогда можно считать, что $\alpha \neq 0$ для некоторого $b$. Поэтому в алгебре $A$ содержится линейно независимый с $a$ элемент

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Из равенства (13) получаем, что $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0$. Тогда $(\gamma_1, \delta_1) \neq (0, 0)$. Поскольку $be_{12} = e_{12} + v(\gamma_1 e_{11} + \delta_1 e_{12})$, то

$$c = be_{12} - e_{12} = v(\gamma_1 e_{11} + \delta_1 e_{12}) \in A.$$

Так как $(\gamma_1, \delta_1) \neq (0, 0)$, то элемент $c \neq 0$ и элементы $e_{12}, b, c$ являются линейно независимыми.

Пусть $d \in A$ линейно независим с $a, b, c$. Тогда

$$d = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\lambda^2 + \alpha_2\delta_2 - \beta_2\gamma_2 = 0. \tag{15}$$

Так как $c + d \in A$, то $(c + d)^2 = 0$. Отсюда, используя равенство (15), находим, что

$$\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 0. \tag{16}$$

Как отмечено выше, по крайней мере один из элементов $\gamma_1$, $\delta_1$ не равен нулю. Пусть для определенности $\gamma_1 \neq 0$ (случай $\delta_1 \neq 0$ рассматривается аналогично). Тогда из (16) следует, что

$$d_1 = \gamma_2 b - \gamma_1(d - \beta a) = \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} \gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2 & \gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\chi = \gamma_2 - \gamma_1\lambda$. В силу (13) получаем, что $\chi = 0$ и $d_1 = v(\alpha_3 e_{11} + \beta_3 e_{12})$.

Поскольку $b + d_1 \in A$, ввиду (13) $\alpha_3\delta_1 - \beta_3\gamma_1 = 0$. Поэтому $\alpha_3 c - \gamma_1 d_1 = 0$. Тогда получаем, что элементы $a, b, c, d$ являются линейно зависимыми; противоречие. Лемма доказана.

Пусть теперь $U$ — подалгебра алгебры $\mathscr{C}$, на которой можно задать невырожденную симплектическую форму $\omega$. Так как форма $\omega$ является кососимметрической и невырожденной, то размерность искомых подалгебр должна быть четной. Кроме того, $U$ не содержит единицы, ибо в противном случае

$$\omega(1, x) = \omega(1^2, x) = -\omega(1 \cdot x, 1) - \omega(x \cdot 1, 1) = -\omega(x, 1) - \omega(x, 1)$$

для любого $x \in U$. В силу кососимметричности формы $\omega$ получаем, что $\omega(1, x) = 0$ для любого $x \in U$, т. е. форма $\omega$ не является невырожденной. Из этого, в частности, следует, что $U$ не может быть полупростой алгеброй.

Если $U$ имеет размерность 6, то по лемме 5 алгебра $U$ содержит не менее двух ортогональных идемпотентов. Тогда алгебра $\mathscr{C}$ содержит не менее трех ортогональных идемпотентов, сумма которых равна единице, чего не может быть в силу леммы 3.15 из [14]. Следовательно, $U$ — алгебра размерности 2 или 4.

**Лемма 6.** *Пусть $U$ — подалгебра в $\mathscr{C}$ размерности 2 с невырожденной симплектической формой $\omega$. Тогда $U$ изоморфна одной из алгебр $A(2,1,0)$, $A(2,0,1)$ или $N(2)$.*

Доказательство. Поскольку алгебра $U$ не является полупростой, то ее радикал $N$ отличен от нуля.

Пусть размерность $N$ равна единице. Тогда $U = eF \oplus nF$, где $e$ — идемпотент алгебры $\mathscr{C}$, $n^2 = 0$ и $\omega(n,e) \neq 0$. Ясно, что $N$ совпадает с одной из своих пирсовских компонент $N_{ij}$ относительно идемпотента $e$. По условию леммы $N_{11} = 0$. Если $en = 0$, $ne = 0$, то $\omega(n,e) = 0$. Поэтому либо $en = n$, $ne = 0$, либо $en = 0$, $ne = n$. В первом случае алгебра $U$ изоморфна алгебре $A(2,1,0)$, во втором — $A(2,0,1)$.

Пусть размерность $N$ равна двум. Пусть $n, k$ — базис $N$. Тогда $nk = \alpha n + \beta k$, где $\alpha, \beta \in F$. Поскольку $n^2 = k^2 = 0$, то $nnk = \beta nk = 0$ и $nkk = \alpha nk = 0$. Следовательно, $nk = -kn = 0$. В этом случае алгебра $U$ изоморфна алгебре $N(2)$. Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Пусть $U$ — подалгебра в $\mathscr{C}$ размерности 4 с невырожденной симплектической формой $\omega$. Тогда алгебра $U$ изоморфна либо $A(4,1,2)$, либо $A(4,2,1)$.*

Доказательство. Пусть $N$ — радикал алгебры $U$. Тогда, как отмечалось, радикал $N$ не равен нулю. Если размерность радикала меньше чем три, то $U$ содержит два ортогональных идемпотента и, как следствие, единицу алгебры $\mathscr{C}$.

Поэтому в силу леммы 5 размерность радикала $N$ равна трем. Тогда $U = eF \oplus N$, где $e$ — идемпотент алгебры $\mathscr{C}$, $e \neq 1$. Можно считать, что $e = e_{11}$.

Рассмотрим пирсовское разложение радикала $N$ относительно идемпотента $e$. Поскольку $N_{ii} \subseteq \mathscr{C}_{ii}$, то $N_{11} = N_{00} = 0$. Если, например, $N = N_{10}$, то по свойствам пирсовского разложения $N^2 = 0$. Поэтому для любых $m, n \in N$ имеем

$$\omega(m,n) = \omega(em,n) = -\omega(mn,e) - \omega(ne,m) = 0,$$

что противоречит невырожденности формы $\omega$.

Допустим, что размерность пространства $N_{10}$ равна единице. В этом случае размерность $N_{01}$ равна двум. Элементы из $N_{01}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим два линейно независимых элемента $n, k \in N_{01}$. Можно считать, что

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \upsilon \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $l \in N_{10}$. Тогда

$$l = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $k, n, l$ образуют базис $N$. Так как $(l+n)^2 = (l+k)^2 = 0$, то

$$\beta\gamma + \alpha_1\delta_1 - \gamma_1\beta_1 = 0, \tag{17}$$

$$\alpha_2\delta_1 - \beta_2\gamma_1 = 0. \tag{18}$$

Рассмотрим
$$nk = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2\alpha_1 - \alpha_2\beta_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \upsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma\alpha_2 & -\gamma\beta_2 \end{pmatrix}.$$
Допустим, что $nk = 0$ и $\varsigma \in \{\alpha_2, \beta_2\}$, $\varsigma \neq 0$. Тогда $\varsigma n - \nu k = 0$, где $\nu = \alpha_1$ (соответственно $\beta_1$), если $\varsigma = \alpha_2$ (соответственно $\beta_2$). Противоречие с линейной независимостью $n$ и $k$. Таким образом, $nk \neq 0$, и из свойств пирсовского разложения следует, что $nk = \lambda l$, где $\lambda \in F$.

Пусть $m = \lambda l$. Тогда $nk = -kn = m$. Элементы $e, m, n, k$ образуют базис алгебры $U$. Из свойств пирсовского разложения вытекает, что $nm = mn = km = mk = 0$. Отсюда получаем, что алгебра $U$ изоморфна $A(4,1,2)$.

В случае, когда размерность $N_{10}$ равна двум, $U$ изоморфна алгебре $A(4,2,1)$. Лемма доказана.

Пользуясь случаем, хочу выразить благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению текста работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 2. С. 285–287.
2. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 3–25.
3. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 299–308.
4. *Joni S. A., Rota G. C.* Coalgebras and bialgebras in combinatorics // Stud. Appl. Math. 1979. V. 61, N 2. P. 93–139.
5. *Aguiar M.* On the associative analog of Lie bialgebras // J. of Algebra. 2001. V. 244, N 2. P. 492–532.
6. *Polishchuk A.* Classic Yang–Baxter equation and the $A_\infty$-constraint // Adv. Math. 2002. V. 168, N 1. P. 56–96.
7. *Желябин В. Н.* Об одном классе йордановых Д-биалгебр // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 64–94.
8. *Mudrov A. I.* Associative triples and the Yang–Baxter equation // Israel J. Math. 2004. V. 139. P. 11–28.
9. *Anquela J. A., Cortes T. Montaner F.* Nonassociative coalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
10. *Drinfeld V. G.* Quantum groups // Proc. Intern. congr. math. Berkeley, 1986. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1987. P. 798–820.
11. *Желябин В. Н.* Jordan D-bialgebras and sympectic forms on Jordan algebras // Siberian Advances in Mathematics. 2000. V. 10, N 2. P. 134–142.
12. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
13. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 39).
14. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Acad. Press, 1966.


*Статья поступила 27 апреля 2006 г.*

*Гончаров Максим Евгеньевич*
*Новосибирский гос. университет,*
*ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090*
max1984@ngs.ru