Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.518

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

А. А. Щеглова

Аннотация: Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, неразрешенная относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденная в области определения. Получены условия существования оператора, преобразующего исходную систему к нормальной форме, доказана общая теорема о разрешимости задачи Коши.

Ключевые слова: алгебро-дифференциальная система, приведение к нормальной форме, существование решения, задача Коши.

1. Введение. Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ):

$$F(t, x(t), x'(t)) = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1), \tag{1}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t,x,y)$ определена в области $\mathscr{D} = \{(t,x,y) : t \in T, \|x - \bar{x}\| < K_0, \|y - \bar{y}\| < K_1\} \subset \mathbf{R}^{2n+1}$; $x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция. Предполагается, что $F(t,x,y)$ имеет в $\mathscr{D}$ достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и

$$\det \frac{\partial F(t,x,y)}{\partial y} = 0 \quad \forall (t,x,y) \in \mathscr{D}. \tag{2}$$

Системы вида (1), удовлетворяющие условию (2), называют *алгебро-дифференциальными системами* (АДС)[1)]. В литературе используются и другие термины: дифференциально-алгебраические уравнения (differential-algebraic equations),
дескрипторные системы, сингулярные системы, вырожденные системы ОДУ. Вопросы терминологии и области приложений подробно обсуждаются в монографиях [1, 2].

Начало систематическому исследованию АДС было положено независимо друг от друга группами математиков в СССР и США, хотя отдельные результаты были получены значительно ранее [3, 4]. В начале восьмидесятых центры по изучению АДС возникли в Германии и в других странах, в частности в Швейцарии. За последние годы опубликованы сотни работ, посвященных качественной теории АДС и численным методам их решения (см. библиографию в книгах [1, 5]). Тем не менее некоторые теоретические вопросы остаются дискуссионными, что в полной мере относится к проблеме разрешимости существенно нелинейных АДС.

---

1) Термин «алгебраическое уравнение» понимается в данном случае в расширенном смысле: под алгебраическими подразумеваются любые конечные уравнения, а не только уравнения, задаваемые полиномами.

В работах математиков из США (см., например, [5–7]) для решения и исследования АДС широко используются *продолженные системы*. Под r-продолженной системой понимается совокупность АДС (1) и r ее полных производных по t:

$$\mathscr{F}_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} F(t,x,x') \\ \frac{d}{dt}F(t,x,x') \\ \dots \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^r F(t,x,x') \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

В теории АДС мерой неразрешенности системы относительно производной искомой вектор-функции служит целочисленная величина, называемая *индексом*. Сравнительный анализ различных определений индекса приведен, в частности, в книге [2].

Кэмпбелл сформулировал понятие индекса АДС, связанное с понятием r-продолженной системы [8]. Последняя рассматривается как конечномерная алгебраическая система с неизвестными $t \in \mathbf{R}$, $x, x', \dots, x^{(r+1)} \in \mathbf{R}^n$ в предположении, что начиная с некоторого натурального ρ из (3) при $\rho \le r$ можно выделить уравнение вида $x' + \psi(t,x) = 0$. При этом число ρ называется *дифференциальным индексом* системы (1). Показано, что при выполнении некоторых ограничений решения полученной системы являются решениями АДС (1).

В данной статье для обоснования процесса нормализации и получения результатов о разрешимости нелинейных АДС также используются продолженные системы. Введено понятие левого регуляризирующего оператора (ЛРО), действие которого преобразует АДС (1) к нормальному виду. Под *индексом неразрешенности* системы (1) понимается дифференциальный порядок ЛРО. Обоснованы условия существования решений нелинейных систем произвольно высокого индекса неразрешенности в предположениях, более общих по сравнению с результатами статей [7, 8]. В частности, удалось отказаться от постоянства ранга матрицы

$$\Gamma_r = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x''} & \dots & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x^{(r+1)}} \end{pmatrix}.$$

Понятие дифференциального индекса из [5–8] совпадает с определением индекса неразрешенности (см. ниже определение 2) в случае, когда матрица $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$ имеет постоянный ранг в области определения.

В монографии [9] рассмотрены многие аспекты качественной теории АДС. В частности, для квазилинейной автономной системы предлагается процедура последовательного понижения индекса АДС с помощью многообразий касательных пучков. Стабилизация процесса означает, что исходная АДС становится эквивалентной системе ОДУ в нормальной форме на некотором многообразии. Осуществление такой редукции требует на каждом шаге постоянства ранга матрицы при производной искомой функции на определенных многообразиях. Это ограничение значительно сужает класс рассматриваемых систем по сравнению с тем, который охватывается процедурами нормализации, предложенными в работах [5–8] или в данной статье.

Большое внимание АДС вида (1) индекса 1 и 2, а также численным методам их решения уделено в работах математиков Берлинской школы (см., в частности, [10–12]). При этом вводится свое определение индекса АДС (tractability index), опирающееся на применение различных проекторов. В частности, линейная система $A(t)x'(t) + B(t)x(t) + f(t) = 0$, $t \in T$, имеет tractability index 1, если матрица $A(t) + B(t)P(t)$ неособенна для любого $t \in T$, $P(t)$ — проектор на ядро матрицы $A(t)$. Понятие tractability index существенно у́же понятия дифференциального индекса, поскольку оно требует постоянства ранга матрицы $\partial F/\partial x'$. Если ранг матрицы $\partial F/\partial x'$ меняется, то даже в линейном случае определить tractability index, вообще говоря, невозможно, поскольку проектор на ядро этой матрицы (хотя бы непрерывный) не всегда существует. В качестве примера рассмотрим АДС [5]

$$\begin{pmatrix} 0 & w(t) \\ v(t) & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

в которой $f_1(t), f_2(t) \in \mathbf{C}^2(T)$; $v(t)$ и $w(t)$ выбираются в пространстве $\mathbf{C}^\infty(T)$ по правилу: $v(t) = 0$, если $w(t) \neq 0$. Функции $w(t)$ и $v(t)$ обращаются в нуль либо по очереди, либо одновременно, вследствие чего ранг матрицы при производной равен либо 0, либо 1 на различных подмножествах интервала T, причем структура этих подмножеств может быть выбрана сколь угодно сложной, вплоть до структуры множества Кантора. Tractability index для этой системы не существует, несмотря на то, что система имеет единственное решение

$$x(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) - w(t) f_2'(t) \\ f_2(t) - v(t) f_1'(t) \end{pmatrix}$$

и существует оператор, приводящий эту систему к разрешенному относительно производной виду (ЛРО)

$$\mathscr{L} = \begin{pmatrix} 1 & -w'(t) \\ -v'(t) & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} 0 & w(t) \\ v(t) & 0 \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^2.$$

В работе [13] для нормализации АДС вида (1) также привлекаются продолженные системы. Здесь уже не требуется, чтобы $\operatorname{rank} \partial F(t,\, x, x')/\partial x' =$ const, но основными ограничениями являются, в частности, предположения о том, что множество решений продолженной системы (3), понимаемой как система конечных уравнений с независимыми переменными $t, x, x', \dots,\ x^{(r+1)}$, представляет собой одно многообразие в пространстве $\mathbf{R}^{n(r+2)+1}$, а матрица $\Gamma_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)})$ имеет постоянный ранг на этом многообразии. Следует заметить, что это единственная известная автору работа по нелинейным системам высокого индекса, в которой не используется условие регулярности пары матриц $\partial F(t, x, x')/\partial x'$ и $\partial F(t, x, x')/\partial x$, т. е. предположения охватывают такие системы, у которых многообразие решений бесконечномерно.

Нетрудно построить пример, в котором таких многообразий несколько и ранг матрицы $\Gamma_r(t, x, x',\, \dots, x^{(r+1)})$ на различных многообразиях будет разным.

Пример 1. Рассмотрим однородную АДС индекса 1

$$F(x, x') = \begin{pmatrix} x_2 x_1' + x_1 \\ (x_2 - 1)x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T. \tag{4}$$

Построим одно дифференциальное продолжение

$$\frac{d}{dt} F(x, x') = \begin{pmatrix} x_2' x_1' + x_2 x_1'' + x_1' \\ 2x_2 x_2' - x_2' \end{pmatrix} = 0. \tag{5}$$

Найдем все решения 1-продолженной системы (4), (5), рассматривая ее в качестве алгебраической с неизвестными $x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2''$. Нетрудно убедиться, что все решения системы (4), (5) лежат на двух многообразиях пространства $\mathbf{R}^6$:

1) $x_1 = x_1' = 0$, $x_2 = x_2' = 0$;

2) $x_1 = x_1''$, $x_1' = -x_1''$, $x_2 = 1$, $x_2' = 0$, при этом значения x_1'' и x_2'' произвольны.

Матрица Γ_1 имеет вид $\Gamma_1(x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'') = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2'+1 & x_1' & x_2 & 0 \\ 0 & 2x_2-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Легко убедиться, что на первом из указанных многообразий ранг матрицы Γ_1 равен двум, а на втором — трем.

Предположения статьи [13] в общем случае не выполняются и для невырожденных систем вида (1) (т. е. когда $\partial F/\partial x' \neq 0$ для любых точек (t, x, x') из области определения функции F), если решения последней, рассматриваемой как система конечных уравнений с неизвестными t, x и x', лежат на различных многообразиях пространства $\mathbf{R}^{2n+1}$. Известный пример скалярного уравнения, все решения которого располагаются на двух различных многообразиях, можно найти в учебнике И. Г. Петровского [14, с. 88]:

$$(x'(t))^2 - 1 = 0, \quad t \in [0, 1).$$

Здесь любые начальные данные $x(0) = a$ порождают два многообразия решений: $x' = 1$, $x' = -1$.

Поскольку в данной статье начальная точка $(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$, удовлетворяющая r-продолженной системе (3), закреплена и все рассуждения проводятся в окрестности этой точки, такого рода проблемы вообще не возникают. Применение анализа, предлагаемого в статье, к системе (4) продемонстрировано ниже (см. пример 3). Указанное скалярное уравнение анализируется аналогично.

Для определения индекса АДС в [13] дано понятие *strangeness index*, являющееся одним из вариантов определения дифференциального индекса для нерегулярного случая, когда ранг матрицы

$$D_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x''} & \dots & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x^{(r+1)}} \end{pmatrix}$$

постоянен на всем множестве решений продолженной системы, но не является полным. Если же ранг матрицы D_r полный и все решения продолженной системы лежат на одном многообразии, то strangeness index совпадает с индексом неразрешенности, введенным ниже в определении 2.

2. Определения и обозначения. Функции $F(t, x, x')$ поставим в соответствие следующие объекты: квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Gamma_r = \Gamma_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} \partial F/\partial x' & O & \dots & O \\ \partial F'/\partial x' & \partial F'/\partial x'' & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial F^{(r)}/\partial x' & \partial F^{(r)}/\partial x'' & \dots & \partial F^{(r)}/\partial x^{(r+1)} \end{pmatrix}$$

и матрицу размера $n(r+1) \times n(r+2)$

$$D_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = \left(\begin{pmatrix} \partial F/\partial x \\ \partial F'/\partial x \\ \vdots \\ \partial F^{(r)}/\partial x \end{pmatrix}; \quad \Gamma_r \right).$$

Здесь $F^{(i)}(t, x(t), x'(t)) = \left(\frac{d}{dt}\right)^i F(t, x(t), x'(t))$, $i = \overline{0, r}$.

Обратимся к продолженной системе (3).

Определение 1. Начальные данные

$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

$x_0 \in \mathbf{R}^n : \|x_0 - \bar{x}\| < K_0$, назовем *согласованными* с системой (1) до некоторого порядка $r \geq 0$, если существует хотя бы одно решение $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, r+1}$, алгебраической системы

$$\mathscr{F}_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) = 0. \tag{7}$$

Будем говорить, что согласованные начальные данные *невырожденны*, если существует решение системы (7) такое, что

$$\mathrm{rank} D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) = n(r+1). \tag{8}$$

Определение 2. Оператор $\mathscr{L}$, действующий на n-мерную вектор-функцию $\Phi(t, x, x') \in \mathbf{C}^r(\mathscr{D})$[2)] по правилу

$$\mathscr{L}[\Phi] = L(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}, \Phi, \Phi', \dots, \Phi^{(r)}), \tag{9}$$

называется *левым регуляризирующим оператором* для системы (1) в области $\mathscr{U} = \mathscr{D} \times \widetilde{\mathscr{U}}$ ($\widetilde{\mathscr{U}} \subseteq \mathbf{R}^{nr}$) изменения переменных $t, x, x', \dots, x^{(r+1)}$, если

1) для любого $x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(T)$ такого, что $(t, x(t), x'(t)) \in \mathscr{D}$, выполняется равенство

$$\mathscr{L}[F(t, x(t), x'(t))] = x'(t) - \psi(t, x(t)); \tag{10}$$

2) n-мерная вектор-функция L имеет в области $\mathscr{U}$ непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов и обладает свойством

$$L(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}, 0, \dots, 0) = 0 \tag{11}$$

для любого $(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) \in \mathscr{U}$.

Наименьшее значение $r \geq 0$, при котором для (1) в $\mathscr{U}$ определен оператор $\mathscr{L}$, называется *индексом неразрешенности* относительно производных системы (1).

Определение 3. n-Мерную вектор-функцию $x(t) \in \mathbf{C}^1(\widetilde{T})$, $\widetilde{T} \subseteq T$, со свойствами $(t, x(t), x'(t)) \in \mathscr{D}$, $F(t, x(t), x'(t)) = 0$ $\forall t \in \widetilde{T}$ будем называть *решением* системы (1) на интервале $\widetilde{T}$.

Предположим, что матрица $A(t, x)$, $x \in \mathbf{R}^k$, определена в некоторой области $\widetilde{\mathscr{D}} = \{(t, x) : t \in T, \|x - x_0\| < K\} \subset \mathbf{R}^{k+1}$.

Определение 4. *Полуобратной* матрицей к $(m \times n)$-матрице $A(t, x)$, $(t, x) \in \widetilde{\mathscr{D}}$, называется $(n \times m)$-матрица, обозначаемая через $A^-(t, x)$ и удовлетворяющая в каждой точке $(t, x) \in \widetilde{\mathscr{D}}$ уравнению

$$A(t, x)A^-(t, x)A(t, x) = A(t, x).$$

Полуобратная матрица определена для любой матрицы $A(t, x)$, $(t, x) \in \widetilde{\mathscr{D}}$, т. е. последнее уравнение поточечно всегда разрешимо. Однако она может не обладать на $\widetilde{\mathscr{D}}$ гладкостью исходной матрицы.

Лемма 1. *Пусть* $A(t, x) \in \mathbf{C}^s(\widetilde{\mathscr{D}})$. *Для того чтобы в области* $\widetilde{\mathscr{D}}$ *существовала полуобратная матрица* $A^-(t, x) \in \mathbf{C}^s(\widetilde{\mathscr{D}})$, *достаточно, чтобы* $\mathrm{rank}\, A(t, x) = \mathrm{const}$ *для любого* $(t, x) \in \widetilde{\mathscr{D}}$.

Лемма является обобщением известного результата из монографии [1, с. 39] на случай нескольких переменных. Доказательство проводится в аналогичной технике и поэтому здесь опущено.

[2)] Запись $f(t, x) \in \mathbf{C}^s(\mathscr{D})$ означает, что функция f имеет в области $\mathscr{D}$ непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов до порядка s включительно.

3. Условия существования ЛРО. Допустим, что $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathscr{D})$ и начальные данные (6) таковы, что существует решение a_i, $i=\overline{1,r+1}$, системы (7), удовлетворяющее условию (8).

В сделанных предположениях выполняются все условия теоремы о неявной функции [15, с. 66]. По этой теореме из системы (3) в соответствующей области можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $\operatorname{colon}(x,x',\dots,x^{(r+1)})$ (обозначим их буквой ξ) как функции переменной t и остальных n компонент этого вектора (будем обозначать их через η), т. е.

$$\xi = \xi(t,\eta) \tag{12}$$

$\forall (t,\eta) \in \mathscr{W} = \{(t,\eta) : t \in [t_0, t_0+\varepsilon) \subset T, \|\eta-\eta_0\| < K_\eta\}$,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \dots \\ x^{(r+1)} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_{r+1} \end{pmatrix}; \tag{13}$$

$\xi,\xi_0 \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$, $\eta,\eta_0 \in \mathbf{R}^n$, P — матрица перестановок.

Поскольку матрица $D_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$ имеет размер $n(r+1)\times n(r+2)$, то в общем случае неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t_0,x_0,a_1,\dots, a_{r+1})$, в соответствии с которым определяются функции (12), неединствен. Будем искать этот минор следующим образом. В матрице $\Gamma_r(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$ выберем $s = \operatorname{rank}\Gamma_r(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$ ($s \le n(r+1)$) линейно независимых столбцов, в состав которых должно войти максимально возможное число первых n столбцов этой матрицы. Дополним эти столбцы $n(r+1)-s$ линейно независимыми столбцами вычисленной в точке $a=(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$ матрицы $\partial\mathscr{F}_r/\partial x$, которая представляет собой первые n столбцов матрицы $D_r(t_0,x_0,a_1, \dots,a_{r+1})$. Полученные $n(r+1)$ линейно независимых столбцов составят искомый минор. При этом $s \ge nr$.

Определение 5. Описанный выше неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $D_r(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$ назовем *разрешающим.*

Далее функции (12) будем считать соответствующими разрешающему минору.

Обозначим через $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$ матрицу, получающуюся при подстановке функций (12) в $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$.

Лемма 2. *Пусть* 1) *матрица* $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$ *определена и имеет* $k \ge 0$ *непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов в области* $\mathscr{W}$*;*

2) $\operatorname{rank}\overline{\Gamma}_r(t,\eta) = \text{const} \ \ \forall (t,\eta)\in\mathscr{W}$;

3) *система*

$$(X_0(t,\eta);X_1(t,\eta);\dots;X_r(t,\eta))\overline{\Gamma}(t,\eta) = (E_n;O_n;\dots;O_n) \tag{14}$$

поточечно разрешима в области $\mathscr{W}$, $X_i(t,\eta)$ — $(n\times n)$*-матрицы,* E_n — *единичная матрица порядка* n.

Тогда система (14) *имеет в области* $\mathscr{W}$ *решение* $X_i(t,\eta)\in\mathbf{C}^k(\mathscr{W})$.

Доказательство. По лемме 1 хотя бы одна из полуобратных к $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$ матриц будет обладать в $\mathscr{W}$ той же гладкостью, что и $\overline{\Gamma}(t,\eta)$. Обозначим ее через $\overline{\Gamma}_r^-(t,\eta)$. Несложно убедиться, что одно из решений системы (14) имеет вид [16, с. 14] $(X_0(t,\eta);X_1(t,\eta);\dots;X_r(t,\eta)) = (E_n;O_n;\dots;O_n)\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$, откуда следует справедливость утверждения леммы. □

Теорема 1. *Пусть* 1) $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathscr{D})$;

2) *начальные данные* (6) *согласованы с системой* (1) *до порядка* r *и невырожденны, т. е. существует решение* $a_i, i=\overline{1,r+1}$, *системы* (7), *удовлетворяющее условию* (8);

3) $\operatorname{rank}\overline{\Gamma}_r(t,\eta) = \mathrm{const}\ \forall (t,\eta) \in \mathscr{W}$;

4) *алгебраическая система* (14) *поточечно разрешима в области* $\mathscr{W}$.

Тогда из системы (3) *можно выразить как независимые переменные*

$$x' = \psi(t,x) \tag{15}$$

$\forall (t,x) \in \mathscr{V} = \{(t,x) : t \in [t_0, t_0+\bar{\varepsilon}), \bar{\varepsilon} \le \varepsilon; \|x - x_0\| < K_0\}$. *При этом* $\psi(t,x) \in \mathbf{C}^1(\mathscr{V})$.

Доказательство. Заметим, что матрица $\partial\mathscr{F}_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})/\partial x'$, представляющая собой первые n столбцов матрицы $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$, имеет в условиях теоремы полный ранг в некоторой окрестности $\mathscr{U}_a$ точки $a = (t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$. Действительно, если $\operatorname{rank}\partial\mathscr{F}_r/\partial x' < n$ в некоторой точке $(\bar{t}_0,\bar{x}_0,\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_{r+1}) \in \mathscr{U}_a$, то $\operatorname{rank}\partial\mathscr{F}_r/\partial x'|_{\xi=\xi(t,\eta)} < n$ в соответствующей точке $(\bar{t},\bar{\eta}) \in \mathscr{W}$. В связи с этим произведение

$$(X_0(t,\eta); X_1(t,\eta); \dots; X_r(t,\eta)) \frac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial x'}\bigg|_{\xi=\xi(t,\eta)}$$

в точке $(\bar{t},\bar{\eta})$ не может быть равным E_n ни при каких матрицах $X_i(t,\eta)$, $i=\overline{0,r}$, что противоречит условию 4 теоремы.

В силу сделанного замечания в разрешающий минор войдут все первые n столбцов матрицы $\Gamma_r(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$, поэтому

$$\xi = \begin{pmatrix} x' \\ y_1 \\ Y_1 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} y_2 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = Q_0 x, \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} x'' \\ \vdots \\ x^{(r+1)} \end{pmatrix},$$

Q_0 и Q_1 — матрицы перестановок. Векторы y_1, y_2, Y_1 и Y_2 имеют соответственно длины $n(r+1)-s$, $s-nr$, $s-n$ и $n(r+1)-s$.

В этих обозначениях функции (12) запишутся в виде

$$x' = g(t,y_2,Y_2), \quad Y_1 = g_1(t,y_2,Y_2), \quad y_1 = g_0(t,y_2,Y_2). \tag{16}$$

Подставим (16) в $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$, тем самым получим матрицу $\overline{\Gamma}_r(t,\eta) = \widehat{\Gamma}_r(t,y_2,Y_2)$.

Найдем матрицу Якоби системы (16) по переменным x', Y_1, Y_2:

$$G(t,y_2,Y_2) = \begin{pmatrix} E_n & O & -\partial g(t,y_2,Y_2)/\partial Y_2 \\ O & E_{s-n} & -\partial g_1(t,y_2,Y_2)/\partial Y_2 \\ O & O & -\partial g_0(t,y_2,Y_2)/\partial Y_2 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Согласно теореме о производной неявной функции [15, с. 73]

$$\begin{pmatrix} \partial y_1/\partial y_2 & \partial y_1/\partial Y_2 \\ \partial x'/\partial y_2 & \partial x'/\partial Y_2 \\ \partial Y_1/\partial y_2 & \partial Y_1/\partial Y_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial Y_1} \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial y_2} & \dfrac{\partial\mathscr{F}_r}{\partial Y_2} \end{pmatrix}.$$

Умножим матрицу

$$D_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial y_2} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial Y_1} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial Y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 & O & O \\ O & E_n & O \\ O & O & Q_1 \end{pmatrix}$$

слева на матрицу

$$I(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} O & E_n & O \\ O & O & E_{s-n} \\ E_{n(r+1)-s} & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial x'} & \dfrac{\partial \mathscr{F}_r}{\partial Y_1} \end{pmatrix}^{-1}.$$

С учетом предшествующего равенства будем иметь

$$\begin{aligned} &I(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})D_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) \\ &\quad= \begin{pmatrix} O & -\partial x'/\partial y_2 & E_n & O & -\partial x'/\partial Y_2 \\ O & -\partial Y_1/\partial y_2 & O & E_{s-n} & -\partial Y_1/\partial Y_2 \\ E_{n(r+1)-s} & -\partial y_1/\partial y_2 & O & O & -\partial y_1/\partial Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 & O & O \\ O & E_n & O \\ O & O & Q_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = D_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) \begin{pmatrix} O_n \\ E_{n(r+1)} \end{pmatrix}$, то

$$I(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = \begin{pmatrix} E_n & O & -\partial x'/\partial Y_2 \\ O & E_{s-n} & -\partial Y_1/\partial Y_2 \\ O & O & -\partial y_1/\partial Y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_1 \end{pmatrix}.$$

Подставим в полученное выражение функции (16) и затем умножим его справа на матрицу $\begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_1^{-1} \end{pmatrix}$, в результате придем к представлению для матрицы $G(t,y_2,Y_2)$:

$$G(t,y_2,Y_2) = H(t,y_2,Y_2)\widehat{\Gamma}_r(t,y_2,Y_2) \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_1^{-1} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где $H(t,y_2,Y_2) = I(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})|_{\xi=\xi(t,\eta)}$ — $(n(r+1)\times n(r+1))$-матрица, неособенная в каждой точке (t,y_2,Y_2) соответствующей области $\mathscr{Y}$ изменения этих переменных. Поскольку предположение 1 гарантирует, что матричнозначная функция $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$ будет иметь непрерывные частные производные по своим аргументам, а согласно теореме о производной неявной функции $\xi(t,\eta)\in \mathbf{C}^1(\mathscr{W})$, то $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)\in \mathbf{C}^1(\mathscr{W})$. Следовательно, матрицы $G(t,y_2,Y_2)$ и $H(t,y_2,Y_2)$ будут иметь по своим аргументам непрерывные частные производные в области $\mathscr{Y}$.

Из (18) получается представление

$$\overline{\Gamma}_r(t,\eta) = \widehat{\Gamma}_r(t,y_2,Y_2) = H^{-1}(t,y_2,Y_2)G(t,y_2,Y_2) \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 2 найдутся матрицы $X_i(t,\eta) = \widehat{X}_i(t,y_2,Y_2)$ $(i=\overline{0,r})$, удовлетворяющие при любом $(t,\eta)\in\mathscr{W}$ системе (14) и обладающие той же гладкостью, что и матрица $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$. Подставим в (14) выражение для матрицы $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$:

$$\begin{aligned} &(\widehat{X}_0(t,y_2,Y_2);\widehat{X}_1(t,y_2,Y_2);\dots;\widehat{X}_r(t,y_2,Y_2)) \\ &\qquad\times H^{-1}(t,y_2,Y_2)G(t,y_2,Y_2) \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & Q_1 \end{pmatrix} = (E_n;O_n;\dots;O_n). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} &(\widetilde{X}_0(t,y_2,Y_2);\widetilde{X}_1(t,y_2,Y_2);\dots;\widetilde{X}_r(t,y_2,Y_2)) \\ &\qquad= (\widehat{X}_0(t,y_2,Y_2);\widehat{X}_1(t,y_2,Y_2);\dots;\widehat{X}_r(t,y_2,Y_2))H^{-1}(t,y_2,Y_2). \end{aligned}$$

Тогда в области $\mathscr{Y}$ будет иметь место тождество

$$(\widetilde{X}_0(t,y_2,Y_2);\widetilde{X}_1(t,y_2,Y_2);\ldots;\widetilde{X}_r(t,y_2,Y_2))G(t,y_2,Y_2)=(E_n;O_n;\ldots;O_n). \quad (19)$$

В силу связи (18) предположение 3 теоремы влечет равенство

$$\operatorname{rank} G(t,y_2,Y_2)=\kappa=\mathrm{const} \quad \forall (t,y_2,Y_2)\in\mathscr{Y}, \quad (20)$$

которое гарантирует, что число s не может быть больше κ, так как при $s>\kappa$ ранг матрицы $G(t,y_2,Y_2)$ должен быть также больше κ. Поэтому $s\le\kappa$. С другой стороны, по построению

$$\operatorname{rank}\Gamma_r(t_0,x_0,a_1,\ldots,a_{r+1})\ge\operatorname{rank}\overline{\Gamma}_r(t_0,\eta_0)=\kappa.$$

Следовательно, $s=\kappa$.

Ввиду последнего обстоятельства из (20), а также из представления (17) для матрицы $G(t,y_2,Y_2)$ следует, что

$$\frac{\partial g_0(t,y_2,Y_2)}{\partial Y_2}=O \quad \forall (t,y_2,Y_2)\in\mathscr{Y}.$$

Но тогда в (16) функция $g(t,y_2,Y_2)$ не должна зависеть от переменной Y_2. В противном случае в области $\mathscr{Y}$ не существует матрицы $S(t,y_2,Y_2)$ такой, что

$$-\frac{\partial g(t,y_2,Y_2)}{\partial Y_2}-S(t,y_2,Y_2)\frac{\partial g_0(t,y_2,Y_2)}{\partial Y_2}\equiv O;$$

противоречие с тождеством (19). Таким образом, в (16) $x'=g(t,y_2)=\psi(t,x)$ $\forall (t,x)\in\mathscr{V}$. По построению $\psi(t,x)\in\mathbf{C}^1(\mathscr{V})$. $\square$

Предположения следующего утверждения обладают меньшей общностью, чем условия теоремы 1, но более просты для проверки.

Следствие 1. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 2 *теоремы* 1 *и, кроме того,*

1) $\operatorname{rank}\Gamma_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})=\mathrm{const}$ $\forall (t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})\in\mathscr{U}_a$, $\mathscr{U}_a$ — *некоторая окрестность точки* $a=(t_0,x_0,a_1,\ldots,a_{r+1})$;

2) *алгебраическая система*

$$(X_0;X_1;\ldots;X_r)\Gamma_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})=(E_n;O_n;\ldots;O_n) \quad (21)$$

имеет решение $X_i=X_i(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})$, $i=\overline{0,r}$, *в области* $\mathscr{U}_a$.

Тогда из системы (3) *можно выразить переменные* x' *в виде* (15) *для любых* $(t,x)\in\mathscr{V}$. *При этом в* (15) $\psi(t,x)\in\mathbf{C}^1(\mathscr{V})$.

Доказательство. Предположение 2 следствия гарантирует, что в разрешающий минор войдут все первые n столбцов матрицы $\Gamma_r(t_0,x_0,a_1,\ldots,a_{r+1})$. В этом случае функции (12) представляются в виде (16).

Матрица Якоби системы (16) по переменным x',y_2,Y_2 будет обладать формой (17). При этом, очевидно,

$$G(t,y_2,Y_2)=H(t,y_2,Y_2)\Gamma_r(t,x,x',\ldots,x^{(r+1)})\begin{pmatrix}E_n & O\\ O & Q_1^{-1}\end{pmatrix},$$

где $H(t,y_2,Y_2)$ — квадратная неособенная в области $\mathscr{Y}$ изменения переменных t,y_2,Y_2 — матрица порядка $n(r+1)$.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, можно показать, что $\frac{\partial g_0(t,y_2,Y_2)}{\partial Y_2}\equiv O$ в области $\mathscr{Y}$ в силу условия 1 следствия , откуда в соответствии с условием 2 в (16) $x'=g(t,y_2,Y_2)=g(t,y_2)=\psi(t,x)$ $\forall (t,x)\in\mathscr{V}$. Следствие доказано. $\square$

Установить разрешимость системы (14) или (21) можно, проверяя, например, выполнение условия Кронекера — Капелли или же требуя выполнения равенства $(E_n; O; \dots; O)(E_n - G_r^- G_r) = O$ в каждой точке соответствующей области ($\mathscr{W}$ или $\mathscr{U}_a$). Здесь G_r обозначает либо $\overline{\Gamma}_r(t,\eta)$, либо $\Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)})$ в зависимости от того, какое уравнение мы решаем: (14) или (21).

Теорема 1 позволяет получить необходимое и достаточное условие существования ЛРО для АДС (1).

Теорема 2. *Пусть* 1) $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathscr{D})$*;*

2) *начальные данные* (6) *согласованы с системой* (1) *до порядка* r *и невырожденны,* $a = (t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1}) \in \mathbf{R}^{n(r+2)+1}$ *— одно из решений системы* (7)*, удовлетворяющее условию* (8)*;*

3) $\operatorname{rank} \overline{\Gamma}(t,\eta) = \kappa = \mathrm{const}\ \forall (t,\eta) \in \mathscr{W}$.

Для того чтобы в некоторой окрестности $\mathscr{U}_a$ *точки* a *для системы* (1) *был определен* ЛРО $\mathscr{L}$ (9) *порядка* r *с функцией* L*, имеющей непрерывные частные производные по своим аргументам, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система* (14) *была поточечно разрешима в области* $\mathscr{W}$*.*

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 1.

Докажем необходимость. Пусть в $\mathscr{U}_a$ определен ЛРО (9), обладающий свойством (11). Тогда $\widetilde{T} = [t_0, t_0 + \epsilon) \subseteq T\ \forall x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\widetilde{T})$ и в области $\mathscr{U}_a$ имеет место равенство

$$L(t,x,x',\dots,x^{(r+1)},F,F',\dots,F^{(r)}) = x' - \psi(t,x). \tag{22}$$

Продифференцировав (22) по переменным $x', x'', \dots, x^{(r+1)}$, получим соотношение

$$(\partial L/\partial x'; \dots; \partial L/\partial x^{(r+1)}) + (\partial L/\partial F; \partial L/\partial F'; \dots; \partial L/\partial F^{(r)}) \\ \times \Gamma_r(t,x,x',\dots,x^{(r+1)}) = (E_n; O; \dots; O). \tag{23}$$

Предположение 2 теоремы позволяет получить связь (12), где $(\xi^T,\eta^T)^T \times (P^{-1})^T \in \mathscr{U}_a$. Подставив (12) в (23), получим

$$(\partial \overline{L}(t,\eta)/\partial F; \partial \overline{L}(t,\eta)/\partial F'; \dots; \partial \overline{L}(t,\eta)/\partial F^{(r)}) \overline{\Gamma}_r(t,\eta) = (E_n; O_n; \dots; O_n).$$

Таким образом, в качестве решения системы (14) можно взять матрицы

$$\frac{\partial \overline{L}(t,\eta)}{\partial F}; \ \frac{\partial \overline{L}(t,\eta)}{\partial F'}; \dots; \frac{\partial \overline{L}(t,\eta)}{\partial F^{(r)}}. \qquad \square$$

Сформулируем очевидное, но необходимое в дальнейшем утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{2r+1}(\mathscr{D})$ *и выполнены условия* 2, 3 *теоремы* 2. *Для того чтобы в* $\mathscr{U}_a$ *для системы* (1) *был определен* ЛРО (9) *с функцией* L*, обладающей непрерывными частными производными по каждому из своих аргументов до порядка* $r+1$ *включительно, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая система* (14) *была поточечно разрешима в области* $\mathscr{W}$*.*

Из следствия 1 вытекает еще один достаточный критерий существования ЛРО, охватывающий более узкий класс систем вида (1), чем сформулированный в теореме 2, но более конструктивный в смысле проверки.

Следствие 3. *Пусть в* АДС (1) $F(t,x,x') \in \mathbf{C}^{r+k}(\mathscr{D})$ *и, кроме того, имеют место предположение* 2 *теоремы* 1 *и условие* 1 *следствия* 1. *Если система* (21) *поточечно разрешима в области* $\mathscr{U}_a$*, то в* $\mathscr{U}_a$ *для системы* (1) *определен* ЛРО

$\mathscr{L}$ вида (9) с функцией L, имеющей k непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов.

Все изложенное выше не дает ответа на вопрос, как строить оператор $\mathscr{L}$. Но систему (15), получающуюся из (1) в результате действия этого оператора, можно найти способом, вытекающим из доказательства теоремы 1.

А именно, для заданных начальных данных (6) найдем решение системы (7), удовлетворяющее условию (8), определим в матрице $D_r(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ разрешающий минор и выразим из системы (3) компоненты $\xi \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$ вектора $\operatorname{colon}(x, x', \dots, x^{(r+1)})$, соответствующие этому минору, через t и компоненты $\eta \in \mathbf{R}^n$ в виде (12). Среди компонент функции (12) обязательно найдутся такие, которые имеют вид (15).

В качестве иллюстрации рассмотрим две системы [1, с. 169].

Пример 2. Несложные вычисления показывают, что следующие АДС:

$$F_1(t,x,x') = \begin{pmatrix} x_2x_1' + x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad F_2(t,x,x') = \begin{pmatrix} x_2x_2' + x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0, \tag{24}$$

имеют только тривиальное решение на произвольном интервале $T = [0, t_1)$. Для обеих систем определены ЛРО

$$\mathscr{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -x_1'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -x_1' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}, \quad \mathscr{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -x_2'' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -x_2' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt}$$

такие, что

$$\mathscr{L}_i[F_i(t,x(t),x'(t))] = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} \quad \forall x(t) \in \mathbf{C}^2(T),\ i = 1,2.$$

В обоих случаях $r = 1$, а в качестве решения уравнения (7), удовлетворяющего соотношению (8), можно взять вектор $a = (0,0,0)$. Так как ранг матрицы $\Gamma_1(t,x,x',x'')$ постоянен лишь для второй из АДС (24), то только для нее может быть использована теория, развиваемая в [5–8]. Условия же теоремы 2 имеют место для обеих систем.

Пример 3. Вернемся к примеру 1 из введения

$$F(x,x') = \begin{pmatrix} x_2x_1' + x_1 \\ (x_2 - 1)x_2 \end{pmatrix} = 0, \quad t \in T = [t_0, t_1).$$

Было показано, что соответствующая 1-продолженная система (4), (5) имеет два многообразия решений, на первом из которых

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1'' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

а на втором —

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & -x_1'' & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1'' & 1 & -x_1'' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Согласованными до первого порядка являются либо начальные данные вида $x_1(t_0) = x_2(t_0) = 0$, либо $x_1(t_0) = c$, $x_2(t_0) = 1$ $\forall c \in \mathbf{R}$, первые их которых принадлежат первому из многообразий, а вторые — второму. В силу того, что указанные матрицы D_1 полного ранга, эти начальные данные будут невырожденными. В качестве решений системы (4), (5) можно взять соответственно точки $a = (0,0,0,0,b_1,b_2)$ и $\tilde{a} = (c,1,-c,0,c,b_3)$ с произвольными $b_1, b_2, b_3 \in \mathbf{R}$.

С помощью несложных вычислений можно убедиться, что в окрестностях обеих точек a и $\tilde{a}$ выполняются условия теоремы 2. В разрешающий минор матрицы (25) войдут первые четыре столбца, а разрешающий минор матрицы (26) включает в себя столбцы со второго по пятый. Нетрудно найти неявные функции, соответствующие этим минорам: $x_1 = x_2 = x_1' = x_2' = 0$ и $x_2 = 1$, $x_1' = -x_1$, $x_2' = 0$, $x_1'' = x_1$. Поэтому системы, являющиеся результатом действия ЛРО, будут иметь соответственно вид

$$x_1'(t) = x_2'(t) = 0,\ t \in T, \quad x_1'(t) = -x_1(t),\ x_2'(t) = 0,\ t \in T.$$

Заметим, что решения этих систем являются решениями исходной АДС.

4. Существование решения.

Теорема 3. *Пусть* 1) $F(t, x, x') \in \mathbf{C}^{2r+1}(\mathscr{D})$;

2) *начальные данные* (6) *согласованы с системой* (1) *до порядка* $2r$ *и невырожденны, т. е. существует решение* $a_i \in \mathbf{R}^n$, $i = \overline{1, 2r+1}$, *алгебраической системы*

$$\mathscr{F}_{2r}(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{2r+1}) = 0 \tag{27}$$

такое, что $\operatorname{rank} D_{2r}(t_0, x_0, a_1, \dots, a_{2r+1}) = n(r+1)$;

3) $\operatorname{rank} \overline{\Gamma}_r(t, \eta) = \kappa = \mathrm{const}$ *в окрестности* $\mathscr{W}$ *точки* (t_0, η_0), *где* n*-мерный вектор* η_0 *является подвектором вектора* $\operatorname{colon}(x_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ (*см.* (13)), *входящего в упомянутое решение системы* (27);

4) *система* (14) *поточечно разрешима в области* $\mathscr{W}$.

Тогда на некотором интервале $T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon) \subseteq T$ *существует решение задачи* (1), (6).

Доказательство. В условиях теоремы выполняются все предположения следствия 2, согласно которому в некоторой окрестности $\mathscr{U}_a$ точки $a = (t_0, a_0, a_1, \dots, a_{r+1})$ (a_i, $i = \overline{1, r+1}$, — векторы, входящие в решение $2r$-продолженной системы (27)) для (1) определен ЛРО (9), в котором функция L имеет непрерывные частные производные до порядка $r+1$ по каждому из своих аргументов. Этот оператор преобразует (1) к виду (15), причем в (15) $\psi(t, x) \in \mathbf{C}^{r+1}(\widehat{\mathscr{V}})$, $\widehat{\mathscr{V}} = \{(t, x) : t \in [t_0, t_0 + \hat{\varepsilon}) \subset T,\ \|x - x_0\| < \widehat{K}_0 \le K_0\}$.

Решение $x_*(t)$ задачи (15), (6) определено и единственно на $[t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon})$, $0 < \tilde{\varepsilon} \le \hat{\varepsilon}$, и, кроме того, $x_*(t) \in \mathbf{C}^{r+2}([t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon}))$.

В сделанных предположениях справедлива теорема 1, из доказательства которой следует, что $(t_0, x_0, x_*'(t_0)) \in \mathscr{D}$. Сузим интервал $[t_0, t_0 + \tilde{\varepsilon})$ так, чтобы $(t, x_*(t), x_*'(t)) \in \mathscr{D}\ \forall t \in \widetilde{T} = [t_0, t_0 + \check{\varepsilon})$, $0 < \check{\varepsilon} \le \tilde{\varepsilon}$.

Подставим функцию $x_*(t)$ в уравнение (1):

$$F(t, x_*(t), x_*'(t)) = \delta(t), \quad t \in \widetilde{T}.$$

Заметим, что в условиях теоремы $\delta(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\widetilde{T})$, поэтому можно записать

$$\mathscr{F}_r\big(t, x_*(t), x_*'(t), \dots, x_*^{(r+1)}(t)\big) = \begin{pmatrix} F(t, x_*(t), x_*'(t)) \\ F'(t, x_*(t), x_*'(t)) \\ \dots \\ F^{(r)}(t, x_*(t), x_*'(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(t) \\ \delta'(t) \\ \dots \\ \delta^{(r)}(t) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $\delta(t) = 0\ \forall t \in T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon)$ при некотором $0 < \varepsilon \le \check{\varepsilon}$. Выполнение этого условия будет означать, что функция $x_*(t)$ является решением задачи (1), (6) на интервале T_ε.

Продифференцируем равенство (15) r раз:

$$x' - \psi(t, x) = 0,\ x'' - \psi_1(t, x, x') = 0, \dots, x^{(r+1)} - \psi_r(t, x, x', \dots, x^{(r)}) = 0. \tag{28}$$

Здесь $\psi_j(t,x,x',\dots,x^{(j)})=\psi^{(j)}(t,x)$, $i=\overline{1,r}$. Функция $x_*(t)$ обращает систему (28) в тождество на $\widetilde{T}$ и удовлетворяет условию (6).

В предположениях теоремы можем выразить из (3) компоненты $\xi\in\mathbf{R}^{n(r+1)}$ вектора $\operatorname{colon}(x,x',\dots,x^{(r+1)})$, соответствующие разрешающему минору матрицы $D_r(t_0,x_0,a_1,\dots,a_{r+1})$, как функции от t и остальных его компонент $\eta\in\mathbf{R}^n$ в виде (12). При этом согласно доказательству теоремы 1

$$\xi=\begin{pmatrix}x'\\ y_1\\ Y_1\end{pmatrix},\quad \eta=\begin{pmatrix}y_2\\ Y_2\end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=Q_0x$, $\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}x''\\ \vdots\\ x^{(r+1)}\end{pmatrix}$, Q_0 и Q_1 — матрицы перестановок.

В терминах переменных x',y_1,y_2,Y_1,Y_2 функция (12) записывается в виде

$$x'=\psi(t,x)=g(t,y_2),\quad y_1=g_0(t,y_2),\quad Y_1=g_1(t,y_2,Y_2). \tag{29}$$

Обозначим $\xi_*(t)=\begin{pmatrix}x'_*(t)\\ y_{*1}(t)\\ Y_{*1}(t)\end{pmatrix}$, $\eta_*(t)=\begin{pmatrix}y_{*2}(t)\\ Y_{*2}(t)\end{pmatrix}$, где

$$\begin{pmatrix}y_{*1}(t)\\ y_{*2}(t)\end{pmatrix}=Q_0x_*(t),\quad \begin{pmatrix}Y_{*1}(t)\\ Y_{*2}(t)\end{pmatrix}=Q_1\begin{pmatrix}x''_*(t)\\ \vdots\\ x_*^{(r+1)}(t)\end{pmatrix},$$

а $x_*(t)$ — решение задачи (15), (6).

Покажем, что вектор $\xi_*(t_0)$ удовлетворяет системе (3) при $t=t_0$.

Подставим функции (29) в последние nr уравнений $2r$-продолженной системы, а именно в уравнения $F^{(r+1)}(t,x,x')=0,\dots,F^{(2r)}(t,x,x')=0$. В результате получим систему

$$\widetilde{\mathscr{F}}(t,y_2,Y_2,Z_1,Z_2)=0, \tag{30}$$

в которой $\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\end{pmatrix}=Q_2\begin{pmatrix}x^{(r+2)}\\ \vdots\\ x^{(2r+1)}\end{pmatrix}$, Q_2 — матрица перестановок.

В условиях теоремы для $2r$-продолженной системы $\mathscr{F}_{2r}(t,x,x',\dots,x^{(2r+1)})=0$ выполняются все условия теоремы о неявной функции. Поэтому из системы (30) можно выразить nr компонент переменных y_2,Y_2,Z_1,Z_2, соответствующих разрешающему минору матрицы $(\partial\widetilde{\mathscr{F}}/\partial y_2;\partial\widetilde{\mathscr{F}}/\partial Y_2;\partial\widetilde{\mathscr{F}}/\partial Z_1;\partial\widetilde{\mathscr{F}}/\partial Z_2)$, как функции от t и остальных n компонент этих переменных

$$y_{2,1}=\phi_0(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2),\ Y_{2,1}=\phi_1(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2),\ Z_1=\phi_2(t,y_{2,2},Y_{2,2},Z_2), \tag{31}$$

где $\begin{pmatrix}y_{2,1}\\ y_{2,2}\end{pmatrix}=Q_3y_2$, $\begin{pmatrix}Y_{2,1}\\ Y_{2,2}\end{pmatrix}=Q_4Y_2$; Q_3, Q_4 — матрицы перестановок.

Обозначим

$$\bar{x}'=g(t_0,\bar{y}_2),\quad \bar{y}_1=g_0(t_0,\bar{y}_2),\quad \overline{Y}_1=g_1(t_0,\bar{y}_2,\overline{Y}_2); \tag{32}$$

$$\begin{gathered}\bar{y}_{2,1}=\phi_0(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2}(t_0),Z_2),\quad \overline{Y}_{2,1}=\phi_1(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2}(t_0),Z_2),\\ \overline{Z}_1=\phi_2(t_0,\bar{y}_{2,2},Y_{*2,2},Z_2).\end{gathered} \tag{33}$$

Здесь $\begin{pmatrix}\bar{y}_1\\ \bar{y}_2\end{pmatrix}=Q_0x_0$, x_0 — вектор начальных данных, $\begin{pmatrix}\bar{y}_{2,1}\\ \bar{y}_{2,2}\end{pmatrix}=Q_3\bar{y}_2$, $\overline{Y}_2=$

$\begin{pmatrix} \overline{Y}_{2,1} \\ Y_{*2,2}(t_0) \end{pmatrix}$, $Y_{*2,2}(t_0)$ находится из равенства $\begin{pmatrix} \overline{Y}_{*2,1}(t_0) \\ Y_{*2,2}(t_0) \end{pmatrix} = Q_4 Y_{*2}(t_0)$, где $Y_{*2}(t)$ включает в себя компоненты производных решения $x_*(t)$ задачи (15), (6). Поскольку векторы $y_{2,1}$, $Y_{2,1}$ и Z_1 в (31) соответствуют разрешающему минору некоторой матрицы Якоби, из уравнения $y_{2,1} = \phi_0(t, y_{2,2}, Y_{2,2}, Z_2)$ мы не можем выразить ни одной компоненты векторов $Y_{2,2}$ и Z_2. Следовательно, $\bar{y}_{2,1}$ в (33) не зависит от $Y_{*2,2}$ и Z_2: $\bar{y}_{2,1} = \phi_0(t_0, \bar{y}_{2,2})$.

Заметим, что формулы (32), в которых $\overline{Y}_2$ выбирается произвольным образом, описывают все решения уравнения (7) в указанной области.

С другой стороны, (28) представляет собой не что иное, как систему

$$
\begin{aligned}
&L(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}, F, F', \dots, F^{(r)}) = 0,\\
&L_1(t, x, x', \dots, x^{(r+2)}, F, F', \dots, F^{(r+1)})\\
&\quad = \frac{d}{dt} L(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}, F, F', \dots, F^{(r)}) = 0, \dots\\
&L_r(t, x, x', \dots, x^{(2r+1)}, F, F', \dots, F^{(2r)})\\
&\quad = \left(\frac{d}{dt}\right)^r L_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}, F, F', \dots, F^{(r)}) = 0,
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где L — функция (9), задающая ЛРО.

Пользуясь определением частных производных, нетрудно убедиться, что свойство (11) функции L обеспечивает наличие аналогичных свойств у функций $L_1, \dots, L_r$:

$$
L_i(t, x, x', \dots, x^{(r+1+i)}, 0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{35}
$$

По построению векторы (32), (33) удовлетворяют системе (27). Поэтому в силу свойств (35) эти векторы будут удовлетворять при $t = t_0$ системе (34) или, что то же, системе (28).

Структура системы (28) такова, что все производные $x', \dots, x^{(r+1)}$ можно выразить из (28) как функции переменных t и y_2. Другими словами, (28) эквивалентна системе

$$
x' = g(t, y_2), \quad Y_1 = h_1(t, y_2), \quad Y_{2,1} = h_{2,1}(t, y_2), \quad Y_{2,2} = h_{2,2}(t, y_2), \tag{36}
$$

записанной в терминах независимых переменных $x', y_2, Y_1, Y_{2,1}, Y_{2,2}$.

Выше было показано, что векторы $\bar{x}'$, $\bar{y}_1$, $\overline{Y}_1$ и $\overline{Y}_{2,1}$ удовлетворяют при $t = t_0$, $y_2 = \bar{y}_2$ и любом Z_2 первым трем уравнениям системы (36). Отсюда следует, что $\overline{Y}_{2,1}$ не зависит от Z_2: $\overline{Y}_{2,1} = \tilde{\phi}_1(t_0, \bar{y}_{2,2}, Y_{*2,2}(t_0))$ и $x'_*(t_0) = \bar{x}'$, $Y_{*1}(t_0) = \overline{Y}_1$, $Y_{*2,1}(t_0) = \overline{Y}_{2,1}$. Поскольку вектор начальных данных $x_*(t_0) = x_0$ согласован до порядка $2r$, для его компонент имеют место связи $\bar{y}_1 = g_0(t_0, \bar{y}_2)$, $\bar{y}_{2,1} = \phi_0(t_0, \bar{y}_{2,2})$.

Следовательно, вектор $\xi_*(t_0)$ удовлетворяет системе (3) при $t = t_0$. Последнее обстоятельство обеспечивает выполнение равенств

$$
\delta(t_0) = \delta'(t_0) = \dots = \delta^{(r)}(t_0) = 0. \tag{37}
$$

Подставим решение задачи (15), (6) $x_*(t)$ в уравнение (10), в результате получим систему ОДУ r-го порядка, неразрешенную относительно старшей производной неизвестной вектор-функции $\delta(t)$:

$$
L(t, x_*(t), x'_*(t), \dots, x_*^{(r+1)}(t), \delta(t), \delta'(t), \dots, \delta^{(r)}(t)) = 0, \quad t \in \widetilde{T}. \tag{38}
$$

В силу свойства ЛРО (11) уравнение (38) имеет на некотором интервале $T_\varepsilon = [t_0, t_0 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \le \check{\varepsilon}$, решение $\delta(t) = 0$, соответствующее начальным условиям (37). Покажем, что решение задачи (38), (37) на этом интервале единственно.

По определению ЛРО для любой функции $x(t) \in \mathbf{C}^{r+1}(\widetilde{T})$ такой, что $(t, x(t), x'(t)) \in \mathscr{D}\ \forall t \in \widetilde{T}$ на $\widetilde{T}$, имеет место тождество

$$L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(r+1)}(t), F, F', \dots, F^{(r)}) = x'(t) - \psi(t, x(t)),$$

в частности, и для функции $x_*(t)$. Рассматривая обе части этого равенства как функции независимых переменных $t, x, x', \dots, x^{(r+1)}$, найдем частные производные по $x', \dots, x^{(r+1)}$:

$$(\partial L/\partial x'; \partial L/\partial x''; \dots; \partial L/\partial x^{(r+1)}) \\ + (\partial L/\partial F; \partial L/\partial F'; \dots; \partial L/\partial F^{(r)})\Gamma_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = (E_n; O; \dots; O).$$

Подставим $x(t) = x_*(t)$ и $t = t_0$. Поскольку функция $x_*(t)$ удовлетворяет системе (3) при $t = t_0$, в силу свойства ЛРО (11) первое слагаемое в левой части обратится в нуль, поэтому получим

$$(\partial L(\gamma)/\partial F; \partial L(\gamma)/\partial F'; \dots; \partial L(\gamma)/\partial F^{(r)}) \\ \times \Gamma_r(t_0, x_*(t_0), x'_*(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0)) = (E_n; O; \dots; O),$$

где $\gamma = (t_0, x_*(t_0), x'_*(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0), 0, \dots, 0)$. Отсюда следует, что $(n \times n(r+1))$-матрица, являющаяся множителем при Γ_r, должна иметь полный ранг, т. е.

$$\operatorname{rank}(\partial L(\gamma)/\partial F; \partial L(\gamma)/\partial F'; \dots; \partial L(\gamma)/\partial F^{(r)}) = n. \tag{39}$$

С учетом (37) из (38) вытекает равенство

$$L(t_0, x_*(t_0), x'_*(t_0), \dots, x_*^{(r+1)}(t_0), \delta(t_0), \delta'(t_0), \dots, \delta^{(r)}(t_0)) = 0, \quad t \in \widetilde{T}.$$

Таким образом, для системы (38) выполняются все условия теоремы о неявной функции, в соответствии с которой в окрестности точки $(t_0, 0, \dots, 0)$ из системы (38) можно выразить n компонент вектора $\operatorname{colon}(\delta(t), \delta'(t), \dots, \delta^{(r)}(t))$ через остальные его компоненты и t:

$$\begin{pmatrix} \delta_{(1)}(t) \\ \delta'_{(2)}(t) \\ \vdots \\ \delta^{(r)}_{(r+1)}(t) \end{pmatrix} = \phi\big(t, \tilde{\delta}_{(1)}(t), \tilde{\delta}'_{(2)}(t),\ \dots, \tilde{\delta}^{(r)}_{(r+1)}(t)\big), \quad t \in T_\varepsilon,$$

где $\begin{pmatrix} \delta^{(i)}_{(j)}(t) \\ \tilde{\delta}^{(i)}_{(j)}(t) \end{pmatrix} = R_j \delta^{(i)}(t)$, $i = \overline{0, r}$, $j = \overline{1, r+1}$, R_j — матрицы перестановок. Нетрудно показать, что в матрице, фигурирующей в равенстве (39), найдется неособенный минор порядка n такой, что $\begin{pmatrix} \delta_{(1)}(t) \\ \delta_{(2)}(t) \\ \vdots \\ \delta_{(r+1)}(t) \end{pmatrix} = R\delta(t)$, R — матрица перестановок. С другой стороны, на интервале T_ε имеется другая неявная функция, удовлетворяющая уравнению (38) и условию (37):

$$\begin{pmatrix} \delta_{(1)}(t) \\ \delta'_{(2)}(t) \\ \vdots \\ \delta^{(r)}_{(r+1)}(t) \end{pmatrix} = 0. \tag{40}$$

Поскольку неявная функция в окрестности точки $(t_0, 0, \dots, 0)$ определяется единственным образом, то $\varphi\big(t, \tilde{\delta}_{(1)}(t), \tilde{\delta}'_{(2)}(t), \dots, \tilde{\delta}^{(r)}_{(r+1)}(t)\big) \equiv 0$.

Очевидно, что задача (40), (37), а следовательно, по построению и задача (38), (37) имеет на T_ε единственное решение $\delta(t) = 0$. □

Приведем еще один критерий существования решения для нелинейной АДС. Предположения, сформулированные ниже, обладают меньшей общностью, чем условия теоремы 3, но более конструктивны с точки зрения их проверки.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2 *теоремы* 3 *и, кроме того,*

1) *система* (21) *разрешима в некоторой окрестности* $\mathscr{U}_a$ *точки* a*;*

2) $\operatorname{rank}\Gamma_r(t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) = \mathrm{const} \quad \forall (t, x, x', \dots, x^{(r+1)}) \in \mathscr{U}_a$.

Тогда на некотором интервале $[t_0, t_0 + \varepsilon) \subset T$ *существует решение задачи* (1), (6).

Справедливость результата непосредственно вытекает из доказательства теоремы 3 и следствия 3.

Пример 4. Рассмотрим нелинейную АДС

$$(x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1 - e^t = 0, \quad (x_1')^2 - (x_2')^2 + x_2 - e^t = 0, \quad t \in [0, 1),$$

для нормализации которой не могут быть использованы процедуры, предлагаемые в [5–9], поскольку в этих работах предположение о постоянстве ранга матрицы Γ_r либо оговаривается явно, либо обеспечивается еще более жесткими предположениями относительно рангов матриц $\partial F(t, x, x')/\partial x$ и $\partial F(t, x, x')/\partial x'$.

Заметим, что эта система имеет единственное решение $x_1(t) = x_2(t) = e^t$. Найдем систему, являющуюся результатом действия ЛРО.

Построим 2-продолженную систему

$$\begin{gathered}
(x_1')^2 - (x_2')^2 + x_1 - e^t = 0, \quad (x_1')^2 - (x_2')^2 + x_2 - e^t = 0,\\
2x_1'x_1'' - 2x_2'x_2'' + x_1' - e^t = 0, \quad 2x_1'x_1'' - 2x_2'x_2'' + x_2' - e^t = 0,\\
2(x_1'')^2 + 2x_1'x_1''' - 2(x_2'')^2 - 2x_2'x_2''' + x_1'' - e^t = 0,\\
2(x_1'')^2 + 2x_1'x_1''' - 2(x_2'')^2 - 2x_2'x_2''' + x_2'' - e^t = 0, \quad t \in [0, 1),
\end{gathered} \tag{41}$$

которую будем рассматривать как алгебраическую с независимыми переменными t, x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', x_1''', x_2'''. Легко увидеть, что любое решение системы (41) удовлетворяет связям $x_1 = x_2$, $x_1' = x_2'$, $x_1'' = x_2''$, причем x_1, x_2, x_1', x_2' при фиксированном $t \in [0, 1)$ найдутся единственным образом. В частности, в качестве решения при $t = 0$ можно взять следующие значения:

$$x_1 = x_2 = 1, \quad x_1' = x_2' = 1, \quad x_1'' = x_2'' = 3, \quad x_1''' = 0, \quad x_2''' = 1.$$

Обозначим $a = (t_0, x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_2'', x_1''', x_2''') = (0, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 0, 1)$. Выпишем матрицы $D_2(t, x, x', x'', x''')$ и $\Gamma_2(t, x, x', x'', x''')$:

$$D_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \Gamma_2 \\ \hline 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2x_1' & -2x_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2x_1' & -2x_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + 2x_1'' & -2x_2'' & 2x_1' & -2x_2' & 0 & 0 \\ 2x_1'' & 1 - 2x_2'' & 2x_1' & -2x_2' & 0 & 0 \\ \hline 2x_1''' & -2x_2''' & 1 + 4x_1'' & -4x_2'' & 2x_1' & -2x_2' \\ 2x_1''' & -2x_2''' & 4x_1'' & 1 - 4x_2'' & 2x_1' & -2x_2' \end{array}\right).$$

Нетрудно убедиться, что существует окрестность точки a, в пределах которой ранг матрицы Γ_2 меняется: $\operatorname{rank}\Gamma_2 = 5$, если $x_1' \neq x_2'$, а в случае, например, когда $x_1' = x_2'$, $x_1'' = x_2''$, будет $\operatorname{rank}\Gamma_2 = 4$.

Найдем разрешающий минор. В матрице

$$\Gamma_2(a) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & -6 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 13 & -12 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 12 & -11 & 2 & -2 \end{array}\right), \qquad \operatorname{rank}\Gamma_2(a) = 4,$$

линейно независимыми являются первые четыре столбца либо первые три и пятый. Правомерен любой из вариантов, остановимся на втором.

Дополним выбранные столбцы двумя первыми столбцами матрицы:

$$D_2(a) = \left(\begin{array}{cc|cc|c:c:c:c} 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 7 & -6 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 13 & -12 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 12 & -11 & 2 & -2 \end{array}\right), \quad \operatorname{rank} D_2(a) = 6,$$

тем самым получим разрешающий минор, выделенный пунктиром. В соответствии с этим неособенным минором мы можем найти неявную функцию $\xi = \xi(t, \eta)$, удовлетворяющую системе (41), при этом

$$\xi = \operatorname{colon}\{x_1, x_2, x_1', x_2', x_1'', x_1'''\}, \quad \eta = \operatorname{colon}\{x_2'', x_2'''\}.$$

А именно,

$$x_1' = e^t, \quad x_2' = e^t, \quad x_1 = e^t, \quad x_2 = e^t, \quad x_1'' = x_2'', \quad x_1''' = \frac{1}{2} - \frac{x_2''}{2e^t} + x_2'''. \tag{42}$$

Первая пара уравнений представляет собой результат действия на АДС (41) ЛРО, а вторая пара описывает многообразие решений этой системы. Заметим, что функции $x_1(t) = x_2(t) = e^t$ являются не только решением системы (42), удовлетворяющим начальному условию $x_1(0) = x_2(0) = 1$, но также и единственным решением системы (41).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В. Ф.* Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996.
2. *Чистяков В. Ф., Щеглова А. А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. Новосибирск: Сибирская издательская фирма РАН «Наука», 2003.
3. *Лузин Н. Н.* К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 1940. № 5. С. 4–66.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
5. *Brenan K. E., Campbell S. L., Petzold L. R.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. Philadelphia: SIAM, 1996. (Classics Appl. Math.; 14).
6. *Campbell S. L.* Non-BDF methods for the solution of linear time varying implicit differential equations // Proc. Amer. Contr. Conf. San Diego, California, 5–6 June 1984. San Diego, Calif., 1984. V. 3. P. 1315–1318.
7. *Campbell S. L.* Uniqueness of completions for linear time varying differential algebraic equations // Linear Algebra Appl. 1992. V. 161. P. 55–67.
8. *Campbell S. L., Griepentrog E.* Solvability of general differential algebraic equations // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1995. V. 2, N 16. P. 257–270.
9. *Rabier P. J., Rheinboldt W. C.* Theoretical and numerical analysis of differential-algebraic equations. Amsterdam: Elsevier Science, 2002. (Handbook of Numerical Analysis; V. VIII).

10. *Maerz R., Tischendorf C.* Recent results in solving index-2 differential algebraic equations in circuit simulation // SIAM J. Sci. Comput. 1997. V. 18, N 1. P. 139–159.
11. *Maerz R.* Differential algebraic systems with properly stated leading term and MNA equations. Berlin, 2002. (Preprint / Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin; N 13).
12. *Griepentrog E., Maerz R.* Differential-algebraic equations and their numerical treatment. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlag gesellschaft, 1986.
13. *Kunkel P., Mehrmann V.* Regular solutions of nonlinear differential-algebraic equations and their numerical determination // Numer. Math. 1998. V. 79, N 4. P. 581–600.
14. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
15. *Шилов Г. Е.* Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). М.: Наука, 1972. Т. 1–2.
16. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1998.

Статья поступила 27 октября 2005 г.

Щеглова Алла Аркадьевна
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
shchegl@icc.ru