Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 512.56

О РЕШЕТКАХ, ВЛОЖИМЫХ В РЕШЕТКИ ПОДПОЛУГРУПП. V. ДЕРЕВЬЯ

М. В. Семёнова

Аннотация: Показано, что класс конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток, являющихся (n-арными) деревьями, аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток и поэтому образует псевдомногообразие.

Ключевые слова: полурешетка, решетка подполурешеток, многообразие, дерево.

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением [1–4].

Пусть $\mathscr{S}$ — класс решеток, изоморфных решеткам подполурешеток полурешеток и $\mathscr{T}$ — класс решеток, изоморфных решеткам подполурешеток, являющихся деревьями. Напомним, что полурешетка $\langle T, \wedge\rangle$ является *деревом*, если множество $\downarrow a$ образует цепь для любого $a \in T$. Классы $\mathscr{S}$ и $\mathscr{T}$ изучались несколькими авторами. Оказывается, что решетка $\operatorname{CSub} S$ выпуклых подполурешеток полурешетки S *полудистрибутивна вверх*, т. е. удовлетворяет квазитождеству

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\ (x \vee y = x \vee z \to x \vee y = x \vee (y \wedge z))$$

тогда и только тогда, когда S является деревом. Этот факт был независимо установлен в работах К. В. Адаричевой [5], Л. Либкина и В. Гурвича [6], Чеонг и Джоунса [7]. Отсюда и из предложения 3.1 в [8] следует, что полурешетка S — дерево в том и только том случае, когда решетка $\operatorname{CSub} S$ является решеткой замыканий выпуклой геометрии. Напомним, что *выпуклой геометрией* называется пространство замыкания (X, φ), имеющее *свойство антизамены*:

$$a \in \varphi(Y \cup \{b\}) \backslash \varphi(Y), \quad a \neq b \text{ влечет } b \notin \varphi(Y \cup \{a\})$$

для любых a, $b \in X$ и любого $Y \subseteq X$. Последний результат в явном виде сформулирован в работах [6, 7].

В. Б. Репницкий показал в [9], что класс $\mathbf{S}(\mathscr{S})$ решеток, изоморфных подрешеткам решеток подполурешеток полурешеток, совпадает с классом всех решеток. К. В. Адаричева [10] и В. Б. Репницкий [11] независимо показали, что конечная решетка принадлежит классу $\mathbf{S}(\mathscr{S})$ тогда и только тогда, когда она ограничена снизу. Кроме того, К. В. Адаричева в [12] дала некоторое (довольно сложное) описание конечных решеток из класса $\mathscr{S}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАС (грант 03–51–4110), совместного гранта РФФИ и Немецкого научного общества 06–01–04002–ННИО_а, гранта «Ведущие научные школы РФ» (код проекта НШ–4413.2006.1), гранта Президента РФ для поддержки молодых кандидатов наук (МК–3988.2007.1) и молодежного проекта СО РАН (№ 11).

В связи с отмеченными результатами возникают следующие проблемы.

(1) *Описать класс* $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ *решеток, вложимых в решетки подполурешеток деревьев.*

(2) *Описать класс* $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$ *конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток деревьев.*

В настоящей работе мы указываем несколько нетривиальных решеточных тождеств, выполняющихся на решетках подполурешеток деревьев. В частности, из выполнимости этих тождеств на решетках подполурешеток деревьев вытекает, что $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ является собственным подклассом в $\mathbf{S}(\mathscr{S})$ (см. следствие 3.8). Более того, оказывается, что эти тождества аксиоматизируют класс $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$ в классе конечных решеток (см. следствие 7.3), что дает синтаксическое описание класса $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$. Однако мы не знаем, аксиоматизируют ли эти тождества класс $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ (см. проблему 2).

Определения всех понятий, используемых здесь, могут быть найдены в монографии [13], а также в [1–4].

§ 2. Основные понятия

Пусть L — решетка и $a, a_0, \dots, a_{n-1} \in L$. Будем говорить, что нетривиальное покрытие $a \leq a_0 \vee \dots \vee a_{n-1}$ *минимально в* a_i, где $i < n$, если $a \nleq a_0 \vee \dots \vee a_{i-1} \vee x \vee a_{i+1} \vee \dots \vee a_{n-1}$ для любого $x < a_i$. Покрытие $a \leq \bigvee X$ *минимально*, если $a \leq \bigvee Y$ и $Y \ll X$ влечет $X \subseteq Y$ для любого $Y \in \mathscr{C}(a)$. В частности, если покрытие $a \leq \bigvee X$ минимально, то оно минимально в каждом $x \in X$. Через $\mathscr{M}(a)$ будем обозначать множество всех минимальных покрытий для $a \in L$. Полагаем $\mathscr{M}_\Sigma(a) = \mathscr{M}(a) \cap \mathscr{P}(\Sigma)$ для любого $\Sigma \subseteq L$.

Пусть $\Sigma \subseteq L$. Следующее определение введено в работе [14]. Решетка L имеет *слабое свойство* Σ*-минимальности*, если для каждого элемента $p \in \Sigma$ любое нетривиальное покрытие p утончается до некоторого покрытия из $\mathscr{M}_\Sigma(p)$. Говорят, что решетка L имеет *свойство* Σ*-минимальности*, если она имеет слабое свойство Σ-минимальности, и, кроме того, множество $\mathscr{M}_\Sigma(p)$ конечно для любого $p \in \Sigma$. В частности, L имеет *свойство минимальности*, если она имеет свойство L-минимальности. Отметим, что для любого $a \in L$ каждое покрытие из $\mathscr{M}_\Sigma(a)$ является антицепью в $\Sigma \cap \mathrm{J}(L)$.

Обозначим через $D_0(L)$ множество *простых элементов* в L, т. е. элементов, не имеющих нетривиальных покрытий, через $J(L)$ — множество неразложимых элементов в L. Если a, $b \in J(L)$, то будем говорить, что a D-*зависит от* b, и писать $a \,\mathrm{D}\, b$, если b принадлежит некоторому минимальному покрытию a. D-*последовательностью* мы называем такую последовательность $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$, $n \in \omega$, неразложимых элементов, что $a_i \,\mathrm{D}\, a_{i+1}$ для любого $i < n$. D-последовательность $\langle a_0, \dots, a_n \rangle$ называется D-*циклом*, если вдобавок верно $a_n \,\mathrm{D}\, a_0$.

Пусть $\mathrm{At}(L)$ обозначает множество *атомов* в L, т. е. $\mathrm{At}(L) = \{x \in L \mid 0 \prec x\}$. Очевидно, $\mathrm{At}(L) \subseteq \mathrm{J}(L)$. Говорят, что решетка L *точечная*, если $\mathrm{At}(L)$ $\vee$-порождает L. Будем говорить, что решетка L *биатомная*, если для любого $a \in \mathrm{At}(L)$ и любых x, $y \in L$ неравенство $a \leq x \vee y$ влечет существование атомов $b, c \in \mathrm{At}(L)$ таких, что $b \leq x$, $c \leq y$ и $a \leq b \vee c$.

Для полурешетки S и для подполурешеток S_0, $S_1 \in \operatorname{Sub} S$ через $S_0 + S_1$ обозначаем подполурешетку в S, порожденную множеством $S_0 \cup S_1$.

Согласно [15] решетка L 2-*дистрибутивна*, если L удовлетворяет следующему тождеству 2-*дистрибутивности*:

$$a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = (a \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee (a \wedge (a_1 \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_2)).$$

Лемма 2.1. *Пусть L — решетка, $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$ и $p \in \Sigma$. Пусть $T \subseteq L$ и $p \leq \bigvee T$ — нетривиальное покрытие.*

(i) *Если решетка L 2-дистрибутивна и имеет слабое свойство Σ-минимальности, то найдется $\{q, r\} \in \mathscr{M}_\Sigma(p)$ такое, что $\{q, r\} \ll T$.*

(ii) *Если $\Sigma = \mathrm{At}(L)$ и решетка L 2-дистрибутивна и биатомна, то найдется $\{q, r\} \in \mathscr{M}_\Sigma(p)$ такое, что $\{q, r\} \ll T$.*

Доказательство. Утверждение (i) есть содержание леммы 3.2 из [16]. Докажем (ii). Пусть $T = \{t, t'\}$. Тогда $p \nleq t, t'$. Так как L биатомна, существуют $q, r \in \mathrm{At}(L)$ такие, что $q \leq t$, $r \leq t'$ и $p \leq q \vee r$, откуда $\{q, r\} \in \mathscr{M}_\Sigma(p)$. □

Отметим также следующие свойства решеток подполурешеток. Заметим, что свойство (ii) установлено впервые в работе [10].

Лемма 2.2. *Пусть S — полурешетка. Имеют место следующие утверждения.*

(i) *Множество $\mathrm{At}(\mathrm{Sub}\, S)$ $\vee$-порождает решетку $\mathrm{Sub}\, S$.*

(ii) *Решетка $\mathrm{Sub}\, S$ биатомна.*

(iii) *Решетка $\mathrm{Sub}\, S$ имеет слабое свойство $\mathrm{At}(\mathrm{Sub}\, S)$-минимальности.*

Доказательство. Полагаем $\Sigma = \mathrm{At}(\mathrm{Sub}\, S) = \{\{a\} \mid a \in S\} = \mathrm{J}(\mathrm{Sub}\, S)$. Множество Σ, очевидно, $\vee$-порождает решетку $\mathrm{Sub}\, S$, откуда следует (i).

Если $\{a\} \leq S_0 + S_1$ в $\mathrm{Sub}\, S$, то либо $a \in S_0 \cup S_1$, либо $a = a_0 \wedge a_1$ для некоторых $a_0 \in S_0$ и $a_1 \in S_1$. В любом случае найдутся атомы $\{a_i\} \leq S_i$, $i < 2$, такие, что $\{a\} \leq \{a_0\} + \{a_1\}$, откуда вытекает биатомность решетки $\mathrm{Sub}\, S$.

Предположим, что покрытие $\{a\} \leq S_0 + \cdots + S_k$ нетривиально для некоторого $a \in S$ и некоторых $S_0, \ldots, S_k \in \mathrm{Sub}\, S$. Это означает, что $a \in S_0 + \cdots + S_k$ и $a \notin S_0 \cup \cdots \cup S_k$. Поэтому существуют элементы $a_0, \ldots, a_n \in S_0 \cup \cdots \cup S_k$ такие, что $a = a_0 \wedge \cdots \wedge a_n \in S$. Выберем минимальное подмножество A в $\{a_0, \ldots, a_n\}$ с условием $a = \bigwedge A$. Тогда покрытие $\{\{x\} \mid x \in A\}$ принадлежит $\mathscr{M}_\Sigma(\{a\})$ и утончает исходное покрытие $\{S_0, \ldots, S_k\}$. Таким образом, решетка $\mathrm{Sub}\, S$ имеет слабое свойство Σ-минимальности. □

§ 3. Тождества ($\mathbf{T}_n$)

Для положительного натурального числа $n < \omega$ определим по индукции решеточные термы $U_{i,n}$ (где $0 \leq i \leq n$) и $V_{i,j,n}$, $W_{i,j,n}$ (где $0 \leq j \leq i < n$) от переменных $x_0, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$ следующим образом:

$$U_{n,n} = x_n; \quad U_{i,n} = x_i \wedge (U_{i+1,n} \vee x'_{i+1}),\ 0 \leq i < n;$$

$$V_{i,i,n} = x_i \wedge U_{i+1,n},\ 0 \leq i < n; \quad W_{i,i,n} = x_i \wedge x'_{i+1},\ 0 \leq i < n;$$

$$V_{i,j,n} = x_j \wedge (V_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \quad 0 \leq j < i < n;$$

$$W_{i,j,n} = x_j \wedge (W_{i,j+1,n} \vee x'_{j+1}), \quad 0 \leq j < i < n.$$

Мы также полагаем $U_n = U_{0,n}$; $V_{i,n} = V_{i,0,n}$, $0 \leq i < n$; $W_{i,n} = W_{i,0,n}$, $0 \leq i < n$.

Доказательство следующей леммы непосредственно вытекает из определений.

Лемма 3.1. *Пусть $n > 0$. Следующие неравенства выполняются в любой решетке:*

(i) $V_{i,j,n} \le U_{j,n}$ *и* $W_{i,j,n} \le U_{j,n}$ *для любых* $0 \le j < i < n$;

(ii) $V_{i,n} \le U_n$ *и* $W_{i,n} \le U_n$ *для любого* $0 \le i < n$.

Мы часто будем использовать следующие обозначения: $\mathbf{x} = \langle x_0, \dots, x_n\rangle$; $\mathbf{x}' = \langle x'_1, \dots, x'_n\rangle$. Пусть $0 < n < \omega$. Рассмотрим тождество от переменных $\langle x_0, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n\rangle$, которое будем обозначать через (T_n)

$$U_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \bigvee_{i<n} V_{i,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \vee \bigvee_{i<n} W_{i,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \vee \Big(U_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \wedge \bigwedge_{1<i\le n} (x'_1 \vee U_{i,n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \wedge \bigwedge_{1<i\le n} (x'_1 \vee x'_i)\Big).$$

Нетрудно видеть, что тождество (T_1) имеет вид $U_1 = U_1$ и поэтому тривиально.

Лемма 3.2. *Тождество* (T_2) *влечет тождество* 2*-дистрибутивности.*

Доказательство. В тождестве (T_2) положим $x_0 = a$, $x_1 = a_0 \vee a_1$, $x_2 = a_0$, $x'_1 = a_2$ и $x'_2 = a_1$. Тогда левая часть $(\mathrm{T}_{1,0})$ равна

$$U_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = a \wedge (((a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee a_2) = a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2),$$

в то время как правая часть равна

$$\begin{aligned} &V_{0,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \vee V_{1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \vee W_{0,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \vee W_{1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ &\qquad \vee (a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) \wedge (a_2 \vee U_{2,2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \wedge (a_2 \vee a_1)) \\ &= (a \wedge (a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee (a \wedge (((a_0 \vee a_1) \wedge a_0) \vee a_2)) \vee (a \wedge a_2) \\ &\qquad \vee (a \wedge (((a_0 \vee a_1) \wedge a_1) \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) \wedge (a_2 \vee a_0) \wedge (a_2 \vee a_1)) \\ &= (a \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_2)) \vee (a \wedge a_2) \vee (a \wedge (a_1 \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_2) \wedge (a_2 \vee a_1)) \\ &= (a \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee (a \wedge (a_1 \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_2)), \end{aligned}$$

откуда и следует 2-дистрибутивность. □

Предложение 3.3. *Пусть $0 < n < \omega$. Пусть L — решетка и $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Рассмотрим следующие утверждения о L и Σ.*

(i) *L удовлетворяет тождеству* (T_n).

(ii) *Для любых элементов $a_0, \dots, a_n \in \Sigma$ и $a'_1, \dots, a'_n \in L$ если $a_i \le a_{i+1} \vee a'_{i+1}$ является нетривиальным покрытием, минимальным в a_{i+1}, для каждого $i < n$, то $a_0 \le a'_1 \vee a_i$ для всех $i \le n$; $a_0 \le a'_1 \vee a'_i$ для всех $1 < i \le n$.*

Тогда (i) *влечет* (ii). *Если L является* 2*-дистрибутивной и имеет слабое свойство Σ-минимальности, а Σ $\vee$-порождает L, то* (ii) *влечет* (i). *Если* $\Sigma = \mathrm{At}(L)$ *и L является точечной и биатомной, то* (ii) *влечет* (i).

Доказательство. Покажем сначала, что (i) влечет (ii). Предположим, что элементы $a_0, \dots, a_n \in \Sigma$, $a'_1, \dots, a'_n \in L$ удовлетворяют всем условиям (ii). Заметим, что $U_{i,n}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = a_i$ для всех $i \le n$. В частности, $U_n(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = a_0$; $V_{i,i,n}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = a_i \wedge a_{i+1}$; $W_{i,i,n}(\mathbf{a}, \mathbf{a}') = a_i \wedge a'_{i+1}$. Если решетка L удовлетворяет тождеству (T_n), то после подстановки вместо переменных элементов $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}'\rangle$ правая часть тождества (T_n) равна a_0.

Элемент a_0 неразложим. Таким образом, возможны следующие случаи.

Случай 1. $a_0 = V_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = V_{i,0,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ для некоторого $i < n$. Индукцией по j покажем, что $a_j = V_{i,j,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ для всех $j \le i$. Действительно, предположим, что $a_j = V_{i,j,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le V_{i,j+1,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \vee a'_{j+1}$ для некоторого $j < i$. Поскольку $V_{i,j+1,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le U_{j+1,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = a_{j+1}$ по лемме 3.1(i) и покрытие $a_j \le a_{j+1} \vee a'_{j+1}$ минимально в a_{j+1}, получаем требуемое утверждение: $a_{j+1} = V_{i,j+1,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$. В частности, $a_i = V_{i,i,m}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = a_i \wedge a_{i+1} \le a_{i+1}$, что противоречит выбору покрытия $a_i \le a_{i+1} \vee a'_{i+1}$. Значит, этот случай невозможен.

Случай 2. $a_0 = W_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = W_{i,0,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ для некоторого $i < n$. Этот случай рассматривается так же, как и случай 1.

Случай 3. $a_0 = (U_n(\mathbf{a},\mathbf{a}') \wedge \bigwedge\limits_{1<i\le n}(a'_1 \vee U_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')) \wedge \bigwedge\limits_{1<i\le n}(a'_1 \vee a'_i)) = a_0 \wedge \bigwedge\limits_{1<i\le n}(a'_1 \vee a_i) \wedge \bigwedge\limits_{1<i\le n}(a'_1 \vee a'_i) \le (a'_1 \vee a_i) \wedge (a'_1 \vee a'_i)$ для любого $1 < i \le n$.

Таким образом, верно заключение (ii).

Предположим теперь, что решетка L является 2-дистрибутивной, имеет слабое свойство Σ-минимальности, а Σ $\vee$-порождает L (либо $\Sigma = \mathrm{At}(L)$ и L является точечной и биатомной). По лемме 2.1 для любого $p \in \Sigma$ любое нетривиальное покрытие $p \le q \vee r$ утончается до покрытия из $\mathscr{M}_\Sigma(p)$, содержащего два элемента. Покажем, что (ii) влечет (i). Согласно лемме 3.1 достаточно установить, что левая часть тождества (T_n) меньше либо равна его правой части. Пусть a — значение правой части (T_n) после подстановки вместо переменных элементов $\langle \mathbf{a},\mathbf{a}'\rangle$, где $a_0,\dots a_n,\ a'_1,\dots,a_n \in L$. Пусть $p_0 \in \Sigma$ удовлетворяет условию

$$p_0 \le U_n(\mathbf{a},\mathbf{a}') = U_{0,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = a_0 \wedge (U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \vee a'_1).$$

Имеем $p_0 \le a_0$ и $p_0 \le U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \vee a'_1$. Если $p_0 \le U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$, то $p_0 \le a_0 \wedge U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') = V_{0,0,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le a$. Если $p_0 \le a'_1$, то $p_0 \le a_0 \wedge a'_1 = W_{0,0,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le a$. В противном случае покрытие $p_0 \le U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \vee a'_1$ нетривиально. По лемме 2.1 найдется покрытие $\{p_1, p'_1\} \in \mathscr{M}_\Sigma(p_0)$ такое, что $p_1 \le U_{1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ и $p_1 \le a'_1$.

Индукцией по i нетрудно показать, что для любого $p \in \Sigma$ если $p \le U_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$, то либо $p \le V_{i,i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le a$, либо $p \le W_{i,i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \le a$, либо найдется покрытие $\{q, q'\} \in \mathscr{M}_\Sigma(p)$ такое, что $q \le U_{i+1,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ и $q' \le a'_{i+1}$.

Таким образом, либо $p \le a$, либо найдутся элементы $p_i \in \Sigma$, $i \le n$, и $p'_i \in \Sigma$, $0 < i \le n$, такие, что $p_i \le U_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$, $p'_i \le a'_i$, а $p_i \le p_{i+1} \vee p'_{i+1}$ является минимальным покрытием для каждого $i < n$.

В последнем случае из (ii) следует, что $p_0 \le p'_1 \vee p_i$ для всех $i \le n$ и $p_0 \le p'_1 \vee p'_i$ для всех $1 < i \le n$. Таким образом,

$$\begin{aligned} p_0 &\le U_n(\mathbf{a},\mathbf{a}') \wedge \bigwedge_{1<i\le n}(p'_1 \vee p_i) \wedge \bigwedge_{1<i\le n}(p'_1 \vee p'_i) \\ &\le U_n(\mathbf{a},\mathbf{a}') \wedge \bigwedge_{1<i\le n}(a'_1 \vee U_{i,n}(\mathbf{a},\mathbf{a}')) \wedge \bigwedge_{1<i\le n}(a'_1 \vee a'_i) \le a. \end{aligned}$$

Поэтому $p \le a$ в любом случае. Так как множество Σ $\vee$-порождает L, мы заключаем, что решетка L удовлетворяет тождеству (T_n). Доказательство предложения закончено. $\square$

Иллюстрация свойства, представленного в п. (ii) предложения 3.3, приведена на рис. 1. Этот рисунок демонстрирует порядок на дереве T (но не порядок на L!) в случае, когда $L = \mathrm{Sub}\,T$.

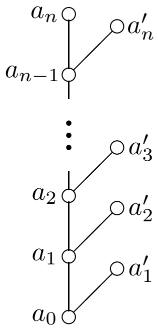


Рис. 1.

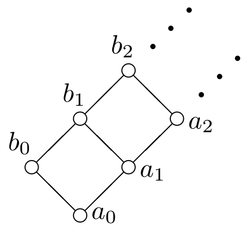


Рис. 2.

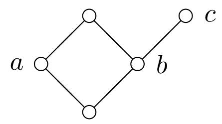


Рис. 3.

Предложение 3.4. *Для любого дерева T и для любого $0 < n < \omega$ решетка $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет тождеству (T_n).*

Доказательство. Полагаем $\Sigma = \operatorname{At}(\operatorname{Sub} T)$. По лемме 2.2 решетка $\operatorname{Sub} T$ является точечной и биатомной.

Пусть множества $\{a_0\}, \dots, \{a_n\}$ принадлежат Σ и $A'_1, \dots, A'_n$ принадлежат $\operatorname{Sub} T$. Предположим, что $\{a_i\} \leq \{a_{i+1}\} \vee A'_{i+1}$ является нетривиальным покрытием для любого $i < n$. (В таком случае это покрытие, очевидно, минимально в $\{a_{i+1}\}$.) Найдутся элементы $a'_1 \in A'_1, \dots, a'_n \in A'_n$ такие, что $a_i = a_{i+1} \wedge a'_{i+1}$ для любого $i < n$ в T (см. рис. 1). Поэтому в T справедливы также равенства $a_0 = a'_1 \wedge a_i$ и $a_0 = a'_1 \wedge a'_i$ для любого $1 < i \leq n$. Следовательно, $\{a_0\} \leq A'_1 \vee \{a_i\}$ и $\{a_0\} \leq A'_1 \vee A'_i$ для любого $1 < i \leq n$.

Таким образом, в решетке $\operatorname{Sub} T$ выполнено условие (ii) предложения 3.3. Согласно предложению 3.3 тождество (T_n) выполняется на решетке $\operatorname{Sub} T$. $\square$

Из леммы 3.2 и предложения 3.4 немедленно получаем следующее утверждение, которое впервые доказано в работе [6].

Следствие 3.5. *Для любого дерева T решетка $\operatorname{Sub} T$ 2-дистрибутивна. В частности, для любого множества $X \subseteq T$ подполурешетка в T, порожденная X, совпадает с множеством $\{a \wedge b \mid a, b \in X\}$.*

Отметим, что заключение следствия 3.5 может не выполняться для произвольной полурешетки T. К примеру, оно нарушается для полурешетки $\mathscr{P}(\mathbf{3})$ относительно пересечения. Действительно, в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{P}(\mathbf{3})$ имеем

$$\{\varnothing\} \cap (\{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\} + \{\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}\} + \{\{\mathbf{0},\mathbf{2}\}\}) = \{\varnothing\},$$

но

$$\{\varnothing\} \cap (\{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}\} + \{\{\mathbf{j},\mathbf{k}\}\}) = \{\varnothing\} \cap \{\{\mathbf{i},\mathbf{j}\},\{\mathbf{j},\mathbf{k}\},\{\mathbf{j}\}\} = \varnothing$$

для любых различных $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} < \mathbf{3}$. Поэтому решетка $\operatorname{Sub} \mathscr{P}(\mathbf{3})$ не 2-дистрибутивна.

Приведем еще одно следствие предложения 3.3.

Следствие 3.6. *Пусть L — решетка, и пусть $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Если все тождества (T_n), $0 < n < \omega$, выполняются на L, то L не содержит D-циклов, составленных из элементов Σ.*

Доказательство. Предположим, что элементы $p_0, \dots, p_{m-1} \in \Sigma$, $1 < m < \omega$, образуют D-цикл. Так как (T_1) выполняется на L, решетка L является

2-дистрибутивной по лемме 3.2. Согласно определению для любого $i < m$ найдется $p'_i \in L$ такой, что покрытие $p_i \leq p_{i+1} \vee p'_{i+1}$ нетривиально и минимально в p_{i+1}, где индекс $i+1$ вычисляется по модулю m. Полагаем $a_i = p_i$ для всех $i < m$; $a'_i = p'_i$ для всех $0 < i < m$; $a_m = p_0$, $a'_m = p'_0$; $a_{m+1} = p_1$, $a'_{m+1} = p'_1$.

Решетка L удовлетворяет всем условиям предложения 3.3(ii). Так как L удовлетворяет тождеству (T_{m+1}), согласно предложению 3.3 имеем $p_0 = a_0 \leq a'_1 \vee a'_{m+1} = p'_1 \vee p'_1 = p'_1$, что противоречит выбору p'_1. Таким образом, решетка L не может содержать D-циклов, составленных из элементов Σ. $\square$

Из предложения 3.4 и следствия 3.6 вытекает

Следствие 3.7. *Для любого дерева T любая конечная подрешетка в $\operatorname{Sub} T$ не содержит* D*-циклов. В частности, любая конечная подрешетка в $\operatorname{Sub} T$ ограничена снизу.*

Отметим, что заключение следствия 3.7 может не выполняться для произвольной полурешетки T; к примеру, оно нарушается для полурешетки S относительно пересечения, изображенной на рис. 2. Действительно, пусть $A_0 = \{a_{2n} \mid n < \omega\}$, $A_1 = \{a_{2n+1} \mid n < \omega\}$; $B_0 = \{b_{2n} \mid n < \omega\}$, $B_1 = \{b_{2n+1} \mid n < \omega\}$. Тогда множество $\{A_0, A_1, B_0, B_1\}$ порождает конечную подрешетку $\mathscr{S}$ в $\operatorname{Sub} S$. Тем не менее поскольку $a_i = a_{i+1} \wedge b_i$ выполняется в S для любого $i < \omega$, заключаем, что покрытия $A_0 \subseteq A_1 + B_0$ и $A_1 \subseteq A_0 + B_1$ нетривиальны и минимальны, поэтому последовательность $A_0 \,\mathrm{D}\, A_1 \,\mathrm{D}\, A_0$ образует D-цикл в $\mathscr{S}$.

Отметим еще одно следствие предложения 3.4.

Следствие 3.8. *Класс $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ образует собственный подкласс в $\mathbf{S}(\mathscr{S})$.*

Доказательство. Пусть N обозначает частичную решетку, изображенную на рис. 2. Очевидно, N является нижней полурешеткой. Покажем, что $\operatorname{Sub} N$ не удовлетворяет тождеству (T_2). Действительно, положим в (T_2) $x_0 = \{a \wedge b\}$; $x_1 = \{b\}$, $x'_1 = \{a\}$; $x_2 = \{c\}$, $x'_2 = \{a \vee b\}$. Тогда левая часть (T_2) равна $\{a \wedge b\}$, в то время как правая часть равна

$$\{a \wedge b\} \cap (\{a\} + \{c\}) \cap (\{a\} + \{a \vee b\}) = \{a \wedge b\} \cap \{a, c, a \wedge b\} \cap \{a, a \vee b\} = \varnothing.$$

Итак, решетка $\operatorname{Sub} N$ не вложима в решетку подполурешеток никакой полурешетки, являющейся деревом, что и дает требуемое заключение. $\square$

Отметим, что решетка $\operatorname{Sub} N$, где N обозначает полурешетку, изображенную на рис. 3, является 2-дистрибутивной. Таким образом, тождество (T_2) является более сильным, чем тождество 2-дистрибутивности.

§ 4. Тождество (P)

Всюду в этом параграфе мы будем использовать такое обозначение:

$$z' = z \wedge (x \vee x_0) \wedge (x \vee x_1) \wedge (y_0 \vee y_1).$$

Рассмотрим следующее тождество от переменных $\langle x, x_0, x_1, y_0, y_1, z\rangle$, которое будем обозначать через (P):

$$\begin{aligned} z' = [z' \wedge x] \vee \bigvee_{i<2} [(z' \wedge x_i) \vee (z' \wedge y_i)] \vee \bigvee_{i<2} [z' \wedge (x_0 \vee y_i) \wedge (x_1 \vee y_i) \wedge (x \vee y_{1-i})] \\ \vee \bigvee_{i<2} [z' \wedge (x_0 \vee x_1) \wedge (x_0 \vee y_i) \wedge (x_1 \vee y_{1-i}) \wedge (x \vee y_0) \wedge (x \vee y_1)]. \end{aligned}$$

Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 4.1. *Пусть a обозначает правую часть тождества* (P). *Неравенство $a \leq z'$ имеет место в любой решетке.*

Предложение 4.2. *Пусть L — решетка, и пусть $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Рассмотрим следующие утверждения о L и Σ.*

(i) *Решетка L удовлетворяет тождеству* (P).

(ii) *Для любых элементов a, a_0, a_1, b_0, b_1 решетки L и любого $c \in \Sigma$ если покрытия $c \leq a \vee a_0$, $c \leq a \vee a_1$ и $c \leq b_0 \vee b_1$ нетривиальны, то либо $c \leq a_0 \vee b_i$, $c \leq a_1 \vee b_i$, $c \leq a \vee b_{1-i}$ являются нетривиальными покрытиями для некоторого $i < 2$, либо $c \leq a_0 \vee a_1$, $c \leq a_0 \vee b_i$, $c \leq a_1 \vee b_{1-i}$, $c \leq a \vee b_0$, $c \leq a \vee b_1$ являются нетривиальными покрытиями для некоторого $i < 2$.*

Тогда (i) *влечет* (ii). *Если Σ $\vee$-порождает L, то* (ii) *влечет* (i).

Доказательство. Покажем сначала, что (i) влечет (ii). Предположим, что элементы $a, a_0, a_1, b_0, b_1 \in L$ и $c \in \Sigma$ удовлетворяют всем требованиям (ii). Тогда левая часть тождества (P) после подстановки $\langle a, a_0, a_1, b_0, b_1, c\rangle$ равна c. Таким образом, правая его часть также должна быть равна c. Элемент c неразложим. Поэтому c равен одному из дизъюнктных членов в правой части (P) после подстановки вместо переменных элементов $\langle a, a_0, a_1, b_0, b_1, c\rangle$. Поскольку покрытия $c \leq a \vee a_0$, $c \leq a \vee a_1$, $c \leq b_0 \vee b_1$ нетривиальны, возможны следующие два случая.

Случай 1. Существует $i < 2$ такой, что

$$c = c \wedge (a \vee a_0) \wedge (a \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_i) \wedge (a \vee b_{1-i}) \\ \leq (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_i) \wedge (a \vee b_{1-i}).$$

Случай 2. Существует $i < 2$ такой, что

$$c = c \wedge (a \vee a_0) \wedge (a \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1) \wedge (a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_{1-i}) \\ \wedge (a \vee b_0) \wedge (a \vee b_1) \leq (a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_{1-i}) \wedge (a \vee b_0) \wedge (a \vee b_1).$$

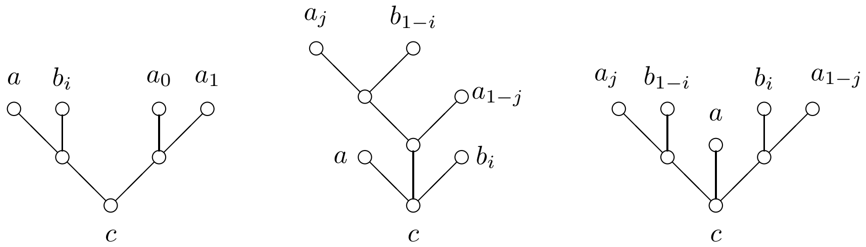
Таким образом, выполнено заключение (ii).

Покажем теперь, что (ii) влечет (i). Пусть $a, a_0, a_1, b_0, b_1, r \in L$, и пусть правая часть тождества (P) после подстановки вместо переменных элементов $\langle a, a_0, a_1, b_0, b_1, r\rangle$ равна t. Согласно лемме 4.1 нам нужно показать, что $r \wedge (a \vee a_0) \wedge (a \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1) \leq t$. Действительно, пусть $c \in \Sigma$ таков, что $c \leq r \wedge (a \vee a_0) \wedge (a \vee a_1) \wedge (b_0 \vee b_1)$. Тогда, очевидно, $c \leq r$. Если одно из покрытий $c \leq a \vee a_0$, $c \leq a \vee a_1$, $c \leq b_0 \vee b_1$ тривиально, то $c \leq t$. В противном случае элементы a, a_0, b_1, b_0, b_1, c удовлетворяют всем требованиям (ii). Поэтому либо $c \leq r \wedge (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_i) \wedge (a \vee b_{1-i})$ для некоторого $i < 2$, либо $c \leq r \wedge (a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee b_i) \wedge (a_1 \vee b_{1-i}) \wedge (a \vee b_0) \wedge (a \vee b_1)$ для некоторого $i < 2$. В любом случае $c \leq t$. Так как множество Σ $\vee$-порождает L, получаем требуемое заключение. □

Иллюстрация свойства, представленного в п. (ii) предложения 4.2, приведена на рис. 4.

Предложение 4.3. *Для любого дерева T решетка $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет тождеству* (P).

Доказательство. Пусть множества A, A_i, B_i, $i < 2$, принадлежат $\operatorname{Sub} T$. Пусть элемент $c \in T$ таков, что покрытия $\{c\} \leq A + A_0$, $\{c\} \leq A + A_1$, $\{c\} \leq B_0 + B_1$ нетривиальны. В этом случае существуют элементы $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$, $i < 2$, а также элементы a, $a' \in A$ такие, что $c = a \wedge a_0 = a' \wedge a_1 = b_0 \wedge b_1$ являются



(a) (b)

Рис. 4.

собственными пересечениями в T. Если $a \wedge a' = c$, то $c \in A$; противоречие. Таким образом, $a \wedge a' > c$, и в T имеют место следующие равенства:

$$c = a \wedge a_0 = a \wedge a_1 = b_0 \wedge b_1.$$

Возможны два случая.

Случай 1. Существует $i < 2$ такое, что $a \wedge b_i > c$ в T (см. рис. 4(a)). Так как пересечение $b_0 \wedge b_1 = c$ нетривиально, имеем $a \wedge b_{1-i} = c$ и $a_0 \wedge b_i = a_1 \wedge b_i = c$ в T. Следовательно, $c \in (A_0 + B_i) \cap (A_1 + B_i) \cap (A + B_{1-i})$.

Случай 2. Для любого $i < 2$ в T выполняется $a \wedge b_i = c$ (см. рис. 4(b)). Тогда получаем $c \in (A + B_0) \cap (A + B_1)$.

Вновь возможны два случая. В первом случае $a_0 \wedge a_1 > c$ в T. Если найдутся $i, j < 2$ такие, что $a_j \wedge b_{1-i} > c$, то, поскольку пересечение $b_0 \wedge b_1 = c$ нетривиально, получаем, что $a_0 \wedge b_i = a_1 \wedge b_i = c$ в T. Поэтому $c \in (A_0 + B_i) \cap (A_1 + B_i) \cap (A + B_{1-i})$. Если же $a_j \wedge b_{1-i} = c$ для всех $i, j < 2$, то вновь получаем $c \in (A_0 + B_i) \cap (A_1 + B_i) \cap (A + B_{1-i})$.

Во втором случае $a_0 \wedge a_1 = c$ в T. В этом случае $c \in A_0 + A_1$. Если найдутся $i, j < 2$ такие, что $a_j \wedge b_{1-i} > c$, то, поскольку пересечения $a_0 \wedge a_1 = b_0 \wedge b_1 = c$ нетривиальны, получаем, что $a_j \wedge b_i = a_{1-j} \wedge b_{1-i} = c$ в T. Поэтому $c \in (A_0 + A_1) \cap (A_0 + B_i) \cap (A_1 + B_{1-i}) \cap (A + B_0) \cap (A + B_1)$. Если $a_j \wedge b_{1-i} = c$ для всех $i, j < 2$, то вновь получаем $c \in (A_0 + A_1) \cap (A_0 + B_i) \cap (A_1 + B_{1-i}) \cap (A + B_0) \cap (A + B_1)$.

Таким образом, решетка $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет условию (ii) предложения 4.2. По предложению 4.2 заключаем, что $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет тождеству (P). $\square$

До конца этого параграфа мы рассматриваем фиксированную решетку L, которая удовлетворяет тождеству (P). Для любого $x \in \mathrm{J}(L)$ рассмотрим множество $[x]^{\mathrm{D}} = \{y \in \mathrm{J}(L) \mid x \,\mathrm{D}\, y\}$. Определим бинарное отношение $\underset{x}{\sim}$ на $[x]^{\mathrm{D}}$, полагая для $a, b \in [x]^{\mathrm{D}}$

$$a \underset{x}{\sim} b \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x \nleq a \vee b. \tag{4.1}$$

Лемма 4.4. *Для любого $d \in \mathrm{J}(L)$ отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $[d]^{\mathrm{D}}$.*

Доказательство. Пусть $d \in \mathrm{J}(L)$. Очевидно, отношение $\underset{d}{\sim}$ рефлексивно и симметрично. Нам нужно показать, что $\underset{d}{\sim}$ транзитивно. Пусть a, b, $c \in [d]^{\mathrm{D}}$. Тогда найдутся элементы a', $b' \in L$ такие, что покрытия $d \leq a \vee a'$ и $d \leq b \vee b'$ нетривиальны. Предположим, что $a \underset{d}{\sim} b$, $b \underset{d}{\sim} c$, но $a \underset{d}{\sim} c$ не выполняется. Это означает, что $d \leq a \vee c$. Поскольку $d \,\mathrm{D}\, c$, покрытие $d \leq a \vee c$ также нетривиально.

Применим предложение 4.2(ii) к нетривиальным покрытиям $d \le a \vee a'$, $d \le a \vee c$, $d \le b \vee b'$. Возможны следующие случаи.

Случай 1. $d \le (a' \vee b) \wedge (c \vee b) \wedge (a \vee b') \le c \vee b$, что противоречит условию $b \underset{d}{\sim} c$.

Случай 2. $d \le (a' \vee b') \wedge (c \vee b') \wedge (a \vee b) \le a \vee b$, что противоречит условию $a \underset{d}{\sim} b$.

Случай 3. $d \le (a' \vee c) \wedge (a' \vee b) \wedge (c \vee b') \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b') \le a \vee b$, что противоречит условию $a \underset{d}{\sim} b$.

Случай 4. $d \le (a' \vee c) \wedge (a' \vee b') \wedge (c \vee b) \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee b') \le (a \vee b) \wedge (c \vee b)$, что противоречит тому, что $a \underset{d}{\sim} b$ и $b \underset{d}{\sim} c$.

Таким образом, $d \nleq a \vee c$, т. е. $a \underset{d}{\sim} c$, и отношение $\underset{d}{\sim}$ транзитивно. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть решетка L 2-дистрибутивна и имеет слабое свойство Σ-минимальности для некоторого $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Для любого $c \in \Sigma$ и для любых a_0, $a_1 \in [c]^{\mathrm{D}}$ если элементы a_0 и a_1 не сравнимы по отношению $\underset{c}{\sim}$, то $c \le a_0 \vee a_1$ является минимальным покрытием.*

Доказательство. Действительно, так как a_0 и a_1 не сравнимы по отношению $\underset{c}{\sim}$, покрытие $c \le a_0 \vee a_1$ нетривиально. Так как решетка L 2-дистрибутивна и имеет слабое свойство Σ- минимальности, по лемме 2.1 заключаем, что существует $\{x_0, x_1\} \in \mathscr{M}_\Sigma(c)$ такое, что $x_i \le a_i$ для $i < 2$. В частности, x_0, $x_1 \in [c]^{\mathrm{D}}$ и $x_i \underset{c}{\sim} a_i$ для любого $i < 2$.

С другой стороны, поскольку a_0, $a_1 \in [c]^{\mathrm{D}}$, найдутся b_0, $b_1 \in \Sigma$ такие, что $c \le a_i \vee b_i$ является минимальным покрытием для любого $i < 2$.

Предположим, что для некоторого $i < 2$ имеет место $c \nleq x_i \vee b_i$. Тогда согласно (4.1) $b_i \underset{c}{\sim} x_i \underset{c}{\sim} a_i$. По лемме 4.4 получаем, что $b_i \underset{c}{\sim} a_i$, т. е. $c \nleq a_i \vee b_i$; противоречие. Таким образом, $c \le x_i \vee b_i$ для любого $i < 2$. Так как $x_i \le a_i$ и покрытие $c \le a_i \vee b_i$ минимально, имеем $x_i = a_i$ для любого $i < 2$, откуда вытекает, что покрытие $c \le a_0 \vee a_1$ минимально. $\square$

§ 5. Тождество (M)

Всюду в этом параграфе мы будем использовать такие обозначения: $x_0' = x_0 \wedge (x_{0,0} \vee x_{0,1})$; $x_1' = x_1 \wedge (x_{1,0} \vee x_{1,1})$; $y' = y \wedge \bigl(x \vee x_0'\bigr) \wedge \bigl(x \vee x_1'\bigr)$. Рассмотрим следующее тождество от переменных $\langle x, x_0, x_1, x_{0,0}, x_{0,1}, x_{1,0}, x_{1,1}, y\rangle$, которое будем обозначать через (M):

$$y' = [y' \wedge (x_0' \vee x_1')] \vee \bigvee_{i,j,l<2} \Bigl[y' \wedge \Bigl(x \vee \Bigl((x_0' \vee x_1') \wedge (x_{1-i}' \vee x_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (x_i' \vee x_{1-i,k}) \wedge (x_{i,j} \vee x_{1-i,l})\Bigr)\Bigr)\Bigr].$$

Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 5.1. *Пусть a обозначает терм, находящийся в правой части равенства в* (M). *Неравенство $a \le y'$ выполняется в любой решетке.*

Предложение 5.2. *Пусть L — решетка и $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Рассмотрим следующие утверждения о L и Σ.*

(i) *Решетка L удовлетворяет тождеству* (M).

(ii) *Для любых элементов* $a, a_{i,j}$, $i, j < 2$, *решетки* L *и любых элементов* $a_0, a_1, b \in \Sigma$ *если покрытие* $b \leq a \vee a_i$ *нетривиально и минимально в* a_i *для любого* $i < 2$, *а покрытие* $a_i \leq a_{i,0} \vee a_{i,1}$ *нетривиально для любого* $i < 2$, *то либо* $b \leq a_0 \vee a_1$ *является нетривиальным покрытием, либо*

$$b \leq a \vee ((a_0 \vee a_1) \wedge (a_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l}))$$

является нетривиальным покрытием для некоторых $i, j, l < 2$.

Тогда (i) *влечет* (ii). *Если решетка* L *является* 2*-дистрибутивной и имеет слабое свойство* Σ*-минимальности, а* Σ $\vee$*-порождает* L, *то* (ii) *влечет* (i). *Если* $\Sigma = \mathrm{At}(L)$, *а решетка* L *является точечной и биатомной, то* (ii) *влечет* (i).

Доказательство. Покажем сначала, что (i) влечет (ii). Пусть решетка L удовлетворяет тождеству (M), и пусть элементы $a, a_{i,j}$, $i, j < 2$, решетки L и элементы a_0, a_1, b множества Σ удовлетворяют всем требованиям (ii). Значение терма, находящегося в левой части равенства в (M), при подстановке вместо переменных элементов $\langle a, a_0, a_1, a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{1,1}, b\rangle$ равно b. Поэтому значение терма из правой части того же тождества при той же подстановке также должно быть равно b. Элемент b неразложим. Поэтому b равен значению одного из дизъюнктных членов в правой части (M) при подстановке $\langle a, a_0, a_1, a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{1,1}, b\rangle$. Поскольку каждое из покрытий $b \leq a \vee a_0$, $b \leq a \vee a_1$ и $a_i \leq a_{i,0} \vee a_{i,1}$, $i < 2$, нетривиально, возможны лишь два случая.

Случай 1. $b = b \wedge (a'_0 \vee a'_1) \leq a'_0 \vee a'_1 = a_0 \vee a_1$. Так как $b \nleq a_i$ для любого $i < 2$, последнее покрытие нетривиально.

Случай 2. Существуют $i, j, l < 2$ такие, что $b = b \wedge (a \vee ((a'_0 \vee a'_1) \wedge (a'_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a'_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l}))) \leq a \vee ((a_0 \vee a_1) \wedge (a_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l}))$. В случае, когда последнее покрытие тривиально, ввиду $b \nleq a$ имеем $b \leq a_0 \vee a_1$ и таким образом попадаем в случай 1.

Предположим теперь, что решетка L 2-дистрибутивна и имеет слабое свойство Σ-минимальности, а Σ $\vee$-порождает L (либо $\Sigma = \mathrm{At}(L)$ и решетка L точечная и биатомная). По лемме 2.1 для любого $p \in \Sigma$ любое нетривиальное покрытие p утончается до некоторого покрытия из $\mathscr{M}_\Sigma(p)$, которое содержит два элемента. Покажем, что (ii) влечет (i). Пусть a, p_0, p_1, $a_{i,j}$ $(i, j < 2)$, q принадлежат L, и пусть t равно значению терма, находящегося в правой части (P), при подстановке вместо переменных элементов $\langle a, p_0, p_1, a_{0,0}, a_{0,1}, a_{1,0}, a_{1,1}, q\rangle$. Согласно лемме 4.1 требуется показать, что $q' = q \wedge (a \vee a'_0) \wedge (a \vee a'_1) \leq t$, где $a'_i = p_i \wedge (a_{i,0} \vee a_{i,1})$ для $i < 2$. Действительно, пусть элемент $b \in \Sigma$ таков, что $b \leq q' = q \wedge (a \vee a'_0) \wedge (a \vee a'_1)$. Если покрытие $b \leq a \vee a'_i$ тривиально для какого-то $i < 2$, то $b \leq q' \wedge a$ или $b \leq q' \wedge a'_i$, т. е. $b \leq t$. Предположим, что покрытие $b \leq a \vee a'_i$ нетривиально для любого $i < 2$. По лемме 2.1 найдутся элементы a', $a'' \leq a$, $a_i \leq a'_i$, $i < 2$, множества Σ такие, что покрытия $b \leq a' \vee a_0$, $b \leq a'' \vee a_1$ минимальны. Имеем $a_i \leq a'_i \leq a_{i,0} \vee a_{i,1}$. Если $a_i \leq a_{i,j}$ для некоторого $j < 2$, то $a_i \leq p_i \wedge a_{i,j}$, откуда $b \leq q' \wedge \big(a \vee (p_i \wedge a_{i,j})\big) \leq t$. В противном случае элементы b, a_i, $a_{i,j}$ $(i, j < 2)$ удовлетворяют всем требованиям (ii). Так как по предположению решетка L удовлетворяет условию (ii), делаем вывод, что либо $b \leq q' \wedge (a_0 \vee a_1) \leq q' \wedge (a'_0 \vee a'_1) \leq t$, либо найдутся i, j, $l < 2$ такие, что

$$b \leq q' \wedge \Big(a \vee \Big((a_0 \vee a_1) \wedge (a_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l})\Big)\Big)$$

$$\leq q' \wedge \Big(a \vee \Big((a'_0 \vee a'_1) \wedge (a'_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a'_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l})\Big)\Big) \leq t.$$

В любом случае $b \leq t$. Поскольку множество Σ $\vee$-порождает L, получаем $q' \leq t$, что и требовалось. $\square$

Иллюстрация свойства, представленного в п. (ii) предложения 5.2, приведена на рис. 5.

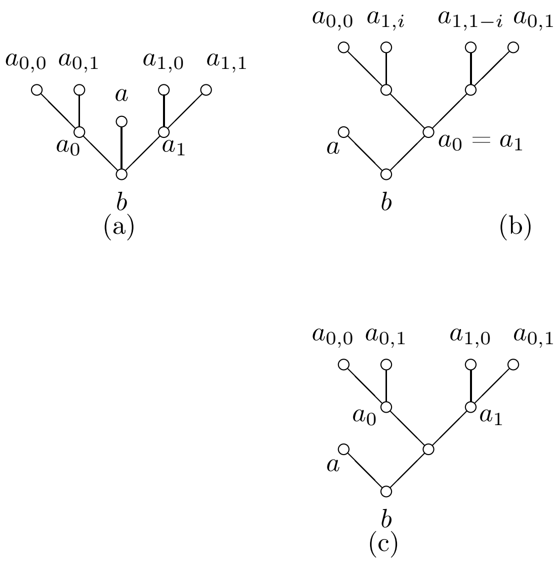


Рис. 5.

Предложение 5.3. *Для любого дерева* T *решетка* $\operatorname{Sub} T$ *удовлетворяет тождеству* (M).

Доказательство. Пусть множества A и $A_{i,j}$, $i, j < 2$, принадлежат решетке $\operatorname{Sub} T$, пусть a_0, a_1, $b \in T$ и покрытия $\{b\} \leq A + \{a_i\}$ и $\{a_i\} \leq A_{i,0} + A_{i,1}$, $i < 2$, нетривиальны в $\operatorname{Sub} T$. Тогда существуют $a, a' \in A$ и $a_{i,j} \in A_{i,j}$, $i, j < 2$, такие, что $b = a \wedge a_0 = a' \wedge a_1$ и $a_i = a_{i,0} \wedge a_{i,1}$, $i < 2$, являются нетривиальными пересечениями в T. Если $a \wedge a' = b$, то $b \in A$; противоречие. Таким образом, $a \wedge a' > b$, и следующие пересечения в T нетривиальны: $b = a \wedge a_0 = a \wedge a_1$. Возможны два случая.

Случай 1. $b = a_0 \wedge a_1$ (см. рис. 5(a)). В этом случае $\{b\} \leq \{a_0\} + \{a_1\}$.

Случай 2. $b < a_0 \wedge a_1$.

Вновь возможны два случая.

Случай 2.1. Элементы a_0 и a_1 сравнимы, т. е. $a_i \leq a_{1-i}$ для какого-то $i < 2$ (см. рисунок 5(b)). Тогда найдется $j < 2$ такой, что $a_i = a_{1-i} \wedge a_{i,j}$ в T. Более того, найдется $l < 2$ такой, что $a_i = a_{i,j} \wedge a_{1-i,l}$ в T. Поэтому

$$a_i \in (\{a_0\} + \{a_1\}) \cap (\{a_{1-i}\} + \{a_{i,j}\}) \cap \bigcap_{k<2} (\{a_i\} + \{a_{1-i,k}\}) \cap (\{a_{i,j}\} + \{a_{1-i,l}\}).$$

Так как $b = a \wedge a_i$ в T, получаем

$$\{b\} \leq A + \Big((\{a_0\} + \{a_1\}) \cap (\{a_{1-i}\} + A_{i,j}) \cap \bigcap_{k<2} (\{a_i\} + A_{1-i,k}) \cap (A_{i,j} + A_{1-i,l}) \Big).$$

Случай 2.2. Элементы a_0 и a_1 несравнимы в T (см. рис. 5(c)). Тогда

$$c = a_0 \wedge a_1 \in (\{a_0\}+\{a_1\}) \cap (\{a_{1-i}\}+\{a_{i,j}\}) \cap \bigcap_{k<2} (\{a_i\}+\{a_{1-i,k}\}) \cap (\{a_{i,j}\}+\{a_{1-i,l}\})$$

для любых i, j, $l < 2$. Также имеем $b = a \wedge c$ в T, откуда

$$\{b\} \leq A + \Big((\{a_0\}+\{a_1\}) \cap (\{a_{1-i}\}+A_{i,j}) \cap \bigcap_{k<2} (\{a_i\}+A_{1-i,k}) \cap (A_{i,j}+A_{1-i,l}) \Big).$$

Полагая $\Sigma = \mathrm{At}(\mathrm{Sub}\,T)$, видим, что $\mathrm{Sub}\,T$ удовлетворяет всем условиям предложения 5.2(ii). По лемме 2.2 решетка $\mathrm{Sub}\,T$ точечна и биатомна. Таким образом, используя предложение 5.2, делаем заключение о том, что решетка $\mathrm{Sub}\,T$ удовлетворяет тождеству (M). $\square$

До конца этого параграфа рассматриваем фиксированную решетку L, удовлетворяющую тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P) и (M) и обладающую свойством Σ-минимальности для некоторого фиксированного множества $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$, которое $\vee$-порождает L. По следствию 3.6 решетка L не имеет D-циклов, составленных из элементов Σ. Отсюда вытекает, что $\langle \Sigma, \trianglelefteq_{\mathrm{D}} \rangle$, где отношение $\trianglelefteq_{\mathrm{D}}$ есть транзитивное замыкание отношения D-зависимости на Σ, является частично упорядоченным множеством. По лемме 2.1 для любого $p \in \Sigma$ каждое покрытие, принадлежащее $\mathscr{M}_\Sigma(p)$, содержит в точности два элемента.

Для каждого $x \in \Sigma$ пусть $\underset{x}{\sim}$ обозначает отношение эквивалентности на $[x]^{\mathrm{D}} \subseteq \Sigma$, определенное согласно (4.1).

Лемма 5.4. *Пусть $b \in \Sigma$, a_0, $a_1 \in [b]^{\mathrm{D}}$ и $b \prec_{\mathrm{D}} a_0, a_1$. Если $a_0 \underset{b}{\sim} a_1$ и $a_0, a_1 \notin D_0(L)$, то $a_0 = a_1$.*

Доказательство. Поскольку $a_1 \in [b]^{\mathrm{D}}$, существует $a \in [b]^{\mathrm{D}}$ такой, что $b \leq a \vee a_1$ является минимальным покрытием. Предположим, что $a \underset{b}{\sim} a_0$. Тогда $a \underset{b}{\sim} a_0 \underset{b}{\sim} a_1$, поэтому $a \underset{b}{\sim} a_1$; противоречие. Таким образом, $a \underset{b}{\sim} a_0$ не выполняется. По лемме 4.5 получаем, что покрытие $b \leq a \vee a_0$ минимально. Более того, поскольку $a_i \notin D_0(L)$ для любого $i < 2$, найдутся $a_{i,j} \in \mathrm{J}(L)$ такие, что покрытие $a_i \leq a_{i,0} \vee a_{i,1}$ минимально.

Применим предложение 5.2. Так как $b \nleq a_0 \vee a_1$, имеем

$$b \leq a \vee \Big((a_0 \vee a_1) \wedge (a_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l}) \Big)$$

для некоторых i, j, $l < 2$. Поскольку решетка L удовлетворяет тождеству (T_2), L является 2-дистрибутивной по лемме 3.2. Так как решетка L имеет слабое свойство Σ-минимальности, по лемме 2.1 существуют x, $y \in \Sigma$ такие, что

$$y \leq a, \quad x \leq (a_0 \vee a_1) \wedge (a_{1-i} \vee a_{i,j}) \wedge \bigwedge_{k<2} (a_i \vee a_{1-i,k}) \wedge (a_{i,j} \vee a_{1-i,l}) \tag{5.1}$$

и покрытие $b \leq x \vee y$ минимально. Поскольку $x \leq a_0 \vee a_1$, также имеем

$$b = b \wedge (x \vee y) = b \wedge (a_0 \vee a_1 \vee y) = (b \wedge (a_0 \vee y)) \vee (b \wedge (a_1 \vee y)) \vee (b \wedge (a_0 \vee a_1)),$$

так как L 2-дистрибутивна. В силу того, что $b \in \mathrm{J}(L)$ и $b \nleq a_0 \vee a_1$, отсюда следует, что найдется $i < 2$ такой, что $b \leq a_i \vee y$. Покрытие $b \leq a \vee a_i$ минимально и $y \leq a$, откуда получаем, что $y = a$.

Напомним, что $x \le a_0 \vee a_1$. Предположим, что покрытие $x \le a_0 \vee a_1$ нетривиально. Решетка L 2-дистрибутивна и обладает свойством Σ-минимальности, поэтому по лемме 2.1 существует минимальное покрытие $x \le y_0 \vee y_1$ такое, что $y_i \le a_i$ для любого $i < 2$. Применяя предложение 3.3 в случае $n = 2$ к минимальным покрытиям $b \le a \vee x$, $x \le y_0 \vee y_1$, получаем неравенство $b \le a \vee y_i$ для любого $i < 2$, откуда в силу минимальности покрытия $b \le a \vee a_i$ вытекает, что $y_i = a_i$. Таким образом, покрытие $x \le a_0 \vee a_1$ минимально, и имеем $b \,\mathrm{D}\, x \,\mathrm{D}\, a_0$, $b \,\mathrm{D}\, x \,\mathrm{D}\, a_1$, что противоречит $b \prec_{\mathrm{D}} a_i$.

Полученное противоречие показывает, что покрытие $x \le a_0 \vee a_1$ тривиально. Тогда $x \le a_k$ для некоторого $k < 2$. Минимальность покрытия $b \le a \vee a_k$ влечет $x = a_k$. Из последнего неравенства в (5.1) следует, что существует $r < 2$ такой, что $a_k \le a_{1-k} \vee a_{k,r}$. Предположим, что покрытие $a_k \le a_{1-k} \vee a_{k,r}$ нетривиально. Решетка L 2-дистрибутивна и обладает свойством Σ-минимальности, поэтому по лемме 2.1 существует минимальное покрытие $a_k \le u \vee v$ такое, что $u \le a_{1-k}$ и $v \le a_{k,r}$. Применяя предложение 3.3 в случае $n = 2$ к минимальным покрытиям $b \le a \vee a_k$, $a_k \le u \vee v$, приходим к неравенству $b \le a \vee u$. Из минимальности покрытия $b \le a \vee a_{1-k}$ и неравенства $u \le a_{1-k}$ вытекает, что $u = a_{1-k}$. Так как покрытие $a_k \le a_{1-k} \vee v$ минимально, получаем $b \,\mathrm{D}\, a_k \,\mathrm{D}\, a_{1-k}$, что противоречит $b \prec_{\mathrm{D}} a_{1-k}$.

Таким образом, покрытие $a_k \le a_{1-k} \vee a_{k,r}$ обязано быть тривиальным. Так как $a_k \not\le a_{k,r}$, заключаем, что $a_k \le a_{1-k}$. Поскольку оба покрытия $b \le a \vee a_0$ и $b \le a \vee a_1$ минимальны, последнее неравенство влечет равенство $a_0 = a_1$. Доказательство закончено. $\square$

§ 6. Основная конструкция

Всюду в этом параграфе мы рассматриваем фиксированную решетку L, удовлетворяющую тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P) и (M), обладающую свойством Σ-минимальности для некоторого фиксированного множества $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$, которое $\vee$-порождает L. По следствию 3.6 решетка L не имеет D-циклов, составленных из элементов Σ. Отсюда вытекает, что $\langle \Sigma, \trianglelefteq_{\mathrm{D}} \rangle$, где отношение $\trianglelefteq_{\mathrm{D}}$ есть транзитивное замыкание отношения D-зависимости на Σ, является частично упорядоченным множеством.

Мы предполагаем дополнительно, что $\langle \Sigma, \trianglelefteq_{\mathrm{D}} \rangle$ не содержит бесконечных ограниченных цепей.

Мы полагаем $L_0 = L$, если L имеет наименьший элемент, и $L_0 = L \cup \{\mathrm{O}\}$, где $\mathrm{O} \notin L$ и $\mathrm{O} \le x$ для всех $x \in L$, в противном случае. Построим дерево $\langle T_L, \trianglelefteq \rangle$ и отображение $e \colon T_L \to L_0$ следующим образом.

Пусть T_L обозначает множество всех последовательностей вида

$$\alpha = \langle a_0, \dots, a_n \rangle,$$

где $n < \omega$, $a_i \in \Sigma$ для всех $i \le n$ и $a_i \prec_{\mathrm{D}} a_{i+1}$ для всех $i < n$, плюс пустая последовательность ε.

Для любого $x \in \Sigma$ пусть $\underset{x}{\sim}$ является отношением эквивалентности на $[x]^{\mathrm{D}}$, которое определено в (4.1). По лемме 5.4 для любого $x \prec_{\mathrm{D}} a$ множество $\underset{x}{\sim}[a] = [a]_{\underset{x}{\sim}} \cap \{y \in [x]^{\mathrm{D}} \mid x \prec_{\mathrm{D}} y\}$ содержит не более одного элемента, который не является простым. Будем использовать то же самое обозначение $\trianglelefteq$ для произвольного фиксированного линейного порядка на множестве $\underset{x}{\sim}[a]$ со следующим свойством: если класс $\underset{x}{\sim}[a]$ содержит элемент, не являющийся простым, то этот элемент максимален в $\langle \underset{x}{\sim}[a], \trianglelefteq\rangle$. Если $\alpha = \langle a_0, \dots, a_n\rangle$ и $\beta = \langle b_0, \dots, b_m\rangle$ принадлежат $T(L)$, то полагаем $\alpha \trianglelefteq \beta$, если $n \leq m$, $a_i = b_i$ для всех $i < n$, $a_n \underset{a_{n-1}}{\sim} b_n$ и $a_n \trianglelefteq b_n$ в $\langle \underset{a_{n-1}}{\sim}[a_n], \trianglelefteq\rangle$. Таким образом, $\varepsilon \trianglelefteq \alpha$ для любой последовательности $\alpha \in T(L)$.

Для любой непустой последовательности $\alpha = \langle a_0, \dots, a_n\rangle \in T_L$ полагаем $e(\alpha) = a_n$. Пусть также $e(\varepsilon) = \mathrm{O}$, где O является наименьшим элементом в L_0.

Лемма 6.1. *$\langle T_L, \trianglelefteq\rangle$ является деревом.*

Доказательство. Если $\alpha \trianglelefteq \beta$ в T_L, то полагаем $\alpha \wedge \beta = \alpha$. Если α и β несравнимы в T_L, то пусть $\alpha \wedge \beta$ обозначает наибольший общий начальный отрезок α и β.

Определенная таким образом последовательность $\alpha \wedge \beta$ является точной нижней гранью множества $\{\alpha, \beta\}$ относительно $\trianglelefteq$ для любых α, $\beta \in T_L$. Таким образом, $\langle T_L, \trianglelefteq\rangle$ является полурешеткой. Поскольку $\langle \underset{x}{\sim}[a], \trianglelefteq\rangle$ является цепью для любых $x \prec_{\mathrm{D}} a$ в Σ, нижний конус $\downarrow \alpha$ также является цепью для каждого $\alpha \in T_L$. $\square$

Определим отображение $\varphi\colon L_0 \to \mathscr{P}(T_L)$ по правилу

$$\varphi(x) = \{\alpha \in T_L \mid e(\alpha) \leq x\}.$$

Лемма 6.2. *$\varphi(x) \in \operatorname{Sub} T_L$ для каждого $x \in L_0$.*

Доказательство. Очевидно, $\varphi(0_L) = \{\varepsilon\} \in \operatorname{Sub} T_L$. Пусть α, $\beta \in \varphi(x)$ для некоторого $x \in L$. Это означает, что $e(\alpha)$, $e(\beta) \leq x$. Покажем, что $e(\alpha \wedge \beta) \leq x$. Без ограничения общности можем полагать, что α и β несравнимы в T_L, так как в противном случае заключение очевидно. В этом случае $\alpha \wedge \beta$ совпадает с наибольшим общим начальным отрезком α и β. Если $\alpha \wedge \beta = \varepsilon$, то $e(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{O} \leq x$.

Таким образом, можем полагать, что существуют $k, m, n < \omega$ такие, что

$$\alpha \wedge \beta = \langle c_0, \dots, c_k\rangle, \quad \alpha = \langle c_0, \dots, c_k, a_0, \dots, a_m\rangle, \quad \beta = \langle c_0, \dots, c_k, b_0, \dots, b_n\rangle$$

для некоторых $c_0, \dots, c_k$, $a_0, \dots, a_m$, $b_0, \dots, b_n \in \Sigma$ таких, что a_m, $b_n \leq x$.

Покажем, что элементы a_0 и b_0 несравнимы по эквивалентности $\underset{c_k}{\sim}$. Предположим, что, напротив, $a_0 \underset{c_k}{\sim} b_0$. Если $m = 0$ или $n = 0$, то α и β сравнимы по определению порядка $\trianglelefteq$, что противоречит нашему предположению. Если $m, n > 0$, то оба элемента a_0 и b_0 не являются простыми. По лемме 5.4 отсюда вытекает, что $a_0 = b_0$, т. е. $\alpha \wedge \beta = \langle c_0, \dots, c_k, a_0\rangle$, что вновь противоречит нашему предположению. Полученное противоречие показывает, что элементы a_0 и b_0 несравнимы по эквивалентности $\underset{c_k}{\sim}$. По лемме 4.5 это означает, что $c_k \leq a_0 \vee b_0$ является минимальным покрытием.

По определению T_L имеем $a_i \mathrel{\mathrm{D}} a_{i+1}$ для всех $i < m$, $b_j \mathrel{\mathrm{D}} b_{j+1}$ для всех $j < n$, $c_m \mathrel{\mathrm{D}} a_0$, $c_m \mathrel{\mathrm{D}} b_0$. Поэтому существуют элементы $a'_1, \dots, a'_m \in \Sigma$ такие, что $c_k \leq a_0 \vee b_0$, $a_i \leq a_{i+1} \vee a'_{i+1}$ для всех $i < m$ являются минимальными покрытиями. Решетка L удовлетворяет тождеству (T_{m+1}), откуда по предложению 3.3, в частности, получаем $c_k \leq b_0 \vee a_m$. Если $c_k \leq a_m$, то $e(\alpha \wedge \beta) = c_k \leq a_m = e(\alpha) \leq x$. В противном случае так как $c_k \nleq b_0$, последнее покрытие нетривиально. По лемме 2.1 найдется $\{a, b\} \in \mathscr{M}_\Sigma(c_k)$ такое, что $a \leq a_m$, $b \leq b_0$.

Если $a \underset{c_k}{\sim} b_0$, то $a \underset{c_k}{\sim} b_0 \underset{c_k}{\sim} b$, т. е. $a \underset{c_k}{\sim} b$ по лемме 4.4; противоречие. Поэтому по лемме 4.5 покрытие $c_k \leq a \vee b_0$ минимально. Более того, так как $b_0 \mathrel{\mathrm{D}} \dots \mathrel{\mathrm{D}} b_n$, существуют элементы $b'_1, \dots, b'_n \in \Sigma$ такие, что покрытие $b_j \le b_{j+1} \vee b'_{j+1}$ минимально для любого $j < n$. Так как решетка L удовлетворяет тождеству (T_{n+1}), применяя предложение 3.3, получаем, в частности, что $c_k \le a \vee b_n \le a_m \vee b_n = e(\alpha) \vee e(\beta) \le x$. Таким образом, $e(\alpha \wedge \beta) = c_k \le x$ и $\alpha \wedge \beta \in \varphi(x)$. $\square$

Мы можем утверждать большее об отображении φ.

Предложение 6.3. *Отображение* $\varphi\colon L_0 \to \operatorname{Sub} T_L$ *является вложением.*

Доказательство. Если $x \not\le y$ в L_0, то $x \in L$ и существует $a \in \Sigma$ такой, что $a \le x$ и $a \not\le y$. Поэтому $\langle a\rangle \in \varphi(x) \backslash \varphi(y)$, откуда вытекает, что отображение φ взаимно однозначно.

Покажем, что φ является гомоморфизмом. Пусть $x, y \in L$. Тогда для любого $\alpha \in T_L$ имеем $\alpha \in \varphi(x \wedge y)$ тогда и только тогда, когда $e(\alpha) \le x \wedge y$. Это равносильно тому, что $e(\alpha) \le x$ и $e(\alpha) \le y$, последнее — тому, что $\alpha \in \varphi(x)$ и $\alpha \in \varphi(y)$, что, в свою очередь, равносильно условию $\alpha \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$. Таким образом, φ сохраняет пересечения. В частности, φ сохраняет порядок.

Поэтому чтобы показать, что φ сохраняет объединения, достаточно показать, что $\varphi(x \vee y) \subseteq \varphi(x) + \varphi(y)$. Действительно, пусть $\alpha \in \varphi(x \vee y)$ для некоторого $\alpha \in T_L$. Тогда $e(\alpha) \le x \vee y$. Если $e(\alpha) \le x$ или $e(\alpha) \le y$, то $\alpha \in \varphi(x) \cup \varphi(y)$. В противном случае $\{x, y\}$ является нетривиальным покрытием $e(\alpha) \in \Sigma$. Решетка L 2-дистрибутивна и имеет слабое свойство Σ-минимальности. По лемме 2.1 существуют a, $b \in \Sigma$ такие, что $a \le x$, $b \le y$ и покрытие $e(\alpha) \le a \vee b$ минимально. Следовательно, $e(\alpha) \mathrel{\mathrm{D}} a$ и $e(\alpha) \mathrel{\mathrm{D}} b$. Согласно предположению о решетке L частично упорядоченное множество $\langle \mathrm{J}(L), \trianglelefteq_{\mathrm{D}}\rangle$ не содержит бесконечных ограниченных цепей. Таким образом, существуют m, $n < \omega$ и $a_0, \dots, a_m$, $b_0, \dots, b_n \in \Sigma$ такие, что

$$e(\alpha) \prec_{\mathrm{D}} a_0 \prec_{\mathrm{D}} \dots \prec_{\mathrm{D}} a_m = a, \quad e(\alpha) \prec_{\mathrm{D}} b_0 \prec_{\mathrm{D}} \dots \prec_{\mathrm{D}} b_n = b.$$

Тогда найдутся элементы $a'_0, \dots, a'_m$, $b'_0, \dots, b'_n \in \Sigma$ такие, что следующие покрытия минимальны:

$$e(\alpha) \le a_0 \vee a'_0; \quad e(\alpha) \le b_0 \vee b'_0;$$
$$a_i \le a_{i+1} \vee a'_{i+1} \text{ для всех } i < m; \quad b_j \le b_{j+1} \vee b'_{j+1} \text{ для всех } j < n.$$

Имеем $a, b, a_0, a'_0, b_0, b'_0 \in [e(\alpha)]^{\mathrm{D}}$. Предположим, что $a_0 \underset{e(\alpha)}{\sim} b_0$. Возможны два случая.

Случай 1. $a \underset{e(\alpha)}{\sim} a_0$ не выполняется. Тогда по лемме 4.5 покрытие $e(\alpha) \le a \vee a_0$ минимально и мы можем предполагать, что $a'_0 = a$. Решетка L удовлетворяет тождеству (T_{m+1}). Применяя предложение 3.3(ii) к минимальным покрытиям

$$e(\alpha) \le a_0 \vee a, \quad a_i \le a_{i+1} \vee a'_{i+1} \text{ для всех } i < m-1, \quad a_{m-1} \le a \vee a'_m,$$

получаем, в частности, что $e(\alpha) \le a \vee a = a$; противоречие. Таким образом, этот случай невозможен.

Случай 2. $a \underset{e(\alpha)}{\sim} a_0$ выполняется. Предположим, что $b \underset{e(\alpha)}{\sim} b_0$. Тогда $a \underset{e(\alpha)}{\sim} a_0 \underset{e(\alpha)}{\sim} b_0 \underset{e(\alpha)}{\sim} b$, т. е. $a \underset{e(\alpha)}{\sim} b$ по лемме 4.4; противоречие с тем, что $e(\alpha) \le a \vee b$. Таким образом, b и b_0 несравнимы по $\underset{e(\alpha)}{\sim}$, и покрытие $e(\alpha) \le b \vee b_0$ минимально по лемме 4.5. Поэтому мы можем считать, что $b_0' = b$. Решетка L удовлетворяет тождеству (T_{n+1}). Применяя предложение 3.3(ii) к минимальным покрытиям

$$e(\alpha) \leq b_0 \vee b, \quad b_j \leq b_{j+1} \vee b_{b+1}' \text{ для всех } j < n-1, \quad b_{n-1} \leq b \vee b_m',$$

получаем, в частности, что $e(\alpha) \leq b \vee b = b$; противоречие. Таким образом, этот случай также невозможен.

Это означает, что a_0 и b_0 несравнимы по $\underset{e(\alpha)}{\sim}$, откуда вытекает, что последовательности $\alpha^\frown\langle a_0\rangle$ и $\alpha^\frown\langle b_0\rangle$ несравнимы в T_L, т. е. $\alpha^\frown\langle a_0\rangle \wedge \alpha^\frown\langle b_0\rangle = \alpha$. Поэтому также имеем

$$\alpha^\frown\langle a_0, \dots, a_{m-1}, a\rangle \wedge \alpha^\frown\langle b_0, \dots, b_{n-1}, b\rangle = \alpha$$

в T_L. Поскольку $\alpha^\frown\langle a_0, \dots, a_{m-1}, a\rangle \in \varphi(x)$ и $\alpha^\frown\langle b_0, \dots, b_{n-1}, b\rangle \in \varphi(y)$, получаем, что $\alpha \in \varphi(x) + \varphi(y)$. Следовательно, φ сохраняет и объединения. Доказательство леммы закончено. $\square$

§ 7. Результат о вложении

Теорема 7.1. *Пусть решетка L удовлетворяет тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P) и (M). Пусть множество $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$ $\vee$-порождает L, решетка L имеет слабое свойство Σ-минимальности, а частично упорядоченное множество $\langle \Sigma, \trianglelefteq_{\mathrm{D}}\rangle$ не содержит бесконечных ограниченных цепей. Тогда L вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,T$ для некоторого дерева T.*

Доказательство. Требуемое заключение следует из лемм 6.1 и 6.2 и предложения 6.3. $\square$

Теорема 7.2. *Для конечной решетки L следующие условия равносильны:*
(i) *L вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,T$ для некоторого конечного дерева T;*
(ii) *L вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,T$ для некоторого дерева T;*
(iii) *L удовлетворяет тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P) и (M).*

Доказательство. (i) очевидным образом влечет (ii). Согласно предложениям 3.4, 4.3 и 5.3 (ii) влечет (iii).

Пусть конечная решетка L удовлетворяет тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P) и (M). Возьмем $\Sigma = \mathrm{J}(L)$. Конечное множество Σ, очевидно, $\vee$-порождает решетку L. Согласно следствию 3.6 L не содержит D-циклов. Следовательно, Σ удовлетворяет всем требованиям теоремы 7.1. Более того, так как L не содержит D-циклов, дерево T_L, построенное в предыдущем параграфе, конечно. По теореме 7.1 L вложима в решетку $\mathrm{Sub}\,T_L$. Поэтому (iii) влечет (i). $\square$

Из доказанной только что теоремы немедленно получаем основной результат настоящей работы.

Следствие 7.3. *Класс $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$ аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток и поэтому образуют псевдомногообразие.*

§ 8. *n*-Арные деревья

В этом параграфе мы предложим синтаксическое описание конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток полурешеток, являющихся n-арными деревьями, для любого фиксированного $0 < n < \omega$. Пусть $0 < n < \omega$. Дерево $\langle T, \leq\rangle$ является *n-арным*, если оно удовлетворяет такому свойству: для любых элементов t, t_0, …, $t_n \in T$ если $t < t_i$ для всех $i \leq n$, то $t \neq t_i \wedge t_j$ для некоторых $i < j \leq n$.

Рассмотрим следующее тождество от переменных $\langle x, x_0, \dots, x_n \rangle$, которое будем обозначать через (U_n):

$$x \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (x_i \vee x_j) = \bigvee_{k\leq n} \Big(x \wedge x_k \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (x_i \vee x_j) \Big).$$

Тождество (U_1) является, как нетрудно видеть, тождеством дистрибутивности. Доказательство следующей леммы очевидно.

Лемма 8.1. *Неравенство*

$$x \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (x_i \vee x_j) \geq \bigvee_{k\leq n} \Big(x \wedge x_k \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (x_i \vee x_j) \Big)$$

верно в любой решетке.

Предложение 8.2. *Пусть L — решетка, $0 < n < \omega$ и $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$. Рассмотрим следующие утверждения о L и Σ.*

(i) *Решетка L удовлетворяет тождеству* (U_n).

(ii) *Для любого $a \in \Sigma$ и любых a_0, …, $a_n \in L$ если $a \leq a_i \vee a_j$ для всех $i < j \leq n$, то $a \leq a_k$ для некоторого $k \leq n$.*

Тогда (i) *влечет* (ii). *Если Σ $\vee$-порождает L, то* (ii) *влечет* (i).

Доказательство. Покажем сначала, что (i) влечет (ii). Пусть L удовлетворяет тождеству (U_n), и пусть элемент $a \in \Sigma$ и элементы $a_0, \dots, a_n \in L$ удовлетворяют всем требованиям (ii). Значение терма, находящегося в левой части тождества (U_n), при подстановке $\langle a, a_0, \dots, a_n \rangle$ равно a. Поэтому и значение терма, находящегося в правой части тождества (U_n), при той же подстановке должно быть равно a. Элемент a неразложим. Поэтому a совпадает со значением одного из слагаемых из правой части (U_n) при подстановке $\langle a, a_0, \dots, a_n \rangle$, т. е. существует $k \leq n$ такой, что $a = a \wedge a_k \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (a_i \vee a_j) \leq a_k$.

Предположим, что множество Σ $\vee$-порождает L, и покажем, что (ii) влечет (i). Пусть элементы b, a_0, …, a_n принадлежат L. Поскольку Σ $\vee$-порождает L, согласно лемме 8.1 достаточно доказать, что если $a \leq b \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (a_i \vee a_j)$ для некоторого $a \in \Sigma$, то $a \leq b \wedge a_k$ для какого-то $k \leq n$. Действительно, пусть элемент $a \in \Sigma$ таков, что $a \leq b \wedge \bigwedge_{i<j\leq n} (a_i \vee a_j)$. Тогда $a \leq b$ и $a \leq a_i \vee a_j$ для всех $i < j \leq n$. Согласно (ii) $a \leq a_k$ для некоторого $k \leq n$, т. е. $a \leq b \wedge a_k$. $\square$

Предложение 8.3. *Пусть $0 < n < \omega$. Для любого дерева T решетка $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет тождеству (U_n) тогда и только тогда, когда T является n-арным деревом.*

Доказательство. По лемме 2.2 достаточно показать, что решетка $\operatorname{Sub} T$ удовлетворяет условию (ii) предложения 8.2 тогда и только тогда, когда T является n-арным деревом. Действительно, пусть $a \in T$, и пусть множества A_k, $k \leq n$, принадлежащие $\operatorname{Sub} T$, таковы, что $\{a\} \subseteq A_i + A_j$ для любого $i < j \leq n$. Предположим, что $a \notin A_k$ для всех $k \leq n$. Тогда для любых $i < j \leq n$ существуют элементы $a_{ij} \in A_i$, $a'_{ij} \in A_j$ такие, что пересечение $a = a_{ij} \wedge a'_{ij}$ нетривиально в T. Полагаем $a_i = a_{in}$ для $i < n$ и $a_n = a'_{0n}$.

Предположим, что существуют $i < j \leq n$ такие, что $a \neq a_i \wedge a_j$. Поскольку $\{a_i\}$, $\{a_j\} \in [\{a\}]^{\mathrm{D}}$, используя предложение 8.2 и лемму 4.5, получаем $\{a_i\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a_j\}$. Поскольку a_i, $a_{ij} \in A_i$ и a_j, $a'_{ij} \in A_j$, также получаем $\{a_{ij}\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a_i\}$ и $\{a_j\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a'_{ij}\}$, откуда $\{a_{ij}\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a_i\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a_j\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a'_{ij}\}$, т. е. $\{a_{ij}\} \underset{\{a\}}{\sim} \{a'_{ij}\}$ по лемме 4.4. Таким образом, $a \notin \{a_{ij}\} + \{a'_{ij}\}$; противоречие. Следовательно, $a = a_i \wedge a_j$ для всех $i < j \leq n$, и дерево T не является n-арным.

Обратно, если T не является n-арным деревом, то существуют элементы a, $a_0, \ldots, a_n \in T$ такие, что $a = a_i \wedge a_j$ для всех $i < j \leq n$. Поэтому покрытие $\{a\} \subseteq \{a_i\} + \{a_j\}$ нетривиально для любых $i < j \leq n$, что противоречит условию (ii) предложения 8.2. □

Теорема 8.4. *Пусть решетка L удовлетворяет тождествам* (T_n) *(для всех* $0 < n < \omega$*),* (P), (M) *и тождеству* (U_m) *для некоторого* $0 < m < \omega$*. Пусть множество* $\Sigma \subseteq \mathrm{J}(L)$ $\vee$*-порождает* L*, и пусть* L *обладает слабым свойством* Σ*-минимальности. Предположим, что частично упорядоченное множество* $\langle \Sigma, \trianglelefteq_{\mathrm{D}} \rangle$ *не содержит бесконечных ограниченных цепей. Тогда решетка* L *вложима в решетку* $\operatorname{Sub} T$ *для некоторого* m*-арного дерева* T*.*

Доказательство. Так как L удовлетворяет тождеству (U_m), согласно предложению 8.2 и лемме 4.5 получаем, что $|[a]^{\mathrm{D}}/\tilde{a}| \leq m$ для всякого $a \in \mathrm{J}(L)$. Следовательно, дерево T_L является m-арным. В силу предложения 6.3 L вложима в решетку $\operatorname{Sub} T$. □

Теорема 8.5. *Для конечной решетки* L *следующие условия равносильны:*

(i) L *вложима в решетку* $\operatorname{Sub} T$ *для некоторого конечного* m*-арного дерева* T*;*

(ii) L *вложима в решетку* $\operatorname{Sub} T$ *для некоторого* m*-арного дерева* T*;*

(iii) L *удовлетворяет тождествам* (T_n), $0 < n < \omega$, (P), (M) *и* (U_m).

Доказательство. (i) очевидным образом влечет (ii). Согласно предложениям 3.4, 4.3, 5.3 и 8.3 (ii) влечет (iii).

Пусть конечная решетка L удовлетворяет тождествам (T_n), $0 < n < \omega$, (P), (M) и (U_m). Возьмем $\Sigma = \mathrm{J}(L)$. Конечное множество Σ, очевидно, $\vee$-порождает решетку L. Согласно следствию 3.6 решетка L не содержит D-циклов. Таким образом, множество Σ удовлетворяет всем требованиям теоремы 8.4. Более того, так как L не содержит D-циклов, дерево T_L, построенное в предыдущем параграфе, является конечным и m-арным. По теореме 8.4 решетка L вложима в решетку $\operatorname{Sub} T_L$. Таким образом, (iii) влечет (i). □

Пусть $0 < n < \omega$ и $\mathscr{T}_n$ обозначает класс решеток, изоморфных решеткам подполурешеток полурешеток, которые являются n-арными деревьями. В качестве следствия из последней теоремы получаем следующее утверждение.

Следствие 8.6. *Класс* $\mathbf{S}(\mathscr{T}_n) \cap \mathrm{Fin}$ *аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток и поэтому является псевдомногообразием.*

§ 9. Нерешенные вопросы

Следствие 7.3 утверждает, что класс $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$ конечных решеток, вложимых в решетки подполурешеток деревьев, аксиоматизируется тождествами в классе конечных решеток.

Вопрос 1. *Является ли класс* $\mathbf{S}(\mathscr{T}) \cap \mathrm{Fin}$ *конечно аксиоматизируемым?*

Если мы не будем ограничиваться рассмотрением конечных решеток и рассмотрим класс $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ всех (не обязательно конечных) решеток, вложимых в решетки подполурешеток деревьев, то нетрудно видеть, что класс $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ замкнут относительно подрешеток, декартовых произведений и ультрапроизведений. Следовательно, $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ образует квазимногообразие.

Вопрос 2. *Является ли класс* $\mathbf{S}(\mathscr{T})$ *многообразием?*

Благодарности. Веслав Антонович Дзебяк, профессор факультета математики университета Пуэрто Рико в Маягуэсе, явился вдохновителем настоящей работы. Множество полезных бесед с Веславом Антоновичем, а также его всестороннюю поддержку и помощь, оказанную автору во время его визита в университет Пуэрто Рико в Маягуэсе в 2004/2005 учебном году, автор всегда будет помнить с благодарностью и глубокой признательностью.

Автор благодарит К. В. Адаричеву за беседы о решетках подполурешеток.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Семенова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. I. Полурешетки // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 215–230.
2. *Семенова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. II. Полугруппы с сокращением // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 436–446.
3. *Семёнова М. В.* О решетках, вложимых в решетки подполугрупп. III. Нильпотентные полугруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 40, № 1. С. 192–204.
4. *Semenova M. V.* On lattices embeddable into subsemigroup lattices. IV. Free semigroups // Semigroup Forum (accepted).
5. *Адаричева К. В.* Полудистрибутивные и коалгебраические решетки подполурешеток // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 6. С. 625–640.
6. *Libkin L., Gurvich V.* Trees as semilattices // Discrete Math. 1995. V. 145, N 1–3. P. 321–327.
7. *Cheong K. H., Jones P. R.* The lattice of convex subsemilattices of a semilattice // Semigroup Forum. 2003. V. 67, N 1. P. 111–124.
8. *Adaricheva K. V., Gorbunov V. A., Tumanov V. I.* Join-semidistributive lattices and convex geometries // Adv. Math. 2003. V. 173, N 1. P. 1–49.
9. *Репницкий В. Б.* О представлении решеток решетками подполугрупп // Изв. вузов. Математика. 1996. № 40. С. 60–70.
10. *Adaricheva K. V.* Two embedding theorems for lower bounded lattices // Algebra Universalis. 1996. V. 36, N 4. P. 425–430.
11. *Repnitskiĭ V. B.* On finite lattices which are embeddable in subsemigroup lattices // Semigroup Forum. 1993. V. 46, N 3. P. 388—397.
12. *Адаричева К. В.* Строение решеток подполурешеток // Алгебра и логика. 1991. Т. 30, № 4. С. 385–404.
13. *Freese R., Ježek J., Nation J. B.* Free lattices. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. (Mathematical Surveys and Monographs; 42).
14. *Wehrung F.* Sublattices of complete lattices with continuity conditions // Algebra Universalis. 2005. V. 53, N 2/3. P. 149–173.
15. *Huhn A. P.* Schwach distributive Verbände. I // Acta Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33, N 1–4. P. 297–305.
16. *Semenova M. V., Wehrung F.* Sublattices of lattices of order-convex sets. I. The main representation theorem // J. Algebra. 2004. V. 277, N 2. P. 825–860.

Статья поступила 6 февраля 2006 г.

Семёнова Марина Владимировна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
semenova@math.nsc.ru