*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2007. Том 48, № 4*

*УДК 517.98.22*

# ЛИПШИЦЕВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ, КОНТИНГЕНЦИИ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

**С. П. Пономарев, М. Туровска**

**Аннотация:** Доказано, что для каждого вещественного бесконечномерного нормированного пространства $Y$, каждого числа $L > 0$ и каждого не более чем счетного множества $Q \subset \mathbb{R}$ существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to Y$ с константой $L$, график которого имеет касательную всюду, в то время как $f$ недифференцируемо в любой точке из $Q$.

**Ключевые слова:** контингенция (касательный конус), липшицево отображение, дифференцируемость, регуляризация по Стеклову.

## 1. Основные определения

Пусть $X$, $Y$ — вещественные нормированные пространства. Векторы вида $(0, \beta) \in X \times Y$, $\beta \neq 0$, будем называть *вертикальными* в $X \times Y$. Через $\operatorname{cl} M$ обозначается замыкание $M$ и через $0_X$ — нулевой элемент в $X$.

Определение 1.1 [1]. Пусть $\varnothing \neq M \subset Z$, где $Z$ — вещественное нормированное пространство, и пусть $z \in \operatorname{cl} M$. Множество

$$\{v \in Z : \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}}, z_n \in M, z_n \to z, \exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda_n > 0 : \lim_{n\to\infty} \lambda_n (z_n - z) = v\} \quad (1)$$

называют *касательным конусом* к $M$ в точке $z$ и обозначают через $\operatorname{Tan}(M, z)$. Элементы из $\operatorname{Tan}(M, z)$ называют *касательными векторами* к $M$ в $z$ (другие определения $\operatorname{Tan}(M, z)$ см., например, в [2–5]). Множество $\operatorname{Tan}(M, z)$ называют также *контингенцией* к $M$ в $z$ [2, 5]. В дальнейшем для краткости мы будем использовать термин «контингенция».

Известно, что $\operatorname{Tan}(M, z)$ — непустое замкнутое подмножество в $Z$ и $0_Z \in \operatorname{Tan}(M, z)$.

Через $G(f)$ будем обозначать график отображения $f$.

**Теорема 1.1** [1]. *Если отображение $f : X \to Y$ дифференцируемо*[1)] *в точке $x_0 \in X$, то $\operatorname{Tan}(G(f), (x_0, f(x_0)))$ — линейное подпространство в $X \times Y$ и $\operatorname{Tan}(G(f), (x_0, f(x_0))) = G(f'(x_0))$.*

Напомним утверждение, в некотором смысле обратное к теореме 1.1, в котором говорится о том, когда непрерывность отображения и некоторые свойства контингенции влекут дифференцируемость.

Обозначим через $p_X : X \times Y \to X$ и $p_Y : X \times Y \to Y$ естественные проекции.

[1)] Всюду ниже дифференцируемость понимается в смысле Фреше.

**Теорема 1.2** [4, 6]. *Пусть* $\dim X < \infty$, $\dim Y < \infty$ *и* $U \subset X$ *— непустое открытое множество. Допустим, что* $f : U \to Y$ *непрерывно в точке* $x_0 \in U$ *и* $T = \mathrm{Tan}(G(f), (x_0, f(x_0)))$ *— линейное подпространство в* $X \times Y$ *без вертикальных векторов. Тогда*

(a) $f$ *дифференцируемо в* $x_0$;

(b) $f'(x_0) = p_Y \circ (p_X|_T)^{-1}$;

(c) $\|f'(x_0)\| = \sup\{\|\beta\| : (\alpha, \beta) \in T, \|\alpha\| = 1\}$.

Замечание 1.1. Утверждение (a) вытекает из теоремы 4.3.3 в [4].

Замечание 1.2. Отметим, что сочетание теорем 1.2 и 1.1 дает геометрический критерий дифференцируемости отображения в терминах контингенции в случае конечномерных пространств.

## 2. Предварительные результаты

Изложенные в этом разделе утверждения будут использованы в доказательстве основного результата (теоремы 3.3) в разд. 3.

В дальнейшем через $Y$ будем обозначать вещественное нормированное бесконечномерное пространство.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $g : [a, b] \to Y$ *— непрерывное отображение, которое является липшицевым с константой* $L$ *на каждом промежутке* $[a + \varepsilon, b]$, *где* $0 < \varepsilon < b - a$. *Тогда* $g$ *липшицево на* $[a, b]$ *с константой* $L$.

Доказательство элементарно.

Всюду далее через $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n \in Y$, будем обозначать последовательность единичных векторов, не имеющую сходящейся подпоследовательности (существование такой последовательности хорошо известно, см. также [7]). Это требование к последовательности не повлияет на общность доказательств, но упростит рассуждения.

**Лемма 2.2.** *Пусть даны* $y \in Y$ *и две последовательности вещественных чисел* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *такие, что существует*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n y + \beta_n e_n) = \gamma. \tag{2}$$

*Тогда*

(i) *если* $y = 0_Y$, *то* $\gamma = 0_Y$;

(ii) *если* $y \neq 0_Y$, *то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ *и имеет место равенство* $\gamma = \alpha y$;

(iii) *если выполнено условие одного из пп.* (i), (ii), *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Доказательство. (i) Пусть $y = 0_Y$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n e_n = 0_Y$, откуда элементарно вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, так что $\gamma = 0_Y$.

(ii) Пусть теперь $y \neq 0_Y$. Докажем, что снова $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Предположим, что это не так. Тогда возможны два случая.

Случай 1. Последовательность $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничена. Тогда $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ также ограничена (разумеется, верно и обратное). Так как неверно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, существует подпоследовательность $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\beta_{n_k} \to \beta \neq 0$. Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что $\beta_{n_k} \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и существует $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha$. Согласно (2) получаем

$$\lim_{k\to\infty} e_{n_k} = \frac{\gamma}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} y;$$

противоречие, ибо $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не содержит сходящейся подпоследовательности. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$.

Случай 2. Пусть последовательность $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ неограниченная. Тогда существует подпоследовательность $(\beta_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $|\beta_{n_k}|\to\infty$. Из (2) непосредственно следует, что последовательность $\bigl(\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}}\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена, а значит, содержит сходящуюся подпоследовательность. Не уменьшая общности, можно считать, что $(\frac{\alpha_{n_k}}{\beta_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ сходится, и пусть $\lambda$ — ее предел. Тогда из (2) вытекает, что $\lim\limits_{k\to\infty}e_{n_k}=-\lambda y$; противоречие. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. Утверждение (iii) доказано.

Наконец, из (2) и (iii) легко получить, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$, откуда $\gamma=\alpha y$, и утверждение (ii) доказано. $\square$

**Теорема 2.3.** *Для любых $y\in Y$ и $c>1$ существует отображение $\psi:[-1,1]\to Y$, $\psi(0)=0_Y$, такое, что*

• $T=\operatorname{Tan}(G(\psi),(0,0_Y))$ *— одномерное подпространство в $\mathbb{R}\times Y$ вида $T=\{\xi(1,y):\xi\in\mathbb{R}\}$;*

• *$\psi$ липшицево с константой*

$$L=L(c,y)=\max\left\{\frac{c+\|y\|}{c-1},\frac{c\|y\|+1}{c-1}\right\}. \tag{3}$$

• *$\psi$ недифференцируемо в точке $t=0$.*

Доказательство. Возьмем $y\in Y$ и $c>1$. Пусть $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n\in Y$, — последовательность, фиксированная перед леммой 2.2. Рассмотрим отображение $\psi:[-1,1]\to Y$, определенное для $t\in[0,1]$ следующим образом:

$$\psi(t)=\begin{cases}0_Y, & \text{если } t=0,\\ \frac{ct-c^{1-2n}}{c-1}e_n+\frac{c^{1-2n}-t}{c-1}y, & \text{если } t\in(c^{-2n},c^{1-2n}],\ n\in\mathbb{N},\\ \frac{c^{2-2n}-t}{c-1}e_n+\frac{ct-c^{2-2n}}{c-1}y, & \text{если } t\in(c^{1-2n},c^{2-2n}],\ n\in\mathbb{N},\end{cases} \tag{4}$$

и положим $\psi(t)=-\psi(-t)$ для $t\in[-1,0)$.

Отметим, что $\psi$ непрерывно на $[-1,1]$. Докажем, что

$$T=\operatorname{Tan}(G(\psi),(0,0_Y))=\{\xi(1,y):\xi\in\mathbb{R}\}. \tag{5}$$

Пусть $v=(\xi,\mu)\in T$. Тогда существуют последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n\in[-1,1]$, $t_n\to0$, и $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n>0$, такие, что

$$\lambda_nt_n\to\xi\quad\text{и}\quad\lambda_n\psi(t_n)\to\mu. \tag{6}$$

Пусть вначале $t_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ составлена из двух подпоследовательностей: члены первой принадлежат промежуткам вида $(c^{-2m},c^{1-2m}]$, а второй — вида $(c^{1-2m},c^{2-2m}]$. Поскольку рассуждения в обоих случаях аналогичны, ограничимся рассмотрением первого, т. е. предположим, что все $t_n$ лежат в промежутках вида $(c^{-2m},c^{1-2m}]$. Легко заметить, что найдется последовательность $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $k_n\in\mathbb{N}$, $k_n\to\infty$, такая, что $c^{-2k_n}<t_n\le c^{1-2k_n}$ для $n\in\mathbb{N}$. Запишем (6) в виде

$$\lambda_nt_n\to\xi \tag{7}$$

и

$$\lambda_n\psi(t_n)=\lambda_n\frac{ct_n-c^{1-2k_n}}{c-1}e_{k_n}+\lambda_n\frac{c^{1-2k_n}-t_n}{c-1}y\to\mu. \tag{8}$$

По лемме 2.2
$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\frac{ct_n-c^{1-2k_n}}{c-1}=0, \tag{9}$$
и из (9) и (7) получаем
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n c^{1-2k_n}}{c-1}=\frac{c\xi}{c-1}. \tag{10}$$
Следовательно, из (10) и (7) вытекает, что
$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\frac{c^{1-2k_n}-t_n}{c-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n c^{1-2k_n}}{c-1}-\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda_n t_n}{c-1}=\frac{c\xi}{c-1}-\frac{\xi}{c-1}=\xi.$$
Тем самым из (8) получаем $\mu=\xi y$, откуда $v=\xi(1,y)$.

Случай $t_n\in(c^{1-2m},c^{2-2m}]$, как отмечено, рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что (6) выполнено для $t_n<0$, $n\in\mathbb{N}$. Так как $\psi$ нечетно, имеем $\lambda_n\psi(-t_n)\to-\mu$, откуда согласно предыдущим рассуждениям получим $-\mu=(-\xi)y$ и снова $v=\xi(1,y)$.

Обратно, возьмем ненулевой вектор $v=\xi(1,y)$ и рассмотрим две последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, определенные следующим образом:
$$t_n=c^{-2n}\operatorname{sgn}\xi,\quad \lambda_n=c^{2n}|\xi|,\quad n\in\mathbb{N}.$$
Так как $\psi$ нечетно и $\psi(c^{-2n})=c^{-2n}y$, для любого $n\in\mathbb{N}$ имеем
$$\begin{aligned}\lambda_n(t_n,\psi(t_n))&=c^{2n}|\xi|(c^{-2n}\operatorname{sgn}\xi,\psi(c^{-2n}\operatorname{sgn}\xi))\\&=(\xi,c^{2n}|\xi|\operatorname{sgn}\xi\psi(c^{-2n}))=\xi(1,y)=v.\end{aligned}$$
Равенство (5) доказано.

Заметим, что $\psi$ недифференцируемо в точке $t=0$, так как предела отношения
$$\frac{\psi(c^{1-2n})}{c^{1-2n}}=e_n \tag{11}$$
при $n\to\infty$ не существует.

Поскольку $\psi|_{[0,1]}$, очевидно, кусочно дифференцируема, из (4) получаем, что
$$\psi'(t)=\begin{cases}\frac{ce_n-y}{c-1}, & \text{если } t\in(c^{-2n},c^{1-2n}],\ n\in\mathbb{N},\\ \frac{cy-e_n}{c-1}, & \text{если } t\in(c^{1-2n},c^{2-2n}],\ n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{12}$$
Отсюда по теореме о среднем вытекает, что $\psi$ липшицево на каждом промежутке $[c^{-2n},c^{2-2n}]$, $n\in\mathbb{N}$, с константой
$$L=L(c,y)=\max\left\{\frac{c+\|y\|}{c-1},\frac{c\|y\|+1}{c-1}\right\}. \tag{13}$$
Следовательно, $\psi$ липшицево с константой $L$ на каждом $[c^{-2n},1]$, $n\in\mathbb{N}$, откуда по непрерывности $\psi$ липшицево на $[0,1]$. Наконец, так как $\psi$ нечетно, оно липшицево на всем $[-1,1]$ с той же константой $L$, что и требовалось. □

Построенное выше отображение $\psi$ кусочно линейно на $[-1,1]\setminus\{0\}$. Грубо говоря, график $\psi$ имеет форму пилы, зубья которой образованы соседними отрезками, лежащими в $([-1,1]\setminus\{0\})\times Y$ (см. (4)).

В следующей теореме мы преобразуем $\psi$ в липшицево отображение $g:[-1,1]\to Y$, принадлежащее $C^1$ на $[-1,1]\setminus\{0\}$, сглаживанием каждого зубца в его малой окрестности таким образом, что регуляризованное отображение имеет в точности такое же поведение, как $\psi$, в точке $t=0$.

**Теорема 2.4.** *Для любых $y \in Y$ и $c > 1$ существует отображение $g : [-1,1] \to Y$, $g(0) = 0_Y$, такое, что*

• *$T = \operatorname{Tan}(G(g),(0,0_Y))$ — одномерное подпространство в $\mathbb{R} \times Y$ вида $T = \{\xi(1,y) : \xi \in \mathbb{R}\}$;*

• *$g$ липшицево с константой $L = L(c,y)$ (3);*

• *$g \in C^1$ на $[-1,1] \setminus \{0\}$;*

• *$g$ недифференцируемо в точке $t = 0$.*

Доказательство. Сначала построим отображение $g$ на $[0,1]$, а затем распространим его на $[-1,0)$ для получения требуемого отображения. Положим $\tilde{g} = \psi|_{[0,1]}$, где $\psi$ — отображение, определенное в теореме 2.3. Отображение $\tilde{g}$ линейно на каждом $[c^{-n}, c^{1-n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Фиксируем последовательность $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ положительных чисел такую, что промежутки $[c^{-n} - 2\delta_n, c^{-n} + 2\delta_n]$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются и содержатся в интервале $(0,1)$. Легко проверить, что достаточно взять, например, $\delta_n = \frac{c-1}{4c^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $\delta_n \to 0$. В нашем построении будем использовать известную регуляризацию по Стеклову

$$t \mapsto \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} \tilde{g}(\tau)d\tau.$$

Напомним, что регуляризация по Стеклову преобразует непрерывное отображение в отображение класса $C^1$.

Ввиду непрерывности $\tilde{g}$ имеем

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} \int\limits_{t-h}^{t+h} \tilde{g}(\tau)d\tau = \tilde{g}(t)$$

равномерно по $t$ на каждом компакте в $(0,1)$. Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ можно фиксировать положительное число $h_n < \delta_n$ такое, что

$$\forall t \in [c^{-n} - \delta_n, c^{-n} + \delta_n] \qquad \left\| \frac{1}{2h_n} \int\limits_{t-h_n}^{t+h_n} \tilde{g}(\tau)d\tau - \tilde{g}(t) \right\| \le \delta_n c^{-n}. \tag{14}$$

Рассмотрим отображение $\varphi : [0,1] \to Y$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} \tilde{g}(t), & \text{если } t \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [c^{-n} - 2h_n, c^{-n} + 2h_n], \\ \frac{1}{2h_n} \int\limits_{t-h_n}^{t+h_n} \tilde{g}(\tau)d\tau, & \text{если } t \in [c^{-n} - 2h_n, c^{-n} + 2h_n],\ n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{15}$$

и докажем, что оно липшицево с той же константой $L$, определенной в (3), и принадлежит классу $C^1$ на $(0,1]$.

Так как $\tilde{g}$ линейно на $[c^{-n}, c^{1-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, легко увидеть, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [c^{-n} - 2h_n, c^{-n} - h_n] \cup [c^{-n} + h_n, c^{-n} + 2h_n]$ будет

$$\varphi(t) = \frac{1}{2h_n} \int\limits_{t-h_n}^{t+h_n} \tilde{g}(\tau)d\tau = \tilde{g}(t). \tag{16}$$

Далее, для любого $t \in [c^{-n} - h_n, c^{-n} + h_n]$ и любого $\Delta t$, $0 < |\Delta t| < h_n$, ввиду (15) имеем

$$\frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2h_n}\left(\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t+h_n}^{t+h_n+\Delta t} \tilde{g}(\tau)d\tau - \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-h_n}^{t-h_n+\Delta t} \tilde{g}(\tau)\,d\tau\right). \qquad (17)$$

Без особого труда из (4) можно получить, что для любого $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, множество $\tilde{g}([\varepsilon, 1])$ лежит в конечномерном подпространстве в $Y$. Поэтому мы можем использовать обычный интеграл Римана в регуляризации по Стеклову.

Так как $\tilde{g}$ непрерывно, из (17), полагая $\Delta t \to 0$, получаем

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{\tilde{g}(t+h_n) - \tilde{g}(t-h_n)}{2h_n} \quad \text{для } t \in [c^{-n} - h_n, c^{-n} + h_n].$$

Тем самым для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [c^{-n} - h_n, c^{-n} + h_n] \quad \left\|\frac{d\varphi}{dt}(t)\right\| = \frac{\|\tilde{g}(t+h_n) - \tilde{g}(t-h_n)\|}{2h_n} = \frac{\|\psi(t+h_n) - \psi(t-h_n)\|}{2h_n} \le L. \qquad (18)$$

Из (18), (15), (16) выводим, что

(a) $\varphi$ липшицево на $[c^{-n} - h_n, c^{-n} + h_n]$, $n \in \mathbb{N}$, с константой $L$;

(b) $\varphi$ класса $C^1$ на $[c^{-n} - 2h_n, c^{-n} + 2h_n]$, $n \in \mathbb{N}$, как регуляризация по Стеклову непрерывной функции;

(c) $\varphi$ класса $C^\infty$ на исходном промежутке $[c^{-1} + h_1, 1]$ и на каждом промежутке $[c^{-n-1} + h_{n+1}, c^{-n} - h_n]$, $n \in \mathbb{N}$, потому что $\varphi$ совпадает с $\tilde{g}$ на этих промежутках.

Из свойств (a), (b), (c), (14) вытекает, что $\varphi$ класса $C^1$ на $(0, 1]$ и непрерывно на $[0, 1]$. По лемме 2.1 отображение $\varphi$ липшицево на $[0, 1]$ с константой $L$.

Покажем, что $\varphi$ недифференцируемо в точке $t = 0$. Имеем

$$\frac{\varphi(c^{1-2n}) - \varphi(0)}{c^{1-2n}} = \frac{\varphi(c^{1-2n})}{c^{1-2n}} = \frac{\tilde{g}(c^{1-2n})}{c^{1-2n}} + \frac{\varphi(c^{1-2n}) - \tilde{g}(c^{1-2n})}{c^{1-2n}}. \qquad (19)$$

Ввиду (14), (15)

$$\frac{\|\varphi(c^{1-2n}) - \tilde{g}(c^{1-2n})\|}{c^{1-2n}} \le \frac{\delta_{2n-1} \cdot c^{1-2n}}{c^{1-2n}} = \delta_{2n-1} \to 0$$

при $n \to \infty$. С другой стороны, из (4), (15) (ср. (11)) вытекает, что отношение

$$\frac{\tilde{g}(c^{1-2n})}{c^{1-2n}} = \frac{\psi(c^{1-2n})}{c^{1-2n}} = e_n$$

не имеет предела при $n \to \infty$. Тем самым из (19) заключаем, что $\varphi$ недифференцируемо в точке $t = 0$.

Остается доказать, что

$$\operatorname{Tan}(G(\varphi), (0, 0_Y)) = \{\xi(1, y) : \xi \ge 0\}. \qquad (20)$$

Пусть $(\xi, \mu) \in \operatorname{Tan}(G(\varphi), (0, 0_Y))$, $(\xi, \mu) \ne (0, 0_Y)$. Тогда существуют последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \in (0, 1]$, $t_n \to 0$, и $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > 0$, такие, что

$$\lambda_n t_n \to \xi \quad \text{и} \quad \lambda_n \varphi(t_n) \to \mu. \qquad (21)$$

Если последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, члены которой лежат в промежутках вида $[c^{-m-1}+h_{m+1}, c^{-m}-h_m]$, $m\in\mathbb{N}$, то $\varphi(t_{n_k})=\tilde{g}(t_{n_k})$. При $\lambda_{n_k}t_{n_k}\to\xi$ и $\lambda_{n_k}\varphi(t_{n_k})=\lambda_{n_k}\tilde{g}(t_{n_k})\to\mu$ ввиду (5) получаем, что $\mu=\xi y$.

Предположим, что существует $n_0\in\mathbb{N}$ такое, что для каждого $n\geq n_0$ члены последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ принадлежат интервалам вида $(c^{-m}-h_m, c^{-m}+h_m)$, $m\in\mathbb{N}$. Тогда найдется последовательность натуральных чисел $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $t_n\in[c^{-s_n}-h_{s_n}, c^{-s_n}+h_{s_n}]$ для $n\geq n_0$. Заметим, что так как $t_n\to 0$, имеем $s_n\to\infty$. Запишем вторую часть в (21) так:

$$\lambda_n\varphi(t_n)=\lambda_n\tilde{g}(t_n)+\lambda_n t_n\frac{\varphi(t_n)-\tilde{g}(t_n)}{t_n}\to\mu,\quad n\to\infty. \tag{22}$$

Используя (14) и (15), получим

$$\frac{\|\varphi(t_n)-\tilde{g}(t_n)\|}{t_n}\leq\frac{\delta_{s_n}c^{-s_n}}{t_n}\leq\frac{\delta_{s_n}c^{-s_n}}{c^{-s_n}-h_{s_n}}\leq\frac{\delta_{s_n}c^{-s_n}}{c^{-s_n}-\delta_{s_n}}<\frac{\delta_{s_n}c^{-s_n}}{\delta_{s_n}}=c^{-s_n}, \tag{23}$$

поэтому $c^{-s_n}-2\delta_{s_n}>0$. Переходя в (23) к пределу при $n\to\infty$, с учетом (22) выводим, что $\lambda_n\tilde{g}(t_n)\to\mu$.

Поскольку $\operatorname{Tan}(G(\tilde{g}),(0,0_Y))=\{\xi(1,y):\xi\in\mathbb{R}\}$, имеем $\mu=\xi y$. Тем самым мы доказали, что

$$\operatorname{Tan}(G(\varphi),(0,0_Y))\subset\{\xi(1,y):\xi\geq 0\}. \tag{24}$$

Для доказательства обратного включения возьмем вектор $\xi(1,y)$, $\xi>0$. Полагая $t_n=c^{-2n}$ и $\lambda_n=c^{2n}\xi$ для $n\in\mathbb{N}$, имеем $\lambda_n t_n=\xi$ и

$$\lambda_n\varphi(t_n)=c^{2n}\xi\varphi(c^{-2n})=\xi c^{2n}\tilde{g}(c^{-2n})+\xi c^{2n}(\varphi(c^{-2n})-\tilde{g}(c^{-2n})).$$

Ввиду (14), (15) получаем

$$c^{2n}\|\varphi(c^{-2n})-\tilde{g}(c^{-2n})\|\leq c^{2n}\delta_{2n}c^{-2n}=\delta_{2n}\to 0$$

при $n\to\infty$. Из (5) вытекает, что $c^{2n}\tilde{g}(c^{-2n})\to y$, следовательно, $\lambda_n(t_n,\varphi(t_n))\to\xi(1,y)$. Тем самым мы доказали, что

$$\{\xi(1,y):\xi\geq 0\}\subset\operatorname{Tan}(G(\varphi),(0,0_Y)). \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) влекут (20).

Определим, наконец, отображение $g:[-1,1]\to Y$ следующим образом:

$$g(t)=\begin{cases}\varphi(t), & \text{если } t\in[0,1],\\ -\varphi(-t), & \text{если } t\in[-1,0).\end{cases} \tag{26}$$

Легко проверить, что $g$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

## 3. Основные результаты

Следующее утверждение носит общий характер, хотя для нас будет играть вспомогательную роль. А именно, его частный случай будет использован в доказательстве теоремы 3.3.

**Теорема 3.1.** *Пусть $X$, $Y$ — вещественные нормированные пространства и $U \subset X$ — открытое множество. Пусть $F : U \to Y$, $g : U \to Y$ — отображения, непрерывные в точке $x_0 \in U$. Допустим, что $F$ дифференцируемо в точке $x_0$ и $T_g = \operatorname{Tan}(G(g), (x_0, g(x_0)))$ — линейное подпространство в $X \times Y$.*

*Тогда $T_{F+g} = \operatorname{Tan}(G(F+g), (x_0, (F+g)(x_0)))$ — линейное подпространство в $X \times Y$. Кроме того,*

$$T_{F+g} = \{(u, F'(x_0)u + v) : (u, v) \in T_g\}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $(u, w) \in T_{F+g}$. Без уменьшения общности можно считать, что $(u, w)$ — ненулевой вектор. Тогда согласно определению 1.1 существуют последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0 \neq x_n \in U$, $x_n \to x_0$, и последовательность положительных чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $\lambda_n(x_n - x_0) \to u$ и

$$\lambda_n(F(x_n) - F(x_0)) + \lambda_n(g(x_n) - g(x_0)) \to w \quad \text{при } n \to \infty. \tag{28}$$

Так как $F$ дифференцируемо в точке $x_0$, имеем

$$\lambda_n(F(x_n) - F(x_0)) = F'(x_0)(\lambda_n(x_n - x_0)) + \lambda_n o(\|x_n - x_0\|) \to F'(x_0)u \tag{29}$$

при $n \to \infty$. Из (28) и (29) вытекает, что существует предел $v = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(g(x_n) - g(x_0))$. Поэтому $w = F'(x_0)u + v$, где $(u, v) \in T_g$.

Ввиду произвольности вектора $(u, w) \in T_{F+g}$ получаем

$$T_{F+g} \subset \{(u, F'(x_0)u + v) : (u, v) \in T_g\}. \tag{30}$$

Для доказательства противоположного включения возьмем вектор $(u, F'(x_0)u + v)$, где $(u, v) \in T_g$. Вновь согласно определению 1.1 существуют последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in U$, $x_n \to x_0$, и последовательность $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > 0$, такие, что

$$\lambda_n(x_n - x_0) \to u \quad \text{и} \quad \lambda_n(g(x_n) - g(x_0)) \to v.$$

Так как $F$ дифференцируемо в точке $x_0$, имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \lambda_n((F+g)(x_n) - (F+g)(x_0)) \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \lambda_n(F'(x_0)(x_n - x_0) + o(\|x_n - x_0\|)) + \lim_{n\to\infty} \lambda_n(g(x_n) - g(x_0)) \\
&\qquad = \lim_{n\to\infty} (F'(x_0)(\lambda_n(x_n - x_0)) + \lambda_n o(\|x_n - x_0\|)) + v = F'(x_0)u + v.
\end{aligned}$$

Обратно,

$$\{(u, F'(x_0)u + v) : (u, v) \in T_g\} \subset T_{F+g}. \tag{31}$$

Наконец, (30) и (31) дают $\{(u, F'(x_0)u + v) : (u, v) \in T_g\} = T_{F+g}$. $\square$

**Следствие 3.1.** *В условиях теоремы 3.1 пространства $T_g$ и $T_{F+g}$ изоморфны.*

Действительно, легко проверить, что отображение $H : T_g \to T_{F+g}$, $H(u, v) = (u, F'(x_0)u + v)$, является линейным изоморфизмом нормированных пространств.

Замечание 3.1. Если $T_g$ не содержит вертикальных векторов, то их не содержит и $T_{F+g}$.

Замечание 3.2. Если в теореме 3.1 опустить предположение о том, что $T_g$ есть линейное подпространство, то равенство (27) сохранится, однако $T_{F+g}$ уже не обязано быть линейным подпространством. Отображение $H$, определенное выше, будет тогда гомеоморфизмом $T_g$ на $T_{F+g}$, который становится линейным изоморфизмом, если $T_g$ — линейное подпространство.

**Лемма 3.2.** *Пусть $Y$ — вещественное нормированное пространство. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — равномерно ограниченная последовательность отображений $f : \mathbb{R} \to Y$, липшицевых с одной константой $L$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что все $f_n$ дифференцируемы в точке $t_0 \in \mathbb{R}$. Тогда ряд $F = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ сходится, $F$ дифференцируемо в точке $t_0$ и*

$$F'(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(t_0)}{2^n}.$$

Доказательство. Сходимость $F$ вытекает из того, что отображения $f_n$ равномерно ограничены. Для любого $h \neq 0$ имеем

$$\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t_0+h)-f_n(t_0)}{h2^n}. \tag{32}$$

Так как все $f_n$ липшицевы с одной константой $L$, ряд (32) сходится равномерно по $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ввиду дифференцируемости $f_n$ в $t_0$ получаем, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t_0)}{2^n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(t_0)}{2^n},$$

что и требовалось. □

Докажем основной результат.

**Теорема 3.3.** *Пусть $Q$ — произвольное счетное множество в $\mathbb{R}$, и пусть $Y$ — вещественное нормированное бесконечномерное пространство. Для любых $y \in Y$ и $c > 1$ существует отображение $f : \mathbb{R} \to Y$ со следующими свойствами:*

- *$f$ липшицево с константой $L = \max\{\frac{c+\|y\|}{c-1}, \frac{c\|y\|+1}{c-1}\}$ (см. (3));*
- *для любого $t \in \mathbb{R}$ контингенция $\mathrm{Tan}(G(f), (t, f(t)))$ является одномерным линейным подпространством в $\mathbb{R} \times Y$ (очевидно, без вертикальных векторов, так как $f$ липшицево);*
- *$f$ недифференцируемо в каждой точке из $Q$.*

Доказательство. Определим отображение $F : \mathbb{R} \to Y$, полагая

$$F(t) = \begin{cases} g(t), & \text{если } t \in [-1, 1], \\ y, & \text{если } t > 1, \\ -y, & \text{если } t < -1, \end{cases} \tag{33}$$

где $g : [-1, 1] \to Y$ — отображение, определенное в теореме 2.4 для заданных $y$ и $c$. Отметим, что $g(1) = y$, $g(-1) = -y$, поэтому отображение $F$ непрерывно. Сгладим $F$ в точках $t = -1$ и $t = 1$ (точнее, в некоторых окрестностях этих точек), используя регуляризацию по Стеклову

$$F^*(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } t \in (-\infty, -1-2h) \cup (-1+2h, 1-2h) \cup (1+2h, \infty), \\ \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} F(\tau)d\tau, & \text{если } t \in [-1-2h, -1+2h] \cup [1-2h, 1+2h], \end{cases}$$

с некоторым фиксированным положительным числом $h < \frac{c-1}{4c}$. Выбор $h$ достаточно малым необходим для сохранения $g$ неизменным и равным $F^*$ в некоторой окрестности точки $t = 0$.

Отображение $F^*$ липшицево с константой $L$ из (3). Это обосновывается рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве теоремы 2.4, где установлено, что липшицева константа $L$ регуляризованного отношения $g$ может быть взята той же, что и для начального отображения $\psi$. Из (33) и свойств $g$ вытекает, что $F^*$ принадлежит классу $C^1$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и недифференцируемо в точке $t=0$. Кроме того, для любого $t\in\mathbb{R}$ контингенция $\operatorname{Tan}(G(F^*),(t,F^*(t)))$ является одномерным линейным подпространством, очевидно, не включающим вертикальных векторов, потому что $F^*$ липшицево.

Запишем множество $Q$ в виде последовательности $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с попарно различными членами и определим отображение $f:\mathbb{R}\to Y$, полагая

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(t)}{2^n},\quad \text{где } f_n(t)=F^*(t-\xi_n). \tag{34}$$

Отображение $f$ липшицево, потому что таковыми являются $f_n$ с одной константой $L$. Отметим также, что последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена, поскольку $F^*$ ограничено.

Докажем, что контингенция к графику $f$ является одномерным линейным подпространством в $\mathbb{R}\times Y$ без вертикальных векторов. Возможны два случая.

• Пусть $t\in\mathbb{R}\setminus Q$. Тогда каждое отображение $f_n$ в (34) дифференцируемо в точке $t$. Поэтому выполнены условия леммы 3.2, следовательно, $f$ дифференцируемо в точке $t$. По теореме 1.1 контингенция к $G(f)$ в $(t,f(t))$ представляет собой одномерное подпространство в $\mathbb{R}\times Y$.

• Пусть $t\in Q$. Тогда существует единственное $m\in\mathbb{N}$ такое, что $t=\xi_m$. Отображение $f_m$ недифференцируемо в точке $\xi_m$, а все остальные $f_n$, $n\neq m$, дифференцируемы в $\xi_m$. Запишем

$$f(t)=\frac{f_m(t)}{2^m}+\sum_{n\neq m}\frac{f_n(t)}{2^n}. \tag{35}$$

По лемме 3.2 сумма ряда в (35) является отображением, дифференцируемым в точке $\xi_m$. Далее, согласно конструкции $f_m$ контингенция к $G(f_m)$ в точке $(\xi_m,f(\xi_m))$ является одномерным линейным подпространством. Поэтому по теореме 3.1 контингенция к $G(f)$ — это одномерное линейное подпространство (очевидно, без вертикальных векторов).

Остается заключить из (35), что $f$ недифференцируемо в точке $\xi_m$, так как таковым является $f_m$, и доказательство завершено. □

Замечание 3.3. Очевидно, что случай конечного множества $Q$ проще и в этом случае нет необходимости обращаться к лемме 3.2.

Замечание 3.4. Теорема 3.3 может быть, конечно, сформулирована и без выбора вектора $y\in Y$, числа $c>1$ и упоминания константы Липшица (3). Эти параметры приведены с единственной целью показать связь с теоремами 2.3 и 2.4. Ясно, что если некоторая функция $g:\mathbb{R}\to Y$ обладает двумя последними свойствами, описанными в формулировке теоремы 3.3, то всякая функция вида $\lambda g$, $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, также обладает этим свойством.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Schwartz L.* Analyse mathématique. Paris: Hermann, 1967. T. I.
2. *Bouligand G.* Introduction à la géométrie infinitésimale directe. Paris: Librairie Vuibert, 1932.
3. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verl., 1968.

4. *Flett T. M.* Differential analysis. London: Cambridge Univ. Press, 1980.
5. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa; Lwów; New York: Stechert, 1937.
6. *Turowska M.* A geometric condition for differentiability // Tatra Mt. Math. Publ. 2004. V. 28, N 2. P. 179–186.
7. *Kottman C.* Subset of the unit ball that separated by more than one // Studia Math. 1975. V. 53, N 1. P. 15–27.

*Статья поступила 11 апреля 2006 г.*

*Пономарев Станислав Петрович (Stanislav Ponomarev),*
*Туровска Малгожата (Małgorzata Turowska)*
*Institute of Mathematics, Pomeranian Academy in Słupsk*
*Arciszewskiego 22b, 76-200 Słupsk, Poland*
stapon@pap.edu.pl, turowska@pap.edu.pl