Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С НЕКОТОРЫМИ ПОДГРУППАМИ ПРОСТЫХ ИНДЕКСОВ

В. С. Монахов, В. Н. Тютянов

Аннотация: Устанавливается разрешимость конечной группы, в которой всякая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса.

Ключевые слова: конечная группа, максимальная подгруппа, индекс подгруппы, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, подгруппа Фиттинга.

В работе [1] содержится вопрос 5.5: пусть всякая собственная не максимальная подгруппа конечной группы G содержится в подгруппе простого индекса группы G; верно ли, что G — разрешимая группа?

Положительный ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема. *Если G — конечная группа, у которой любая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса, то фактор-группа $G/F(G)$ сверхразрешима.*

Обратно, если M — максимальная подгруппа конечной группы G и $G/F(G)$ сверхразрешима, то каждая не максимальная подгруппа в фактор-группе G/M_G содержится в подгруппе простого индекса.

Здесь $F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы G, а $M_G = \bigcap_{g \in G} M^g$ — ядро подгруппы M в группе G.

Доказательство. Для более компактного проведения индуктивных рассуждений будем использовать фрагменты теории формаций. Пусть $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ — формации всех нильпотентных и сверхразрешимых групп, а $\mathfrak{NU}$ — их формационное произведение (см. [2, 3]). По определению формационного произведения включение $G \in \mathfrak{NU}$ равносильно тому, что $G/F(G)$ сверхразрешима.

Вначале докажем первое утверждение. Пусть в конечной группе G любая собственная не максимальная подгруппа содержится в подгруппе простого индекса. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Ясно, что условия наследуются всеми фактор-группами группы G. По индукции все нетривиальные фактор-группы группы G принадлежат $\mathfrak{NU}$. Поскольку $\mathfrak{NU}$ — насыщенная формация, то в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа N и подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G единична.

Предположим, что группа G неразрешима. Пусть p — наибольший простой делитель порядка подгруппы G и P — силовская p-подгруппа группы G. Так как $p > 2$, то по теореме IV.7.4 из [4] подгруппа P не максимальна в G. По условию теоремы существует подгруппа K такая, что $P \subseteq K$ и $|G : K| = t$ — простое

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского фонда фундаментальных исследований (коды проектов Ф04МС–060 и Ф05–341).

число. Теперь представление группы G перестановками на левых смежных классах по подгруппе K будет иметь степень $t < p$, поэтому фактор-группа G/K_G изоморфна подгруппе симметрической группы S_t степени t и $P \subseteq K_G$. В частности, группа G непростая, и $N \subseteq K_G$.

Пусть q — наибольший простой делитель порядка подгруппы N и Q — силовская q-подгруппа N. По лемме Фраттини $G = NN_G(Q)$ и $N_G(Q)$ — собственная подгруппа в группе G.

Если подгруппа $N_G(Q)$ не максимальна в G, то по условию теоремы существует подгруппа H такая, что $N_G(Q) \subseteq H$ и $|G : H| = r$ — простое число. Если $H_G \neq E$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq H_G$ и $G = NN_G(Q) \subseteq NH = H$; противоречие. Поэтому $H_G = E$ и представление перестановками на левых смежных классах по подгруппе H будет точным степени r. Группа G изоморфна подгруппе симметрической группы S_r и r — наибольший простой делитель порядка группы G. Из равенства $G = NH$ получаем, что $r = |G : H| = |N : N \cap H|$, т. е. r делит порядок подгруппы N и $q = r$. Поскольку в группе S_r силовская r-подгруппа имеет простой порядок r, то $Q \subseteq N \cap H$ и индекс $|G : H|$ отличен от r; противоречие.

Следовательно, подгруппа $N_G(Q)$ максимальна в G. Допустим, что $N_N(Q) \subseteq \Phi(N_G(Q))$. Тогда $N_N(Q)$ — нильпотентная подгруппа. Так как $q > 3$, по теореме Томпсона (см. [5, теорема X.8.13]), в N имеется нормальная подгруппа индекса q; противоречие. Поэтому допущение неверно и в $N_G(Q)$ существует максимальная подгруппа S такая, что $N_N(Q)$ не содержится в S. Ясно, что в этом случае $N_G(Q) = SN_N(Q)$ и $G = NN_G(Q) = NN_N(Q)S = NS$. Но подгруппа S не максимальна в G и по условию теоремы существует подгруппа M такая, что $S \subseteq M$ и $|G : M| = m$ — простое число. Теперь опять $G = NM$, $M_G = E$ и представление группы G перестановками на левых смежных классах по подгруппе M будет точным степени m. Поскольку $m = |G : M| = |N : N \cap M|$, то $q = m$ и Q — силовская подгруппа группы G простого порядка q. Так как $Q \subseteq N$, то N — простая группа, содержащая подгруппу $N \cap M$ простого индекса q. Из теоремы V.21.1 в [4] следует, что $N_G(Q)$ — группа Фробениуса с циклическим q-дополнением, коммутант G' является простой неабелевой подгруппой и фактор-группа G/G' циклическая порядка, делящего $q - 1$. Ясно, что $G' = N$.

Кроме того, $C_G(N)$ — нормальная подгруппа в G и $N \cap C_G(N) = Z(N) = E$. Поэтому $C_G(N) = E$ и группа G изоморфна подгруппе $\mathrm{Aut}N$. Из работ [6, 7] получаем следующие изоморфизмы для простой группы N и ее максимальной подгруппы $N \cap M$ простого индекса q:

(1) $N \simeq M_{11}$, $N \cap M \simeq M_{10}$, $q = 11$ или $N \simeq M_{23}$, $N \cap M \simeq M_{22}$, $q = 23$,

(2) $N \simeq A_q$, $N \cap M \simeq A_{q-1}$,

(3) $N \simeq PSL_2(11)$, $N \cap M \simeq A_5$, $q = 11$,

(4) $N \simeq PSL_n(s)$, $q = \frac{s^n-1}{s-1} > 3$, n — простое число.

Рассмотрим отдельно каждый случай.

(1) $N \in \{M_{11}, M_{23}\}$. Так как $\mathrm{Aut}(N) = N$ [8], то $G = N$, что невозможно.

(2) $N \simeq A_q$. В этом случае $G \simeq S_q$ и $G = N \leftthreetimes T$, где $|T| = 2$. Тогда $N_G(Q) = (Q \leftthreetimes P) \leftthreetimes T$, $E \neq P \subseteq N$ и $G = N(QT)$. Очевидно, что подгруппа QT не максимальна в G. Поэтому $QT \subseteq L$ и $|G : L| = r \in \pi(G) \setminus \{q\}$. Так как $G = N(QT)$, то $G = NL$. Следовательно, подгруппа N содержит подгруппу индекса $r < q$, что невозможно.

(3) $N \simeq PSL_2(11)$, $q = 11$. В этом случае $G \simeq PGL_2(11) = PSL_2(11) \leftthreetimes Z_2$ (см. [8]). Здесь Z_2 — циклическая подгруппа порядка 2. Противоречие

получается, как в п. (2).

(4) $N \simeq PSL_n(s)$, $\frac{s^n-1}{s-1} = q$, n — простое число и $N \lhd G \leq \mathrm{Aut}(N)$. Если $n = 2$, то $\frac{s^2-1}{s-1} = s+1 = q$ и $s = 2$, $q = 3$; противоречие. Так как n — простое число, то $\{s, n\} \neq \{2, 6\}$. Из теоремы IX.8.3 в [9] следует, что существует число r, примитивное по отношению к паре $\{s, n\}$. Это означает, что r делит $s^n - 1$ и не делит $s^i - 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n-1$. В частности, r делит $\frac{s^n-1}{s-1} = q$. Поэтому существует единственное примитивное число по отношению к паре $\{s, n\}$, равное q.

Порядок цикла Зингера в $PSL_n(s)$ равен

$$\frac{s^n - 1}{(n, s-1)(s-1)} = \frac{q}{(n, s-1)}$$

и является целым числом. Если $(n, s-1) = n$, то $q = n$, а значит, q не примитивно по отношению к паре $\{s, n\}$, что невозможно. Следовательно, $(n, s-1) = 1$. Так как порядок группы диагональных автоморфизмов группы $PSL_n(q)$ равен $(n, s-1)$, то она тривиальна. Поэтому группа G является расщепляемым расширением N (см., например, [10, предложение 2.2.3]). Теперь противоречие получается, как в п. (2).

Итак, разрешимость группы G доказана. Так как в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа N и подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ группы G единична, то G — примитивная группа и $G = N \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M с единичным ядром. Пусть M_1 — произвольная максимальная подгруппа в M. По условию теоремы существует подгруппа A такая, что $M_1 \subseteq A$ и $|G : A| = a$ — простое число. Если $A_G = E$, то подгруппы M и A сопряжены между собой по теореме II.3.9 из [4]. Теперь $|N| = |G : A| = a$ и G сверхразрешима. Если $A_G \neq E$, то $N \subseteq A$ и

$$a = |G : A| = |NM : A| = |NM : N(M \cap A)| = |M : M_1|.$$

По теореме VI.9.5 из [4] подгруппа M сверхразрешима. Первое утверждение доказано.

Проверим второе утверждение. Предположим, что M — максимальная подгруппа конечной группы G и фактор-группа $G/F(G)$ сверхразрешима. Пусть $\overline{A} = A/M_G$ — не максимальная подгруппа группы $\overline{G} = G/M_G$. Так как $\overline{G}$ — примитивная группа, то $\overline{G} = F(\overline{G}) \rtimes \overline{M}$, $\overline{M} = M/M_G$ и $\overline{M}$ сверхразрешима. Если $F(\overline{G})\overline{A} \neq \overline{G}$, то $F(\overline{G})\overline{A}/F(\overline{G})$ является собственной подгруппой сверхразрешимой группы $\overline{G}/F(\overline{G})$. По теореме VI.9.5 из [4] подгруппа $F(\overline{G})\overline{A}/F(\overline{G})$ содержится в подгруппе простого индекса. Поэтому и подгруппа $\overline{A}$ содержится в подгруппе простого индекса группы $\overline{G}$. Если $F(\overline{G})\overline{A} = \overline{G}$, то $\overline{A}$ — максимальная подгруппа группы $\overline{G}$; противоречие. Теорема доказана.

Пример. В группе $SL(2, 3)$ силовская 2-подгруппа нормальна, а силовская 3-подгруппа не максимальна и не содержится ни в какой подгруппе простого индекса.

Этот пример указывает на то, что существует группа, являющаяся расширением нильпотентной группы с помощью сверхразрешимой, в которой имеется не максимальная подгруппа, не содержащаяся ни в одной подгруппе простого индекса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berkovich Y., Kazarin L.* Indices of elements and normal structure of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 283, N 3. P. 564–583.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
5. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
6. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, N 2. P. 304–311.
7. *Казарин Л. С.* О произведении конечных групп // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 528–531.
8. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
9. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1982.
10. *Kleidman P., Liebeck M.* The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London. Math. Soc. Lecture; 129).

Статья поступила 9 февраля 2006 г.

Монахов Виктор Степанович, Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский университет им. Ф. Скорины,
ул. Советская, 104. Гомель 246019, Беларусь
monakhov@gsu.unibel.by, tyutyanov@front.ru