Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.518.15+517.518.17+517.518.23+517.987.1

ФОРМУЛЫ ПЛОЩАДИ И КОПЛОЩАДИ ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ КЛАССОВ СОБОЛЕВА СО ЗНАЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М. Б. Карманова

Аннотация: Доказаны метрическая дифференцируемость и аппроксимативная метрическая дифференцируемость широких классов отображений, принимающих значения в метрическом пространстве, включая классы Соболева. В качестве приложения этих результатов выведены метрические аналоги формул площади и коплощади.

Ключевые слова: метрическое пространство, метрическая дифференцируемость, отображение класса Соболева, формула площади, формула коплощади.

Работа посвящена доказательству метрической дифференцируемости, а также формул площади и коплощади для широких классов отображений, принимающих значения в метрическом пространстве. Известно, что многие важные результаты геометрической теории меры в $\mathbb{R}^n$ основаны на дифференциальных свойствах отображений. Если же отображение принимает значения в метрическом пространстве, в котором может не быть линейной структуры, то дифференциальные свойства нельзя интерпретировать в классических терминах. Адекватная характеристика локального поведения отображений из $\mathbb{R}^n$ в метрическое пространство $\mathbb{X}$ введена в работе [1] и называется *метрической дифференцируемостью.* В [1] доказано, что липшицевы отображения, действующие из евклидова пространства в метрическое, дифференцируемы в «метрическом» смысле почти всюду и «метрический дифференциал» отображения характеризует локальное искажение меры.

Возникает задача исследования дифференциальных свойств более широких классов отображений сравнительно с липшицевыми, в частности, отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве, введенных в работе Ю. Г. Решетняка [2].

В настоящей работе мы доказываем метрическую дифференцируемость, или m-дифференцируемость, широких классов отображений (см. теоремы 1.7 и 1.15 и определение 1.12) и показываем, что для ряда общих классов отображений, включая классы Соболева, со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{X}$ справедливы аналоги формул площади и коплощади (см. теоремы 3.2, 3.8, следствия 3.4, 3.9), хорошо известных в геометрической теории меры [3–6].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05–01–00482) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–8526.2006.1).

Работа состоит из трех параграфов. В § 1 вводится понятие m-дифференцируемости, доказывается m-теорема Степанова: m-дифференцируемость отображений f таких, что

$$\overline{\lim_{y\to x}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} < \infty \tag{0.1}$$

почти всюду; вводится понятие аппроксимативной m-дифференцируемости и доказывается, что отображение $f : E \to \mathbb{X}$, обладающее почти всюду свойством

$$\operatorname{ap} \overline{\lim_{y\to x}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} < \infty, \tag{0.2}$$

аппроксимативно m-дифференцируемо почти всюду.

В § 2 приводятся определения и основные свойства отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве. В частности, установлено, что шкала отображений классов Соболева разбивается на два класса, где отображения одного класса обладают свойством (0.1), а другого — (0.2).

В § 3 мы получаем формулу площади, формулы замены переменной в интеграле Лебега и формулу коплощади для отображений, удовлетворяющих условию (0.1) или (0.2) почти всюду. В частности, установлено, что все эти формулы справедливы для отображений классов Соболева.

Автор выражает благодарность профессору С. К. Водопьянову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и неоценимую помощь в реализации различных возможностей, возникших в ходе решения задачи.

§ 1. Метрический дифференциал и его применения

В этом параграфе мы определим понятие (аппроксимативного) m-дифференциала и докажем (аппроксимативную) m-дифференцируемость широких классов отображений. Приведем прежде всего несколько используемых ниже понятий и утверждений.

1.1. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Точка $x \in E$ называется *точкой плотности множества* E, если

$$\lim_{\substack{B_r \ni x \\ r\to 0}} \frac{|E \cap B_r|_*}{|B_r|} = 1, \tag{1.1}$$

где $|\cdot|_*$ — внешняя мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, а B_r — шар радиуса r (не обязательно с центром в точке x).

Следующие два утверждения — переформулировки результатов из [7].

1.2. Теорема. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, то* (1.1) *справедливо для $|\cdot|$-почти всех $x \in E$.*

1.3. Теорема. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество. Тогда для каждой точки плотности x множества E и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если $|y-x| < \delta$, то существует такое $z \in E$, что $|y-z| < \varepsilon|y-x|$.*

1.4. Определение [1]. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Отображение $f : E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *метрически дифференцируемо*, или *m-дифференцируемо*, в точке $x \in E$, если существует такая полунорма $L(x)$ на $\mathbb{R}^n$, что выполняется соотношение

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - L(x)(z-y) = o(|z-x| + |y-x|) \tag{1.2}$$

при $z, y \to x$, $z, y \in E$. Полунорма $L(x)$ называется *метрическим дифференциалом*, или *m-дифференциалом*, отображения f в точке x и обозначается символом $MD(f, x)$.

Класс липшицевых отображений, определенных на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и принимающих значения в $\mathbb{X}$, будем обозначать через $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$.

Кирхгейм доказал следующий результат.

1.5. **m-Теорема Радемахера** [1]. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда f является m-дифференцируемым почти всюду на E.*

Теорема 1.5 обобщает классическую теорему Радемахера о дифференцируемости почти всюду липшицевых отображений.

1.6. Определение. Точка $x \in E$ называется *точкой линейной плотности в направлении u*, где $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, если x является точкой плотности множества $E \cap x + \mathbb{R}u$, где $x + \mathbb{R}u = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + ru$ для некоторого $r \in \mathbb{R}\}$. Здесь $\mathbb{S}^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$.

Основной результат работы составляет

1.7. **m-Теорема Степанова.** *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f : E \to \mathbb{X}$ — отображение с метрическим искажением*

$$\varlimsup_{y \to x,\, y \in E} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x - y|} < \infty$$

для почти всех $x \in E$. Тогда отображение f является m-дифференцируемым почти всюду на E.

Доказательство. Обозначим $\Sigma_f = \Big\{x \in E : \varlimsup\limits_{y \to x,\, y \in E} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} = \infty\Big\}$. Из условия теоремы следует, что $|\Sigma_f| = 0$.

Шаг 1. Так как локальное искажение отображения f конечно почти всюду, то каждая точка $x \in E \setminus \Sigma_f$ принадлежит множествам

$$A_k = \left\{x \in E : \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x - y|} \leq k \ \forall y \in B(x, k^{-1}) \cap E\right\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

начиная с некоторого $k_0(x)$. Заметим, что $A_k \subset A_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$, покроем A_k, за исключением множества нулевой меры, счетной дизъюнктной системой открытых шаров $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, диаметры которых не превосходят $\frac{1}{k}$, и рассмотрим измеримые множества $A_{k,j} = (\overline{A}_k \cap B_j) \setminus \Sigma_f$. Тогда ограничение $g_{k,j} = f|_{A_k \cap B_j}$ удовлетворяет условию Липшица для всех $k, j \in \mathbb{N}$ и продолжается на множество $A_{k,j}$ с сохранением константы Липшица единственным образом. Обозначим такое продолжение символом $f_{k,j}$.

Шаг 2. Покажем, что продолжение «корректно», т. е. в точках множества E его значение будет совпадать со значением отображения f. Фиксируем $k, j \in \mathbb{N}$. Предположим, что пересечение множества $D_k = (\overline{A}_k \setminus A_k) \cap E$ с каким-то из множеств $A_{k,j}$ непусто.

Рассмотрим $x \in D_k \cap A_{k,j}$. Тогда по определению множеств $\{A_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ получим $x \in A_p$ для некоторого $p > k$. Так как x — внутренняя точка шара B_j и предельная для A_k, то пересечение $B(x, r) \cap A_k \cap B_j$, $r > 0$, непусто. Положим $r < \frac{1}{2p}$. С одной стороны, так как f липшицево на этом пересечении, оно продолжается с сохранением константы Липшица на замыкание единственным образом. С другой стороны, $A_k \subset A_p$, и поэтому $B(x,r)\cap A_k\cap B_j \subset B(x,r)\cap A_p$, причем f липшицево и на $B(x,r)\cap A_p$. Из единственности продолжения по непрерывности на замыкание вытекает, что значение такого продолжения в точке x совпадает с $f(x)$. Таким образом, значение отображения $f_{k,j}$ в точках множества $A_{k,j}\cap E$ совпадает со значениями отображения f в этих точках для всех $k,j\in\mathbb{N}$.

Шаг 3. По теореме 1.5 соотношение (1.2) выполняется почти всюду на $A_{k,j}$. Осталось проверить его выполнение для точек плотности $x\in A_{k,j}$, когда $y,z\in E$ — произвольные точки из некоторой окрестности x (которые могут и не лежать в $A_{k,j}$).

Шаг 4. Для сокращения записи обозначим множество $A_{k,j}$ символом A, а отображение $f_{k,j}$ — символом f. По определению множества A неравенство $d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z))\le k|y-z|$ справедливо для всех точек $y\in A$ и $z\in B(y,k^{-1})\cap E$.

Рассмотрим точку плотности $x\in A$ множества A и точки $z_1,z_2\in E$, лежащие в некоторой окрестности x. Тогда существуют такие $y_i\in A$, что $|y_i-z_i|=o(|x-z_i|)$ при $z_i\to x$, $i=1,2$, для которых справедливо (1.2). В достаточно малой окрестности точки x в силу выбора y_1,y_2, m-дифференцируемости f на A и свойств полунормы $MD(f,x)$ имеем

$$\begin{aligned}|d_{\mathbb{X}}(f(z_1),f(z_2))-MD(f,x)(z_1-z_2)|&\le|d_{\mathbb{X}}(f(z_1),f(z_2))-d_{\mathbb{X}}(f(y_1),f(y_2))|\\+|d_{\mathbb{X}}(f(y_1),f(y_2))-MD(f,x)(y_1-y_2)|&+|MD(f,x)(y_1-y_2)-MD(f,x)(z_1-z_2)|\\&\le o(|z_1-x|+|z_2-x|),\end{aligned}$$

что и доказывает m-дифференцируемость на E отображения $f_{k,j}$ в почти всех $x\in A_{k,j}$ и, следовательно, m-дифференцируемость на E отображения f в почти всех точках множества $A_{k,j}\cap E$. Так как $\bigl|E\setminus\bigcup\limits_{k,j\in\mathbb{N}}A_{k,j}\bigr|=0$, то f является m-дифференцируемым почти всюду на E. Теорема доказана.

1.8. Определение. Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Будем говорить, что отображение $f:E\to\mathbb{X}$ *принадлежит классу* $\Phi(E,\mathbb{X})$, если существует не более чем счетный дизъюнктный набор измеримых множеств $\{A_k\}$ такой, что для всех $k\in\mathbb{N}$ отображение $f|_{A_k}$ является липшицевым на A_k и $|\Sigma_f|=0$, где

$$\Sigma_f=E\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k.$$

1.9. Замечание. Из доказательства теоремы 1.7 следует, что все отображения, обладающие свойством (0.1) почти всюду, принадлежат классу Φ.

1.10. Определение. Пусть E — измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, а $g:E\to\mathbb{R}$. Положим $K=\operatorname{ap}\varlimsup\limits_{\substack{y\to x,\\ y,\,x\in E}}g(y)$, если

$$K=\inf\Bigl\{s\in\mathbb{R}:\lim_{r\to0}\frac{|B(x,r)\cap\{y\in E:g(y)>s\}|}{|B(x,r)|}=0\Bigr\}.$$

1.11. Теорема. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство и $f:E\to(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — отображение такое, что*

$$\operatorname{ap}\varlimsup_{y\to x}\frac{d_{\mathbb{X}}(f(x),f(y))}{|x-y|}<\infty$$

для почти всех $x \in E$. Тогда $f \in \Phi(E, \mathbb{X})$.

Доказательство с очевидными изменениями (замена области значений f — евклидова пространства — метрическим) повторяет доказательство теоремы 3.1.8 из [5].

1.12. Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Отображение $f : E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *аппроксимативно метрически дифференцируемо*, или *аппроксимативно m-дифференцируемо*, в точке $x \in E$, если существует полунорма $L(x)$ на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$\operatorname{ap}\lim_{y \to x} \frac{L(x)(x-y) - d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} = 0,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$A_\varepsilon = \left\{ y \in E : \left| \frac{L(x)(x-y) - d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))}{|x-y|} \right| < \varepsilon \right\}$$

имеет плотность 1 в точке x. Полунорма $L(x)$ называется *аппроксимативным метрическим дифференциалом*, или *аппроксимативным m-дифференциалом*, отображения f в точке x и обозначается символом $MD_{\mathrm{ap}}(f, x)$.

1.13. Замечание. Легко показать, что всякая точка плотности является точкой линейной плотности по почти всем направлениям $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Следовательно, в точках плотности множества E аппроксимативный m-дифференциал определен единственным образом.

1.14. Замечание. Если отображение m-дифференцируемо, то, полагая $z = x$ в определении 1.4, получаем, что в этом случае аппроксимативный m-дифференциал совпадает с обычным m-дифференциалом.

1.15. Теорема. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство и $f \in \Phi(E, \mathbb{X})$. Тогда f аппроксимативно m-дифференцируемо почти всюду на E.*

Доказательство. По определению 1.8 $E = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k \cup \Sigma_f$, где Σ_f — множество нулевой меры, причем на каждом A_k отображение f удовлетворяет условию Липшица. Значит, по теореме 1.5 f является m-дифференцируемым почти всюду на каждом из этих множеств, т. е.

$$|d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) - MD(f, x)(y-z)| = o(|y-x| + |z-x|), \quad y, z \to x, \ y, z \in A_k,$$

для почти всех $x \in A_k$. При этом m-дифференциал определяется единственным образом. Последнее соотношение может не выполняться только при $y, z \in E \setminus A_k$. Но так как в любой точке плотности $x \in A_k$ множества A_k дополнение $E \setminus A_k$ имеет плотность 0, то отображение f аппроксимативно m-дифференцируемо почти всюду. При этом почти во всех точках плотности $x \in A_k$ множества A_k на каждом направлении $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ значение аппроксимативного m-дифференциала $MD_{\mathrm{ap}}(f, x)(u)$ совпадает с $MD(f|_{A_k}, x)(u)$.

§ 2. Дифференциальные свойства отображений классов Соболева

2.1. Определение [2]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$*, если выполнены следующие условия:

1) для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $f_z : \Omega \ni x \mapsto d_{\mathbb{X}}(f(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$;

2) существует вещественная функция w класса $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от выбора точки $z \in \mathbb{X}$, такая, что $|\nabla f_z(x)| \le w(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Заметим, что в случае, когда $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ со стандартной (евклидовой) метрикой, определение 2.1 эквивалентно классическому.

Доказательство m-дифференцируемости и аппроксимативной m-дифференцируемости и распространение результатов теорем 3.2 и 3.8 на отображения классов Соболева основываются на формулируемых ниже свойствах.

2.2. Определение. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{X}$ называется *квазимонотонным*, если существует такая константа $K \ge 1$, что $\operatorname{diam}(f(B(x,r))) \le K \operatorname{diam}(f(S(x,r)))$ для $B(x,r) \Subset \Omega$.

2.3. Определение. Пусть $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, D — подмножество $\mathbb{X}$. *n-Мерная мера Хаусдорфа* множества D равна

$$\mathscr{H}^n(D) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\omega_n}{2^n} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E_i)^n : \operatorname{diam} E_i < \delta, D \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big\}.$$

2.4. Теорема. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Пусть, кроме того, $f : \Omega \to \mathbb{X}$ — непрерывное квазимонотонное отображение класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ или непрерывное отображение класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, $q > n$. Тогда*

1) [8] *отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина: $\mathscr{H}^n(f(A)) = 0$ при $|A| = 0$ и образ измеримого множества при отображении f измерим;*

2) [9] *отображение f удовлетворяет соотношению* (0.1) *для почти всех $x \in \Omega$.*

2.5. Замечание. В теореме 2.4 (п. 1) наибольший интерес представляет случай квазимонотонных отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$. Случай гомеоморфного отображения класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ рассмотрен в работе [10]. Случай непрерывных квазимонотонных отображений того же класса доказан в работе [11]. Новое доказательство этого результата получено в [8, 12]. Как показывает теорема 2.4, новый метод «работает» для более широкого класса метрических пространств, см. также [13].

2.6. Теорема [14]. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — сепарабельное метрическое пространство. Пусть также отображение $f : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу Соболева $W^1_q(\Omega; \mathbb{X})$, $q \ge 1$, а $U \Subset \Omega$ — компактная область. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $A \subset U$ такое, что $|U \setminus A| < \varepsilon$ и сужение $f|_A$ удовлетворяет условию Липшица.*

Стандартными рассуждениями из теоремы 2.6 получаем

2.7. Свойство. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — сепарабельное метрическое пространство. Пусть также отображение $f : \Omega \to \mathbb{X}$ принадлежит классу Соболева $W^1_q(\Omega; \mathbb{X})$, $q \ge 1$. Тогда $f \in \Phi(\Omega, \mathbb{X})$.*

2.8. Замечание. Из вышеприведенных результатов вытекает, что многие геометрические свойства отображений некоторых классов Соболева $f : \Omega \to \mathbb{X}$ сводятся к случаю липшицевых отображений и отображений, удовлетворяющих условию (0.1) для почти всех $x \in \Omega$.

§ 3. Приложения к отображениям классов Соболева: формулы площади и коплощади

В этом параграфе мы доказываем формулы площади и коплощади для широких классов отображений.

3.1. Определение [1]. Пусть P — полунорма на $\mathbb{R}^n$. Тогда ее *якобиан* равен

$$\mathscr{J}(P) = \omega_n n\biggl(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} [P(x)]^{-n}\, d\mathscr{H}^{n-1}(x)\biggr)^{-1}.$$

Покажем, что из формулы площади для липшицевых отображений [1, 15] вытекает следующая

3.2. Теорема (формула замены переменной для отображений класса Φ). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \Phi(E, \mathbb{X})$. Тогда

1) неотрицательная функция $g : f(E) \to [0,\infty]$ $\mathscr{H}^n$-измерима на $f(E)$ тогда и только тогда, когда функция $E \ni x \mapsto g(f(x))\mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x)) \in [0,\infty]$ измерима по Лебегу на E, при этом

$$\int\limits_E g(f(x))\mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} g(y)N(f,y,E\setminus\Sigma_f)\,d\mathscr{H}^n(y), \tag{3.1}$$

где $\Sigma_f = E \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $|\Sigma_f| = 0$, а $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ определены в 1.8;

2) функция $u : f(E) \to \mathbb{E}$ (здесь $\mathbb{E}$ может быть произвольным банаховым пространством) $\mathscr{H}^n$-интегрируема на $f(E)$ тогда и только тогда, когда функция $E \ni x \mapsto u(f(x))\mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x)) \in \mathbb{E}$ интегрируема по Лебегу на E, при этом

$$\int\limits_E u(f(x))\mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} u(y)N(f,y,E\setminus\Sigma_f)\,d\mathscr{H}^n(y), \tag{3.2}$$

где $\Sigma_f = E \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $|\Sigma_f| = 0$, а $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ определены в 1.8.

Если отображение f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, то $\Sigma_f = \varnothing$ в (3.1) и (3.2).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $g = \chi_T$, где $T \subset f(E)$ — произвольное измеримое множество. Общий случай получается стандартным предельным переходом.

Заметим, что по определению класса $\Phi(E,\mathbb{X})$ множество E можно представить в виде $E = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \cup \Sigma_f$, $|\Sigma_f| = 0$, таким образом, что $A_k \cap \Sigma_f = \varnothing$, $A_k \cap A_l = \varnothing$ при $k \neq l$ и отображение f является липшицевым на каждом A_k. Далее, по теореме 1.15 отображение f аппроксимативно m-дифференцируемо почти всюду, причем $MD_{\mathrm{ap}}(f,x) = MD(f|_{A_k}, x)$ для почти всех $x \in E$.

Обозначим $A = f^{-1}(T)$. Заметим, что

$$T = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (f(A_k)\cap T) \cup (f(\Sigma_f)\cap T).$$

Тогда

$$A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [f^{-1}(f(A_k)\cap T)\cap A_k] \cup [f^{-1}(f(\Sigma_f)\cap T)\cap \Sigma_f].$$

Измеримые множества $S_k = f(A_k) \cap T$ можно исчерпать замкнутыми множествами $\{B_{k,l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ такими, что $\mathscr{H}^n\big(S_k \setminus \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} B_{k,l}\big) = 0$. Следовательно, $A_k \cap f^{-1}\big(\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} B_{k,l}\big)$ измеримо. Для множества $\Sigma_k = S_k \setminus \bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} B_{k,l}$ существует борелевское множество нулевой меры, содержащее Σ_k. Пересечение D_k прообраза этого множества и A_k измеримо. Тогда по формуле площади для липшицевых отображений [1, 15] множество D_k и, следовательно, $f^{-1}(\Sigma_k) \cap A_k \subset D_k$ не влияют на интеграл в левой части, следовательно, множество A без ограничения общности можно считать измеримым и имеет место равенство

$$\int\limits_{A_k\cap f^{-1}(S_k)} \mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{A_k\cap A} \mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A_k\cap A)\,d\mathscr{H}^n(y).$$

Суммируя по всем $k \in \mathbb{N}$, получаем

$$\int\limits_{A\setminus\Sigma_f} \mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A\setminus\Sigma_f)\,d\mathscr{H}^n(y).$$

Следовательно, так как $|\Sigma_f| = 0$, то

$$\int\limits_{A} \mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{A\setminus\Sigma_f} \mathscr{J}(MD_{\mathrm{ap}}(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A\setminus\Sigma_f)\,d\mathscr{H}^n(y),$$

т. е. имеет место формула (3.1).

Очевидно, что если f обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, то $N(f,y,A\setminus\Sigma_f) = N(f,y,A)$ для $\mathscr{H}^n$-почти всех $y \in \mathbb{X}$. Теорема доказана.

3.3. Теорема. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а отображение $f : E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ удовлетворяет условиям m-теоремы Степанова* 1.7. *Тогда для f справедливы утверждения теоремы* 3.2, *где $MD_{\mathrm{ap}}(f,x) = MD(f,x)$, а множество нулевой меры равно*

$$\Sigma = \Big(E \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \cup \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \setminus \bigcup_{i,k\in\mathbb{N}} A_{i,k}\Big).$$

Здесь $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность замкнутых множеств такая, что $\big|E \setminus \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} E_i\big| = 0$, а $\{A_{i,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ определяются для каждого E_i, $i \in \mathbb{N}$, аналогично теореме 1.7.

Доказательство. Исчерпаем множество $E \setminus \Sigma_f$ замкнутыми множествами $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ с точностью до множества Σ_0 нулевой меры. По теореме 1.7 $E_i = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{i,k}$. Из замкнутости множества E_i следует измеримость каждого $A_{i,k}$, $i,k \in \mathbb{N}$. На каждом пересечении $E_i \cap A_{i,k}$ отображение f локально липшицево, т. е. выполняются условия теоремы 3.2. Утверждение теоремы следует из того, что $E \setminus (\Sigma_f \cup \Sigma_0) = \bigcup\limits_{i,k} (E_i \cap A_{i,k})$.

3.4. Следствие. 1. *Из теорем* 2.4, 3.3, 1.7 *следует, что непрерывные квазимонотонные отображения класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ и непрерывные отображения класса Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, $q > n$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, а $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, m-дифференцируемы почти всюду* *и для них справедливы утверждения теоремы* 3.2 *с* $MD_{\text{ap}}(f,x) = MD(f,x)$ *и* $\Sigma_f = \varnothing$.

2. *Из свойства* 2.7 *и теоремы* 1.15 *вытекает, что отображения* $f : \Omega \to \mathbb{X}$ *класса Соболева* $W_q^1(\Omega; \mathbb{X})$, $q \geq 1$, *где* $\mathbb{X}$ *— сепарабельное метрическое пространство, аппроксимативно* m*-дифференцируемы почти всюду и для них справедливы утверждения теоремы* 3.2.

3.5. Определение. Метрическое пространство $\mathbb{X}$ называется $\mathscr{H}^k$*-спрямляемым*, если существует не более чем счетный набор липшицевых отображений $\alpha_i : A_i \to \mathbb{X}$, определенных на измеримых множествах в $\mathbb{R}^k$, такой, что

$$\mathscr{H}^k\Big(\mathbb{X} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i(A_i)\Big) = 0.$$

3.6. Определение [16]. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а m-дифференцируемое в точке x отображение $f : E \to \mathbb{X}$ такое, что $\dim\{u \in \mathbb{R}^n : MD(f,x)(u) = 0\} = n - k$. Определим значение *метрического коэффициента коплощади*, или m*-коэффициента коплощади*, в точке x как

$$\mathscr{J}_k(MD(f,x)) = \omega_k k\bigg(\int\limits_{\mathbb{S}^{k-1}} [MD(f,x)(u)]^{-k}\, d\mathscr{H}^{k-1}(u)\bigg)^{-1},$$

где $x \in E$, а $\mathbb{S}^{k-1}$ — $(k-1)$-мерная сфера пространства $\ker(MD(f,x))^{\perp}$. Полагаем $\mathscr{J}_k(MD(f,x)) = 0$, если $\dim\{u \in \mathbb{R}^n : MD(f,x)(u) = 0\} > n - k$.

3.7. Формула коплощади [16]. *Пусть* E *— измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *—* $\mathscr{H}^k$*-спрямляемое метрическое пространство,* $n \geq k$, *а* $f \in \operatorname{Lip}(E, \mathbb{X})$. *Тогда для всякой измеримой функции* $g : E \to \mathbb{E}$ ($\mathbb{E}$ *— произвольное банахово пространство) при условии, что* $g(x)\mathscr{J}_k(MD(f,x))$ *интегрируема, справедлива формула*

$$\int\limits_E g(x)\mathscr{J}_k(MD(f,x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{X}} d\mathscr{H}^k(s) \int\limits_{f^{-1}(s)} g(u)\, d\mathscr{H}^{n-k}(u). \tag{3.3}$$

Утверждение теоремы 3.7 обобщается на случай отображения, определенного на $\mathscr{H}^n$-спрямляемом метрическом пространстве $\mathbb{Y}$. Это является обобщением результата работы [17], в которой формула коплощади доказана для липшицевых отображений $f : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^k$.

3.8. Теорема (формула коплощади для класса Φ). *Пусть* E *— измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *—* $\mathscr{H}^k$*-спрямляемое метрическое пространство,* $n \geq k$, *а* $f \in \Phi(E, \mathbb{X})$. *Тогда для всякой измеримой функции* $g : E \to \mathbb{E}$ (E *— произвольное банахово пространство) при условии, что* $g(x)\mathscr{J}_k(MD_{\text{ap}}(f,x))$ *интегрируема, справедлива формула*

$$\int\limits_E g(x)\mathscr{J}_k(MD_{\text{ap}}(f,x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{X}} d\mathscr{H}^k(s) \int\limits_{f^{-1}(s)\setminus\Sigma_f} g(u)\, d\mathscr{H}^{n-k}(u), \tag{3.4}$$

где множество нулевой меры Σ_f *определено в* 1.8.

Формула (3.4) получается из (3.3) стандартными рассуждениями.

3.9. Следствие. *Пусть* Ω *— ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, *а* $\mathbb{X}$ *— метрическое пространство. Из замечания* 1.9 *и свойства* 2.7 *следует, что утверждение теоремы* 3.8 *справедливо для*

1) *непрерывных квазимонотонных отображений класса Соболева* $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$ *и непрерывных отображений класса Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{X})$, $q > n$, *с* $MD_{\mathrm{ap}}(f, x) = MD(f, x)$;

2) *отображений классов Соболева* $W^1_q(\Omega; \mathbb{X})$, $q \geq 1$, *где* $\mathbb{X}$ *— сепарабельное метрическое пространство.*

Заметим, что в случае отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k \leq n$, существует характеристика геометрии поверхностей уровня соболевских отображений, более тонкая, чем мера Хаусдорфа $\mathscr{H}^{n-k}$ [18–21].

Дальнейшее развитие результатов данной статьи изложено в [22, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kirchheim B.* Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121, N 1. P. 113–123.

2. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.

3. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton: CRC Press, 1992.

4. *Lin F., Yang X.* Geometric measure theory — an introduction. Beijing a. o.: Sci. Press, 2002.

5. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1969.

6. *Giaquinta M., Modica G., Souček J.* Cartesian currents in the calculus of variations. Berlin: Springer-Verl., 1998. V. I, II.

7. *Stein E. M.* Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.

8. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.

9. *Водопьянов С. К.* Топологические и геометрические свойства отображений классов Соболева с суммируемым якобианом. I // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 23–48.

10. *Решетняк Ю. Г.* Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 5. С. 886–919.

11. *Malý J., Martio O.* Lusin's condition (N) and mappings of the class $W^{1,n}$ // J. Reine Angew. Math. 1995. V. 458. P. 19–36.

12. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.

13. *Heinonen J., Koskela P., Shanmugalingam N., Tyson J.* Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings // J. Anal. Math. 2001. V. 85. P. 87–139.

14. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Владикавказск. мат. журн. 2003. Т. 5, № 1. С. 1–14.

15. *Карманова М. Б.* Метрическая теорема Радемахера и формула площади для отображений со значениями в метрическом пространстве // Вестн. НГУ. 2006. Т. 6, № 4. С. 50–69.

16. *Карманова М. Б.* Метрическая дифференцируемость отображений и геометрическая теория меры // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 443–447.

17. *Ambrosio L., Kirchheim B.* Rectifiable sets in metric and Banach spaces // Math. Ann. 2000. V. 318, N 3. P. 527–555.

18. *Hajłasz P.* Sobolev mappings, co-area formula and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 227–254.

19. *Malý J.* Coarea integration in metric spaces // Proc. of the Spring School. Prague, 2002. (B. Opic, J. Rakosnik, eds.). Nonlinear analysis, function spaces and applications. Prague: Math. Inst. Acad. Sci. Czech Republic, 2003. V. 7. P. 142–192.

20. *Malý J.* Coarea properties of Sobolev functions // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis. (Teistungen, 2001). Birkhäuser: Basel, 2003. P. 371–381.

21. *Malý J., Swanson D., Ziemer W. P.* The coarea formula for Sobolev mappings // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355, N 2. P. 477–492.

22. *Karmanova M.* Formulas of geometric measure theory on rectifiable metric spaces // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 103–136.

23. *Карманова М. Б.* Спрямляемые множества и формула коплощади для отображений со значениями в метрическом пространстве // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 1. С. 16–21.

Статья поступила 10 апреля 2006 г.

Карманова Мария Борисовна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru