*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2007. Том 48, № 4*

*УДК 512.816.4*

# МОДЕЛЬ КАРТАНА КАНОНИЧЕСКОГО ВЕКТОРНОГО РАССЛОЕНИЯ НАД ГРАССМАНОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ

**Б. Йованович**

**Аннотация:** Дано представление канонических векторных расслоений $\mathscr{C}_{n,p}$ над грассмановым многообразием $G(n,p)$ в виде некомпактных аффинных симметрических пространств, а также построена модель Картана в группе евклидовых движений $SE(n)$.

**Ключевые слова:** симметрическое пространство, каноническое векторное расслоение, модель Картана.

## 1. Введение

Модель Картана грассмановых многообразий $G(n,p)$ в специальной ортогональной группе $SO(n)$ хорошо известна. Мы устанавливаем представление канонических векторных расслоений $\mathscr{C}_{n,p}$ над $G(n,p)$ в виде симметрических пространств, а именно $\mathscr{C}_{n,p} = SE(n)/S(O(p) \times O(n-p)) \otimes_s \mathbb{R}^{n-p}$, и строим модель Картана в группе евклидовых движений $SE(n)$. Насколько нам известно, этот интересный факт ранее не отмечался (см., например, [1, 2]).

Другое однородное представление канонических линейных расслоений над проективными пространствами можно найти в [3]. Модель типа Картана листа Мёбиуса в $SE(2)$ недавно получена в [4]. Заметим, что согласно [5] касательные расслоения грассмановых многообразий имеют естественную структуру аффинного пространства.

## 2. Грассмановы многообразия

Точками грассманова многообразия $G(n,p)$ по определению являются $p$-мерные плоскости $\pi$, проходящие через начало координат пространства $\mathbb{R}^n$. В частности, для $p=1$ получаем проективное пространство $\mathbb{RP}^{n-1}$, состоящее из прямых, проходящих через начало координат в $\mathbb{R}^n$.

Грассмановы многообразия дают основные примеры компактных симметрических пространств. Обычное действие группы $SO(n)$ на $\mathbb{R}^n$ порождает транзитивное действие на множестве всех $p$-мерных плоскостей, т. е. на $G(n,p)$. Пусть $E_1 = (1,0,\dots,0)^T$, $E_n = (0,\dots,0,1)^T$.

Рассмотрим плоскость $\pi_0 = \operatorname{Span}\{E_1,\dots,E_p\}$. Тогда группа изотропий плоскости $\pi_0$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad A \in O(p), \quad B \in O(q), \quad \det A \cdot \det B = 1.$$

The research was supported by the Serbian Ministry of Science, Project 144014, Geometry and Topology of Manifolds and Integrable Dynamical Systems.

Следовательно, $G(n,p) \cong SO(n)/S(O(p) \times O(q))$. Далее, пусть

$$J_{p,q} = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_p & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_q \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{I}_k = \mathrm{diag}(1,1,\dots,1)$. Тогда $\sigma_0 : SO(n) \to SO(n)$, $\sigma_0(R) = J_{p,q}RJ_{p,q}$, — инволютивный автоморфизм с $SO(n)^{\sigma_0} = S(O(p) \times O(q))$ и набор $(SO(n), S(O(p) \times O(q)), \sigma_0)$ представляет собой симметрическое пространство.

**Модель Картана грассмановых многообразий.** Пусть

$$\mathfrak{d}_p^0 = \mathrm{Span}\{E_i \wedge E_j \mid 1 \le i \le p < j \le n = p+q\} \subset so(n).$$

Тогда $so(n) = so(p) + so(q) + \mathfrak{d}_p^0$ — симметрическое разложение алгебры Ли $so(n)$ на собственные подпространства с собственными значениями $(+1)$ и $(-1)$ дифференциала $d\sigma_0$ в единице группы $\mathbb{I}_n$. Рассмотрим $\sigma_0$-скрещенное сопряженное действие $A \bullet R = AR\sigma_0(A)^{-1}$, $R, A \in SO(n)$. Пусть

$$\mathscr{Q}_0 = \{R \in SO(n) \mid \sigma_0(R) = R^{-1}\} = \{R \in SO(n) \mid (RJ_{p,q})^2 = \mathbb{I}_n\}.$$

Легко проверить, что $\mathscr{Q}_0$ инвариантно относительно $\sigma_0$-скрещенных действий.

Орбита единицы

$$\mathscr{S}_p^0 = SO(n) \bullet \mathbb{I}_n = \{A\sigma(A)^{-1} = AJ_{p,q}A^{-1}J_{p,q} \mid A \in SO(n)\}$$

изоморфна $G(n,p)$ как $SO(n)$-пространство относительно $\sigma_0$-скрещенного действия, и $\mathscr{S}_p^0$ совпадает с компонентой связности $\mathscr{Q}_0$ единицы группы (*модель Картана симметрического пространства*, см., например, [6]). Кроме того, $\mathscr{S}_p^0$ равно образу $\mathfrak{d}_p^0$ при экспоненциальном отображении.

Рассмотрим сдвиг $\mathscr{S}_p^0 \cdot J_{p,q} = \{AJ_{p,q}A^{-1} \mid A \in SO(n)\}$. Матрица $AJ_{p,q}A^{-1}$ симметрическая и имеет $-1$ собственным значением на плоскости $\pi = A \cdot \pi_0 = \mathrm{Span}\{A \cdot E_1, \dots, A \cdot E_p\}$. Тем самым диффеоморфизм $\rho_0 : \mathscr{S}_p^0 \to G(n,p)$ может быть записан в виде

$$\rho_0(R) = \pi,$$

где $\pi$ — единственная плоскость, удовлетворяющая условию $RJ_{p,q}(X) = -X$, $X \in \pi$.

**Проективные пространства.** Для $p = 1$ отображение $J_{1,q}$ является отражением $S_1$ относительно плоскости, ортогональной $E_1$. Далее, элементы $\mathfrak{d}_1^0$ могут быть взяты в виде $-\theta E_1 \wedge U$, $|U| = 1$, $U \perp E_1$. Тогда $R_{\theta,U} = \exp(-\theta E_1 \wedge U)$ — вращение в плоскости, натянутой на $E_1$ и $U$:

$$R_{\theta,U}(E_1) = \cos\theta E_1 + \sin\theta U, \quad R_{\theta,U}(U) = -\sin\theta E_1 + \cos\theta U, \tag{1}$$

которая фиксирует ортогональное дополнение к $\mathrm{Span}\{E_1, U\}$. Вращение может быть представлено как композиция: $R_{\theta,U} = S_2 \circ S_1$, где $S_2$ — отражение относительно плоскости, ортогональной вектору $V = \cos\frac{\theta}{2}E_1 + \sin\frac{\theta}{2}U$. Так как $R_{\theta,U}J_{1,q} = S_2 \circ S_1 \circ S_1 = S_2$ и $S_2(V) = -V$, получаем

$$\rho_0(R_{\theta,U}) = [V] = \left[\cos\frac{\theta}{2}E_1 + \sin\frac{\theta}{2}U\right]. \tag{2}$$

Здесь $[V]$ — прямая $\{\mu V \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

## 3. Модель Картана канонического векторного расслоения

Рассмотрим группу Ли $SE(n)$ движений в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Она представляет собой полупрямое произведение специальной ортогональной группы $SO(n)$ (вращений) и абелевой группы $\mathbb{R}^n$ (параллельных переносов): $SE(n) = SO(n) \otimes_s \mathbb{R}^n$. Мы используем следующее матричное обозначение для элементов $g \in SE(n)$:

$$g = (R, X) = \begin{pmatrix} R & X \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R \in SO(n), \quad X \in \mathbb{R}^n.$$

Алгебра Ли $se(n) = so(n) \oplus_s \mathbb{R}^n$ состоит из $(n+1)\times(n+1)$-матриц

$$\xi = (\omega, v) = \begin{pmatrix} \omega & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega \in so(n),\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Групповое умножение и скобка Ли соответствуют обыкновенному умножению и скобке Ли для матриц:

$$(R_1, X_1)\cdot(R_2, X_2) = (R_1R_2, X_1 + R_1X_2),\ [(\omega_1, v_1), (\omega_2, v_2)] = ([\omega_1, \omega_2], \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1).$$

**Лемма 1.** *Отображение $\sigma : SE(n) \to SE(n)$, заданное формулой*

$$\sigma((R, X)) = (\sigma_0(r), J_{p,q}X) = (J_{p,q}RJ_{p,q}, J_{p,q}X) \tag{3}$$

*является инволютивным автоморфизмом, и множество его неподвижных точек состоит из матриц вида*

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & X \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in O(p), \quad B \in O(q), \quad \det A \cdot \det B = 1, \quad X \in \mathbb{R}^q,$$

*т. е. $SE(n)^\sigma = S(O(p) \times O(q)) \otimes_s \mathbb{R}^q$.*

Тем самым набор $(SE(n), S(O(p) \times O(q)) \otimes_s \mathbb{R}^q, \sigma)$ есть некомпактное аффинное симметрическое пространство (мы следуем обозначениям из [1]). Дифференциал $d\sigma$ в единице $(\mathbb{I}_n, 0)$ является инволютивным автоморфизмом алгебры Ли $se(n)$. Имеем симметрическое разложение $se(n)$ на собственное подпространство с собственным значением $(+1)$ (алгебру Ли $SE(n)^\sigma$) и на собственное подпространство с собственным значением $(-1)$:

$$\mathfrak{d}_p = \operatorname{Span}\{(E_i \wedge E_j, E_k) \mid 1 \le i \le p < j \le n = p+q, 1 \le k \le p\} \cong \mathfrak{d}_p^0 \oplus \mathbb{R}^p.$$

Пусть $\mathscr{Q} = \{g = (R, Y) \in SE(n) \mid \sigma(g) = g^{-1}\}$. Множество $\mathscr{Q}$ сохраняется при $\sigma$-скрученном действии:

$$\begin{aligned}(A, X) \bullet (R, Y) &= (A, X)\cdot(R, Y)\cdot\sigma((A, X)^{-1}) \\ &= (ARJ_{p,q}A^{-1}J_{p,q}, X + AY - ARJ_{p,q}A^{-1}X).\end{aligned}$$

Модель Картана симметрических пространств обычно предлагается для редуктивных групп Ли. Аналогично получается

**Теорема 1** (модель Картана). *Орбита единицы*

$$\mathscr{S}_p = SE(n) \bullet (\mathbb{I}_n, 0) = \{(AJ_{p,q}A^{-1}J_{p,q}, X - AJ_{p,q}A^{-1}X) \mid (A, X) \in SE(n)\}$$

*изоморфна $SE(n)/SE(n)^\sigma$ как $SE(n)$-пространство относительно $\sigma$-скрещенного действия. Более того, $\mathscr{S}_p$ равно компоненте связности $\mathscr{Q}$ единицы группы и совпадает с образом $\mathfrak{d}_p$ при экспоненциальном отображении.*

**Лемма 2.** *Экспоненциальное отображение* $\exp : se(n) \to SE(n)$ *сюръективно.*

Доказательство. Простые вычисления показывают, что $\xi^m = (\omega, v)^m = (\omega^m, \omega^{m-1}v)$, $m \in \mathbb{N}$, поэтому $\exp(\xi) = (\exp(\omega), Y)$, где вектор $Y = Y_\omega(v)$ равен

$$Y_\omega(v) = v + \frac{1}{2}\omega v + \frac{1}{3!}\omega^2 v + \dots + \frac{1}{m!}\omega^{m-1}v + \dots . \tag{4}$$

Поскольку $\exp : so(n) \to SO(n)$ сюръективно, надо лишь доказать, что линейное отображение (4) для фиксированного $R \in SO(n)$ и подходящим образом выбранного $\omega$, $R = \exp(\omega)$, имеет максимальный ранг.

Пусть $e_1, \dots, e_n$ — ортогональный базис, в котором матрица $R$ имеет канонический вид $R = \operatorname{diag}(R(\theta_1), R(\theta_2), \dots, R(\theta_k), 1, 1, \dots, 1)$, где $R(\theta_i)$ — вращения в плоскостях $\operatorname{Span}\{e_{2i-1}, e_{2i}\}$:

$$R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, \quad |\theta_i| < 2\pi, \quad i = 1, \dots, k.$$

Тогда можно взять $\omega = \operatorname{diag}(\Pi(\theta_1), \Pi(\theta_2), \dots, \Pi(\theta_k), 0, 0, \dots, 0)$, где

$$\Pi(\theta_i) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_i \\ \theta_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Пусть $Y_i(v) = \langle Y_\omega(v), e_i \rangle$. Для данного $v = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ имеем

$$Y_i(v) = v_i, \quad i = 2k+1, \dots, n. \tag{5}$$

Из (4) получаем, что $Y_\omega(v)$ удовлетворяет соотношению

$$\omega Y_\omega(v) = (\exp(\omega) - \mathbb{I}_n)v \tag{6}$$

или, в координатах,

$$-\theta_i Y_{2i}(v) = \cos\theta_i v_{2i-1} - \sin\theta_i v_{2i} - v_{2i-1},$$

$$\theta_i Y_{2i-1}(v) = \sin\theta_i v_{2i-1} + \cos\theta_i v_{2i} - v_{2i}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Используя элементарные тригонометрические равенства, компоненты вектора $Y$ можно записать в виде

$$Y_{2i-1}(v) = 2\frac{\sin\frac{\theta_i}{2}}{\theta_i}\left(\cos\frac{\theta_i}{2}v_{2i-1} - \sin\frac{\theta_i}{2}v_{2i}\right), \tag{7}$$

$$Y_{2i}(v) = 2\frac{\sin\frac{\theta_i}{2}}{\theta_i}\left(\sin\frac{\theta_i}{2}v_{2i-1} + \cos\frac{\theta_i}{2}v_{2i}\right), \quad i = 1, \dots, k. \tag{8}$$

Из (5), (7), (8) вытекает, что $Y_\omega$ не имеет ядра. $\square$

Доказательство теоремы. В доказательстве теоремы мы будем следовать рассуждениям, характерным для компактных (или редуктивных) групп Ли (см., например, [6]).

**(i)** Пусть $\tau : SE(n) \to \mathscr{S}_p$ — отображение, определенное равенством $\tau(g) = g\sigma(g^{-1})$. Очевидно, что $\tau$ постоянно на левых смежных классах относительно $SE(n)^\sigma$ ($\tau(g_1) = \tau(g_2)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(g_1 g_2^{-1}) = g_1 g_2^{-1}$, т. е. $g_1 g_2^{-1} \in SE(n)^\sigma$, и что индуцированный морфизм $\hat\tau : SE(n)/SE(n)^\sigma \to \mathscr{S}_p$ биективен и обладает свойством

$$\hat\tau(g_1 \cdot g_2 SE(n)^\sigma) = g_1 \bullet \hat\tau(g_2 SE(n)^\sigma).$$

Далее, из размерностных соображений вытекает, что $\hat{\tau}$ — диффеоморфизм (это легко следует из того, что касательным пространством к $\mathscr{S}_p$ в единице группы является $\mathfrak{d}_p$, так что дифференциал $d\hat{\tau}|_{SE(n)^\sigma}$ сюръективен).

**(ii)** Предположим, что $(R, Y)$ принадлежит компоненте связности $\mathscr{Q}$ единицы группы. Тогда

$$\sigma(R, Y) = (R^{-1}, -R^{-1}Y), \quad \text{т. е.} \quad \sigma_0(R) = R^{-1} \quad \text{и} \quad J_{p,q}Y = -R^{-1}Y.$$

Напомним, что $\mathscr{S}_p^0$ совпадает с компонентой связности $\mathscr{Q}_0$ единицы группы. Поэтому $R = AJ_{p,q}A^{-1}J_{p,q}$ для некоторого $A \in SO(n)$. Тогда условие $J_{p,q}Y = -R^{-1}Y$ совпадает с условием

$$J_{p,q}(Y + J_{p,q}R^{-1}Y) = J_{p,q}(Y + AJ_{p,q}A^{-1}Y) = 0,$$

из которого вытекает, что $Y \in \pi = \rho_0(R) = A \cdot \pi_0$. С другой стороны, для $X \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$X - AJ_{p,q}A^{-1}X = 2\,\mathrm{pr}_\pi X, \tag{9}$$

где $\mathrm{pr}_\pi$ — ортогональная проекция $\pi$. Тем самым $(R, Y) \in \mathscr{S}_p$[1)]. Противоположное включение тривиально: из $g = g'\sigma(g'^{-1})$ следует, что $\sigma(g) = \sigma(g')g'^{-1} = g^{-1}$.

**(iii)** Докажем сначала включение $\exp(\mathfrak{d}_p) \subset \mathscr{S}_p$. Пусть $g = \exp(\xi)$, $\xi \in \mathfrak{d}_p$. Рассмотрим элемент $g' = \exp(\xi/2)$. Тогда

$$\tau(g') = \exp(\xi/2)\sigma(\exp(-\xi/2)) = \exp(\xi/2)\exp(\xi/2) = (g')^2 = g,$$

т. е. $g \in \mathscr{S}_p$. Здесь мы использовали тождество $\sigma(\exp(\xi)) = \exp(d\sigma|_{(\mathbb{I}_n,0)}\xi)$.

Пусть теперь $R$ — произвольный элемент в $\mathscr{S}_p^0$. Из равенства $\mathscr{S}_p^0 = \exp(\mathfrak{d}_p^0)$ и леммы 2 для подходящим образом выбранного $\omega \in \mathfrak{d}_p^0$, $R = \exp(\omega)$, получаем, что линейное отображение (4) определяет изоморфизм между $\mathrm{Span}\{E_1, \dots, E_p\}$ и $\pi = \rho_0(R)$. Тем самым отображение $\exp : \mathfrak{d}_p \to \mathscr{S}_p$ сюръективно. $\square$

Напомним, что *каноническое векторное расслоение* $\mathscr{C}_{n,p}$ над $G(n,p)$ в точке $\pi \in G(n,p)$ имеет слой, равный $\pi$, рассматриваемый теперь как векторное пространство:

$$\mathscr{C}_{n,p} = \{(\pi, X) \in G(n,p) \times \mathbb{R}^n \mid X \in \pi\}.$$

**Лемма 3.** *Многообразие $\mathscr{S}_p$ диффеоморфно каноническому векторному расслоению $\mathscr{C}_{n,p}$.*

Доказательство. Согласно (9) отображение $\rho : \mathscr{S}_p \to \mathscr{C}_{n,p}$, определенное равенством $\rho(R, Y) = (\rho_0(R), Y)$, устанавливает диффеоморфизм между $\mathscr{S}_p$ и $\mathscr{C}_{n,p}$. $\square$

Из предыдущих рассмотрений видим, что каноническое векторное расслоение над грассмановым многообразием каноническим способом может быть рассмотрено как симметрическое пространство.

**Теорема 2.** *Равенство*

$$(A, X) * (\pi, Y) = (A\pi, AY + 2\,\mathrm{pr}_{A\pi} X), \quad Y \in \pi \subset \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

*определяет транзитивное $SE(n)$-действие на каноническом векторном расслоении $\mathscr{C}_{n,p}$ над $G(n,p)$ такое, что $\rho$ становится $SE(n)$-инвариантным диффеоморфизмом:*

$$\rho((A, X) \bullet (R, Y)) = (A, X) * \rho(R, Y), \quad (A, X) \in SE(n),\ (R, Y) \in \mathscr{S}_p.$$

[1)] Другое доказательство этого утверждения вытекало бы из того факта, что касательное пространство к $\sigma$-скрещенной $SE(n)$-орбите совпадает с касательным пространством к $Q$.

*Поэтому $SE(n)$-действие* (10) *реализует $\mathscr{C}_{n,p}$ как некомпактное аффинное симметрическое пространство $(SE(n), S(O(p)\times O(q))\otimes_s \mathbb{R}^q, \sigma)$.*

Замечание 1. Другое однородное представление канонических векторных расслоений ранга 1 над проективными пространствами можно найти в [3]. А именно, $\mathbb{RP}^n \setminus x_0$ диффеоморфно $\mathscr{C}_{n-1,1}$, где $x_0 \in \mathbb{RP}^n$ — произвольная точка. Проективное преобразование $\mathbb{RP}^n$, оставляющее $x_0$ неподвижным, действует транзитивно на $\mathbb{RP}^n \setminus x_0 \approx \mathscr{C}_{n-1,1}$.

Замечание 2. Описание $\exp(\mathfrak{d}_p)$ важно для изучения дискретных неголономных LL-систем на $SE(n)$ (см. [4]).

**Канонические линейные расслоения.** Для $p=1$ есть явная конструкция диффеоморфизма между $\exp(\mathfrak{d}_1)$ и каноническим линейным расслоением $\mathscr{C}_{n,1}$[2)]. Элементы $\mathfrak{d}_1$ могут быть взяты в виде $\xi = (-\theta E_1 \wedge U, \lambda E_1)$, $\theta, \lambda \in \mathbb{R}$, $|U|=1$, $U \perp E_1$. Пусть $(R_{\theta,U}, Y) = \exp(-\theta E_1\wedge U, \lambda E_1)$. Тогда из равенства (6) следует, что

$$-\theta E_1 \wedge U(Y) = \lambda R_{\theta,U}E_1 - \lambda E_1. \tag{11}$$

Принимая во внимание (1) и (11), получаем

$$-\theta\langle U, Y\rangle E_1 + \theta\langle E_1, Y\rangle U = \lambda(\cos\theta - 1)E_1 + \lambda\sin\theta U. \tag{12}$$

Из (4) находим, что $Y$ принадлежит $\mathrm{Span}\{E_1, U\}$, а из (12) — что

$$Y = \lambda\frac{\sin\theta}{\theta}E_1 + \lambda\frac{1-\cos\theta}{\theta}U = \lambda\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}\left(\cos\frac{\theta}{2}E_1 + \sin\frac{\theta}{2}U\right). \tag{13}$$

Наконец, ввиду (2) и (13) имеем $\exp(\mathfrak{d}_1) \approx \mathscr{C}_{n,1}$.

**Благодарности.** Я весьма признателен Ю. Н. Федорову за стимулирующие обсуждения.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Kobayashi S., Nomizu K.* Foundation of differential geometry. New York: John Wiley & Sons, 1969. V. II.
2. *Helgason S.* Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New York: Acad. Press, 1978.
3. *Горбацевич В. В.* О трехмерных однородных пространствах // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 2. С. 280–293.
4. *Fedorov Y. N., Zenkov D. V.* Discrete nonholonomic LL systems on Lie groups // Nonlinearity. 2005. V. 18, N 5. P. 2211–2241. arXiv: math.DS/0409415.
5. *Yano K., Kobayashi S.* Prolongation of tensor fields and connections to tangent bundles. I, II, III // J. Math. Soc. Japan. 1966. V. 18, N 2. P. 194–210; N 3. P. 236-246; 1967. V. 19, N 4. P. 486–488.
6. *Фоменко А. Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.

*Статья поступила 24 января 2006 г.*

*Božidar Jovanović (Йованович Божидар)*
*Mathematical Institute, SANU*
*Kneza Mihaila 35, 11000, Belgrade, Serbia*
bozaj@mi.sanu.ac.yu

[2)]Этот пример, восходящий к [4], послужил отправной точкой в написании данной статьи.