*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2007. Том 48, № 4*

*УДК 512.54*

# $X$–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ПОДГРУППЫ

**В. Го, А. Н. Скиба, К. П. Шам**

**Аннотация:** Пусть $A$, $B$ — подгруппы группы $G$ и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Говорят, что $A$ *$X$-перестановочна с $B$*, если найдется такой элемент $x \in X$, что $AB^x = B^xA$. С использованием этого понятия даны новые характеризации классов конечных разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп.

**Ключевые слова:** силовская подгруппа, добавление к подгруппе, максимальная подгруппа, нильпотентная группа, сверхразрешимая группа, разрешимая группа, $X$-перестановочная подгруппа.

## 1. Введение

Напомним, что подгруппа $A$ группы $G$ называется *перестановочной с подгруппой* $B$, если $AB = BA$. Если $A$ перестановочна со всеми подгруппами из $G$, то $A$ называется *перестановочной* [1] или *квазинормальной* [2] *подгруппой* в $G$.

Перестановочные подгруппы имеют ряд интересных свойств. Так, например, если $H$ — перестановочная подгруппа в некоторой конечно порожденной группе $G$, то $H$ субнормальна в $G$ [3]. Этот результат является обобщением теоремы Оре [2]: *каждая перестановочная подгруппа конечной группы субнормальна*. В другом направлении результат Оре усилили Ито и Сеп. Они доказали [4], что для каждой перестановочной подгруппы $H$ конечной группы $G$ фактор-группа $H/H_G$ нильпотентна. В дальнейшем Майер и Шмид доказали [5], что при таких условиях верно даже, что $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$.

В работах Кегеля [6] и Дескинза [7] показано, что подгруппы $H$, перестановочные со всеми силовскими подгруппами конечной группы $G$, наследуют ряд ключевых свойств перестановочных подгрупп. В частности, $H$ по-прежнему субнормальна, а секция $H/H_G$ нильпотентна. Если к тому же $G$ разрешима и $H$ перестановочна с системными нормализаторами группы $G$, то верно $H/H_G \subseteq Z_\infty(G/H_G)$ [8]. После работ [6, 7] многими авторами предпринимались попытки исследования и применений и других типов обобщенно перестановочных подгрупп. Здесь прежде всего отметим работы [9–11], где рассматривались $m$-перестановочные подгруппы [11], т. е. подгруппы, перестановочные со всеми максимальными подгруппами, и [12–15], где исследовалось влияние на строение группы систем полунормальных подгрупп, т. е. подгрупп $H$, перестановочных со всеми подгруппами из некоторого добавления к $H$ [12].

Часто встречается ситуация, когда подгруппы $A$ и $B$ группы $G$ не являются перестановочными, но в $G$ имеется такой элемент $x$, для которого имеет место $AB^x = B^xA$.

Рассмотрим несколько типичных ситуаций такого рода.

1. Если $G = AB$ — конечная группа, $A_p$ и $B_p$ — силовские $p$-подгруппы в $A$ и в $B$ соответственно, то в общем случае $A_pB_p \neq B_pA_p$, но $G$ имеет такой элемент $x$, что $A_pB_p^x = B_p^xA_p$.

2. Если $P$ и $Q$ — холловские подгруппы конечной разрешимой группы $G$, то для некоторого $x \in G$ имеем $PQ^x = Q^xP$.

3. Если $M$ — максимальная подгруппа в $G$ и $|G : M| = p^a$ для некоторого простого $p$, то для каждой силовской подгруппы $P$ из $G$ в $G$ имеется такой элемент $x$, что $MP^x = P^xM$.

4. Если $A$ и $B$ — нормально погруженные подгруппы конечной разрешимой группы $G$ (см. [1, I, определение (7.1)]), то согласно [1, I, (17.10)] $A$ перестановочна с некоторым $B^x$.

При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующими естественными определениями [16, 17].

Определение 1.1. Пусть $A$, $B$ — подгруппы группы $G$ и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда будем говорить, что

(1) $A$ — *$X$-перестановочная* с $B$ подгруппа, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$;

(2) $A$ — *наследственно $X$-перестановочная* с $B$ подгруппа, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X \cap \langle A, B\rangle$.

Заметим, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с $G$-перестановочными подгруппами. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе авторов [18], и они уже нашли ряд интересных приложений [19–22].

Определение 1.2. Подгруппа $A$ группы $G$ называется (*наследственно*) *$X$-перестановочной* в $G$, если $A$ (наследственно) $X$-перестановочна со всеми подгруппами из $G$.

Значение понятия (наследственной) $X$-перестановочности связано прежде всего с тем, что многие важные классы конечных групп допускают точное описание в терминах $X$-перестановочных подгрупп. В данной работе мы продемонстрируем это на примере разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп.

Все рассматриваемые ниже группы конечны.

## 2. Примеры и общие свойства $X$-перестановочности

Пусть $G$ — некоторая группа и $X$ — подгруппа в $G$. Тогда справедливы следующие утверждения.

**Лемма 2.1.** *Пусть $A, B$ — подгруппы из $G$ и $K \trianglelefteq G$.*

(1) *Если $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$, то $B$ (наследственно) $X$-перестановочна с $A$.*

(2) *Если $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$, то $A^x$ (наследственно) $X^x$-перестановочна с $B^x$ для всех $x \in G$.*

(3) *Если $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$, то $AK/K$ (наследственно) $XK/K$-перестановочна с $BK/K$ в $G/K$.*

(4) *Пусть $K \leq A$. Тогда $A/K$ (наследственно) $XK/K$-перестановочна с $BK/K$ в том и только том случае, когда $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$.*

(5) *Если $A, B \leq M \leq G$ и $A$ наследственно $X$-перестановочна с $B$, то $A$ наследственно $(X \cap M)$-перестановочна с $B$.*

(6) *Если $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$ и $X \leq M \leq G$, то $A$ (наследственно) $M$-перестановочна с $B$.*

(7) *Если $A$ $X$-перестановочна с $B$ и $X \leq N_G(A)$, то $A$ перестановочна с $B$.*

(8) *Если $F$ — перестановочная подгруппа группы $G$ и $A$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$, то $AF$ (наследственно) $X$-перестановочна с $B$.*

(9) *Если $A \leq T$, где $T$ — субнормальная подгруппа (разрешимой) группы $G$, и $A$ $G$-перестановочна со всеми силовскими (холловскими) подгруппами из $G$, то $A$ $T$-перестановочна с каждой силовской (холловской) подгруппой из $T$.*

(10) *Пусть $G = AT$ и $T_1$ — подгруппа группы $T$. Предположим, что $A$ (наследственно) $G$-перестановочна с $T_1$. Тогда $A$ (наследственно) $T$-перестановочна с $T_1$.*

(11) *Если $A$ максимальна в $G$, $T$ — минимальное добавление к $A$ в $G$ и $A$ $G$-перестановочна со всеми подгруппами из $T$, то $T = \langle a \rangle$ — циклическая $p$-группа для некоторого простого числа $p$ и $a^p \in A$.*

Доказательство. Утверждения (1)–(3) и (5)–(8) очевидны.

(4) Предположим, что $A/K$ — (наследственно) $XK/K$-перестановочная с $KB/K$ подгруппа в $G/K$, и пусть $xK$ — произвольный элемент из $XK/K$ (соответственно элемент из $(XK/K) \cap \langle A/K, KB/K \rangle$) такой, что

$$(A/K)(BK/K)^{xK} = (BK/K)^{xK}(A/K).$$

Тогда $AB^xK = AB^x = B^xA$. Ясно, что $xK = hK$ для некоторого $h \in X$, и поэтому мы можем предполагать, что $x \in X$ (соответственно $x \in X \cap \langle A, KB \rangle = X \cap \langle A, B \rangle$). Это значит, что $A$ — (наследственно) $X$-перестановочная с $B$ подгруппа в $G$. С другой стороны, если $A$ — (наследственно) $X$-перестановочная с $B$ подгруппа в $G$, то по (3) $A/K$ (наследственно) $X$-перестановочна с $BK/K$ в $G/K$.

(9) Пусть $T_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $T$ и $G_p$ — силовская подгруппа группы $G$, содержащая $T_p$. Пусть $x$ — произвольный элемент из $G$ такой, что $AG_p^x = G_p^xA$. Тогда $AG_p^x$ — подгруппа в $G$ и поэтому $AG_p^x \cap T = A(G_p^x \cap T) = (G_p^x \cap T)A$ — подгруппа в $T$. Но поскольку $T$ субнормальна в $G$, то $G_p^x \cap T$ — силовская $p$-подгруппа из $T$. Пусть $t$ — элемент из $T$ такой, что $(G_p^x \cap T)^t = T_p$. Тогда

$$A(G_p^x \cap T) = AT_p^{t^{-1}} = T_p^{t^{-1}}A.$$

Аналогично можно доказать второе утверждение.

(10) Предположим, что $A$ наследственно $G$-перестановочна с $T_1$. Тогда существует такой элемент $x \in \langle A, T_1 \rangle$, что $AT_1^x = T_1^xA$. Так как $G = AT$, то $x = at$ для некоторых $a \in A$, $t \in T$ и поэтому $AT_1^x = AatT_1t^{-1}a^{-1} = aAtT_1t^{-1}a^{-1} = a(AT_1^t)a^{-1}$ — подгруппа группы $G$. Значит, $AT_1^t = T_1^tA$, где $t \in T \cap \langle A, T_1 \rangle$ (поскольку $x \in \langle A, T_1 \rangle$). Следовательно, $A$ наследственно $T$-перестановочна с $T_1$. Если $A$ $G$-перестановочна с $T_1$, то аналогично можно показать, что $A$ $T$-перестановочна с $T_1$.

(11) Пусть $M$ — максимальная в $T$ подгруппа. Тогда согласно (10) для некоторого $t \in T$ имеет место $AM^t = M^tA$. Поскольку $T$ — минимальное добавление к $A$ в $G$, то $AM \neq G$ и поэтому $AM^t \neq G$. Так как $A$ максимальна в $G$, это означает, что $M^t \leq A$. Предположим, что в $T$ имеется максимальная подгруппа $M_1$, которая не сопряжена с $M$. Тогда, как и выше, видим, что для некоторого $t_1 \in T$ имеет место $M_1^{t_1} \leq A$. Понятно, что $M^t \neq M_1^{t_1}$ и поэтому $T = \langle M^t, M_1^{t_1} \rangle \leq A$, что влечет $G = AT = A$; противоречие. Таким образом, $T$ — циклическая примарная группа и $M \leq A$.

**Лемма 2.2.** *Пусть $G = AT$, где $A$ — наследственно $G$-перестановочная собственная подгруппа из $G$ и $T$ — нильпотентная подгруппа из $G$. Тогда $G$*

*имеет такой ряд*

$$A = T_0 \le T_1 \le \dots \le T_{t-1} \le T_t = G,$$

*что $|T_i : T_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, \dots, t$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $G \neq DA$ для всех собственных подгрупп $D$ из $T$. Пусть $T_1$ — максимальная подгруппа группы $T$. Допустим, что $T_1 \le A$. Поскольку $T$ нильпотентна и $|G| = \frac{|T||A|}{|T\cap A|} = \frac{|T||A|}{|T_1|}$, то $|G : A| = |T : T_1|$ — простое число.

Пусть теперь $T_1 \nsubseteq A$. По условию для некоторого элемента $x \in G$ имеем $AT_1^x = T_1^x A$. Так как $G = AT$, то $x = ta$, где $t \in T$ и $a \in A$. Тогда $T_1^x = T_1^a$. Поскольку $T_1 \nsubseteq A^{a^{-1}} = A$, то $T_1^a \nsubseteq A$. Более того, если $T_1^a A$ является подгруппой в $G$, то $(T_1^a A)^{a^{-1}} = T_1 A$ — подгруппа в $G$. Ясно, что $T_1 A \neq G$. Предположим, что $T \cap A \nsubseteq T_1$. Тогда $T = T_1(T \cap A) \le T_1 A$ и поэтому $G = TA \le T_1 A$, что противоречит нашему предположению о минимальности $T$. Значит, $T \cap A \le T_1$, тем самым $|T \cap A| = |T_1 \cap A|$. Следовательно,

$$|TA : T_1 A| = \frac{|T||A|}{|T \cap A|} \cdot \frac{|T_1 \cap A|}{|T_1||A|} = |T : T_1|$$

— простое число. Поскольку $|T_1 A| < |G|$ и по условию $A$ — наследственно $G$-перестановочная в $G$ подгруппа, то по выбору группы $G$ и по лемме 2.1(5) заключаем, что $T_1 A$ имеет ряд

$$A = D_0 \le D_1 \le \dots \le D_{n-1} \le D_n = AT_1$$

такой, что $|D_i : D_{i-1}|$ — простое число для $i = 1, \dots, n$. Это завершает доказательство леммы.

Следующие элементарные примеры демонстрируют основное различие между $X$-перестановочными и перестановочными подгруппами.

Пример 2.3. Пусть $G = Z_5 \times (Z_3 Z_2)$, где $|Z_i| = i$ и $Z_3 Z_2$ — симметрическая группа $S_3$. Ясно, что $Z_2$ не является перестановочной подгруппой в $G$ (так как $Z_2 Z_2^x \neq Z_2^x Z_2$ для всех неединичных элементов $x \in Z_3$). Но в то же время, очевидно, $Z_2$ — наследственно $Z_3$-перестановочная подгруппа в $G$.

Пример 2.4. Рассмотрим знакопеременные группы $A_4 \simeq D \le A_5$. Легко видеть, что в $A_5$ любая ее подгруппа порядка 2 является $A_5$-перестановочной. С другой стороны, поскольку $A_4$ не является свехразрешимой группой, то всякая ее подгруппа порядка 2 не является $A_4$-перестановочной в $A_4$. Следовательно, в $A_5$ имеются $A_5$-перестановочные подгруппы, но в то же время в $A_5$ нет наследственно $A_5$-перестановочных подгрупп.

Пример 2.3 показывает, что в общем случае наследственно $X$-перестановочная подгруппа не является субнормальной. Тем не менее следующие наблюдения показывают, что $X$-перестановочные подгруппы обладают свойствами, аналогичными свойствам перестановочных подгрупп.

**Предложение 2.5.** *Пусть $A$ — подгруппа группы $G$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $G$ разрешима и $A$ — наследственно $G$-перестановочная собственная подгруппа из $G$, то $G$ имеет такой ряд*

$$A = T_0 \le T_1 \le \dots \le T_{t-1} \le T_t = G,$$

*что индекс $|T_i : T_{i-1}|$ является простым числом для всех $i = 1, \dots, t$.*

(2) *Если $A$ $G$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $G$ и субнормальна в $G$, то секция $A/A_G$ разрешима.*

Доказательство. (1) Предположим, что это утверждение неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Поскольку $G$ разрешима, то $L$ абелева. Допустим, что $G = LA$. Тогда по лемме 2.2 утверждение справедливо для $G$, что противоречит выбору группы $G$. Значит, $LA \neq G$. Так как $|LA| < |G|$ и $A$ наследственно $G$-перестановочна в $LA$ по лемме 2.1(5), то по выбору группы $G$ заключаем, что $LA$ имеет ряд

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{n-1} \leq T_n = LA$$

такой, что $|T_i : T_{i-1}|$ — простое число для всех $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим $G/L$. По лемме 2.1(3) $AL/L$ наследственно $G/L$-перестановочна в $G/L$ и поэтому $G/L$ имеет ряд

$$AL/L = T_n/L \leq T_{n+1}/L \leq \cdots \leq T_{t-1}/L \leq T_t/L = G/L$$

такой, что $|T_i/L : T_{i-1}/L| = |T_i/T_{i-1}|$ — простое число для всех $i = n+1, \ldots, t$. Значит, группа $G$ имеет ряд подгрупп

$$A = T_0 \leq T_1 \leq \cdots \leq T_{t-1} \leq T_t = G$$

с простыми индексами. Это завершает доказательство утверждения (1).

(2) Ввиду леммы 2.1(4) мы можем предполагать, что $A_G = 1$ и $A$ не является примарной группой. Пусть $R$ — наименьшая нормальная подгруппа группы $A$ с разрешимой фактор-группой. Ясно, что $R = R'$. Предположим, что $A$ не является разрешимой группой. Тогда $R \neq 1$. Пусть $p \in \pi(G)$ и $G_p$ — силовская $p$-подгруппа из $G$ такая, что $D = G_pA = AG_p$. Пусть $Q$ — силовская $q$-подгруппа группы $A$, где $q \neq p$. Тогда очевидно, что $Q$ — силовская $q$-подгруппа из $D$. Так как $A$ субнормальна в $G$, то $A$ субнормальна в $D$ и $Q^x \cap A$ — силовская $q$-подгруппа из $A$ для всех $x \in D$. Значит, $L_q = \langle Q^x \mid x \in D\rangle \subseteq A$. Ясно, что $L_q \trianglelefteq D$. Пусть $L$ — произведение всех подгрупп $L_q$, где $q$ пробегает все простые делители порядка группы $A$, отличные от $p$. Тогда $L \trianglelefteq D$. Поскольку $LR/L \simeq R/L \cap R$ и $D/L$ — $p$-группа, то $R \subseteq L$. Пусть $R_1$ — наименьшая нормальная подгруппа из $L$, фактор-группа по которой разрешима. Тогда $R_1 \operatorname{char} L \trianglelefteq A$ и поэтому $R_1 \trianglelefteq A$. Поскольку $L/R_1$ разрешима, то $R_1 \subseteq R$. Но $R' = R$ и тем самым $R_1 = R \operatorname{char} L \trianglelefteq D$. Следовательно, $R_1 \trianglelefteq D$, т. е. $G_p \subseteq N_G(R)$. Ввиду произвольного выбора $p$ заключаем, что $R \trianglelefteq G$ и поэтому $1 \neq R \subseteq A$. Полученное противоречие завершает доказательство данного утверждения.

Следующий пример показывает, что субнормальная в $G$ подгруппа, которая $X$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы $G$, в общем случае может не быть перестановочной со всеми силовскими подгруппами из $G$.

Пример 2.6. Пусть $p$ — нечетное простое число и $A = \langle x, y \mid x^{p^2} = y^p = 1, x^y = x^{1+p}\rangle$. Рассмотрим $L = \langle y\rangle$. Пусть $g$ — инволюция в $\operatorname{Aut} L$ и $B = [L]\langle g\rangle$. Пусть $\alpha : B \to \mathrm{Sym}(p)$ — транзитивное подстановочное представление степени $p$. Пусть также $G = A \wr_\alpha B = [K]B$ — сплетение групп $A$ и $B$ относительно $\alpha$, где $K$ — база $A \wr_\alpha B$. Пусть $R = L^\natural$ (мы используем здесь терминологию из [1]), и пусть $N = N_G(R)$. Понятно, что $B \subseteq N$ и $N \cap K = (N_A(L))^\natural$. Так как $|A| = p^3$ и $N_A(L) \neq A$, то $N_A(L)$ — абелева группа и поэтому $N \cap K$ также является абелевой группой. Ясно, что $R$ $G$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы $G$ и $R$ субнормальна в $G$. Допустим, что $R$ перестановочна со всеми силовскими 2-подгруппами из $G$. Тогда для каждого $x \in G$ имеем $\langle g \rangle^x \subseteq N$. Следовательно, для нормального замыкания $\langle g \rangle^G$ подгруппы $\langle g \rangle$ в $G$ имеет место $L \subseteq \langle g \rangle^G \subseteq N$ и поэтому $B^G \subseteq N$. Пусть теперь $M = \{(a_1, \dots, a_p) \mid a_i \in A$ и $a_1 \dots a_p \in A'\}$. Тогда по [1, A, (18.4)] получим $B^G = MB$. Следовательно, $M \subseteq N$. Но если $a_1 = \dots = a_p$, то $a_1^p \subseteq A'$ и поэтому $M$ содержит подгруппу, изоморфную $A$. Это означает, что $N \cap K$ не является абелевой группой. Полученное противоречие показывает, что $R$ не перестановочна с некоторой силовской 2-подгруппой группы $G$.

## 3. Характеризации разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп

**Новые характеризации разрешимых групп.** Классическая теорема Холла о наличии в разрешимых группах холловских систем [23] допускает следующую интерпретацию в терминах $X$-перестановочных подгрупп.

**Теорема 3.1.** *Группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две холловские подгруппы $G$-перестановочны.*

Доказательство. Если группа $G$ разрешима и $A$, $B$ — некоторые ее холловские подгруппы, то для некоторого $x \in G$ имеет место $AB^x = B^x A$, поскольку $A$ и $B$ — элементы некоторых холловских систем группы $G$ и любые две холловские системы группы $G$ сопряжены [1, I, (4.11)]. С другой стороны, если любые две холловские подгруппы группы $G$ $G$-перестановочны, то в $G$ имеется $p'$-холловская подгруппа для любого простого делителя $p$ порядка группы $G$ и поэтому $G$ разрешима согласно [1, I, (3.5)].

Напомним также следующий результат.

**Теорема 3.2** [24]. *Группа $G$ разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы $G$-перестановочны.*

Следующие две леммы хорошо известны.

**Лемма 3.3.** *Если $G = AB$ и $p$ — простое число, то существуют такие силовские $p$-подгруппы $A_p, B_p$ и $G_p$ в $A$, $B$ и $G$ соответственно, что $G_p = A_p B_p$.*

**Лемма 3.4.** *Пусть $A, B$ — собственные подгруппы из $G$ и $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.*

Напомним, что ненильпотентная группа $G$ является квазинильпотентной тогда и только тогда, когда $G/Z_\infty(G)$ является прямым произведением некоторых простых неабелевых групп (см. [25, теорема 13.6]).

Пусть $\mathscr{N}^*$ — класс всех квазинильпотентных групп и $G$ — группа. Тогда символом $G^{\mathscr{N}^*}$ обозначают пересечение всех нормальных в $G$ подгрупп $N$ с квазинильпотентной фактор-группой $G/N$.

**Лемма 3.5.** *Пусть $N \trianglelefteq G$. Тогда $(G/N)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}N/N$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из [25, 13.3] и [26, I, 2.4].

Доказательство теоремы 3.2 использует классификацию простых неабелевых групп. Однако при некоторых дополнительных условиях этого можно избежать.

**Теорема 3.6.** *Пусть $G$ — группа, $X = G^{\mathscr{N}^*}$ и $Y = R(G^{\mathscr{N}^*})$ — радикал, т. е. наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в $G^{\mathscr{N}^*}$. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) *Группа $G$ разрешима.*

(2) *Группа $G$ имеет разрешимую максимальную подгруппу $M$, и каждая силовская подгруппа из $G$ является $X$-перестановочной с $M$ и каждой силовской подгруппой группы $G$.*

(3) *Каждая максимальная подгруппа группы $G$ $Y$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами $G$.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что это неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Пусть $p$ — простой делитель индекса $|G:M|$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа из $G$. По условию для некоторого $x \in X$ имеем $MP^x = P^xM$. Ясно, что $G = MP^x$ и поэтому для некоторого $a \in \mathbb{N}$ имеет место $|G:M| = p^a$. Пусть $H$ — минимальная нормальная подгруппа из $M$. Поскольку по условию подгруппа $M$ разрешима, то $H$ — $q$-группа для некоторого простого $q$. Пусть $M_q$ — силовская $q$-подгруппа из $M$. Если $q \neq p$, то $M_q$ — силовская $q$-подгруппа из $G$ и поэтому по условию существует элемент $y \in X$ такой, что $M_q^yP^x = P^xM_q^y$. Следовательно, $G = MP^xM_q^y$ и поэтому согласно лемме 3.4 имеет место $G = M(P^xM_q^y)^{y^{-1}} = M(M_q^yP^x)^{y^{-1}} = M(M_qP^{xy^{-1}})$. Ясно, что $H \subseteq M_q \subseteq M_qP^{xy^{-1}}$. Поскольку $H \trianglelefteq M$, то $H^G = H^{MM_qP^{xy^{-1}}} = H^{M_qP^{xy^{-1}}}$ и поэтому $H \subseteq (M_qP^{xy^{-1}})_G$. Значит, поскольку каждая бипримарная группа разрешима, то $G$ имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу. Если $q = p$, то для некоторой силовской $p$-подгруппы $G_p$ из $G$ получим $H \leq G_p$. Понятно, что для некоторого $x \in G$ имеет место $MG_p^x = G_p^xM = G$ и согласно лемме 3.4 $G = MG_p$. Значит, $H^G \leq H^{MG_p} = H^{G_p} \leq G_p$. Следовательно, в любом случае $G$ имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу, скажем $R$. Если $R \nsubseteq M$, то $G/R = RM/R \simeq M/R \cap M$ — разрешимая группа и поэтому $G$ разрешима, что противоречит выбору группы $G$. Следовательно, $R \leq M$. Согласно лемме 2.1 каждая силовская подгруппа из $G/R$ $(XR/R)$-перестановочна с $M/R$ и с каждой силовской подгруппой из $G/R$. Кроме того, по лемме 3.5 имеем $(G/R)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}R/R = XR/R$. Это показывает, что условия теоремы выполнены для $G/R$. Так как $|G/R| < |G|$, то по выбору группы $G$ группа $G/R$ разрешима. Значит, $G$ разрешима; противоречие.

(3) $\Rightarrow$ (1). Предположим, что это неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Поскольку $R(G^{\mathscr{N}^*}) \operatorname{char} G^{\mathscr{N}^*}$ и $(G/N)^{\mathscr{N}^*} = G^{\mathscr{N}^*}N/N$, то $YN/N \leq R((G/N)^{\mathscr{N}^*})$ и поэтому согласно лемме 2.1 условие (3) наследуется фактор-группой $G/L$. Следовательно, $G/L$ — разрешимая группа. Таким образом, $L$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в $G$ и $Y = 1$. Пусть $p$ — произвольный простой делитель $|L|$ и $L_p$ — силовская $p$-подгруппа в $L$. Пусть $P$ — силовская подгруппа в $G$, содержащая $L_p$, и $N = N_G(L_p)$. Тогда $P \leq N$ и поскольку $L$ неабелева, то $N \neq G$. Пусть $N \leq M$, где $M$ — максимальная в $G$ подгруппа. Согласно лемме Фраттини $G = LN$ и поэтому $L \nsubseteq M$. Значит, $M_G = 1$. Пусть $q$ — произвольный простой делитель $|G:M|$ и $Q$ — силовская $q$-подгруппа в $G$. Тогда $Q \nsubseteq M$ и поэтому $MQ = QM = G$. Пусть теперь $R$ — силовская $r$-подгруппа в $M$, где $r \neq q$. Тогда $R$ является силовской подгруппой в $G$ и поэтому согласно условию для всех $x \in G$ имеет место $R^x \leq M$. Значит, $M_G \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что группа $G$ разрешима.

(1) $\Rightarrow$ (2), (3). Предположим, что группа $G$ разрешима. В этом случае $X = Y = G^{\mathscr{N}}$, где $\mathscr{N}$ — класс всех нильпотентных групп. Пусть $M$ — произвольная максимальная подгруппа группы $G$. Покажем, что $M$ $X$-перестановочна со все-

ми силовскими подгруппами из $G$ и что любые две силовские подгруппы из $G$ $X$-перестановочны. Пусть $|G : M| = p^a$ и $Q$ — произвольная силовская $q$-подгруппа в $G$. Если $p = q$, то для некоторого $x \in G$ имеет место $Q^x M = MQ^x = G$, а значит, $QM = MQ$. Пусть $q \neq p$. Пусть также $M_q$ — силовская $p$-подгруппа в $M$. Ясно, что $M_q = Q^x$ для некоторого $x \in G$. Тогда $M = MQ^x = Q^x M$. Ввиду [1, I, (4.11)] для некоторого системного нормализатора $N$ группы $G$ имеет место $N \subseteq N_G(Q)$. Используя [1, I, (5.6)], видим, что $G = NX$ и поэтому $x = nd$ для некоторых $n \in N$ и $d \in X$. Следовательно, $MQ^d = Q^d M$. Кроме того, из этого следует, что для любого простого делителя $q$ порядка $|G|$ группы $G$ любые две силовские $q$-подгруппы группы $G$ сопряжены при помощи некоторого элемента из $X$. Следовательно, $Q$ $X$-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы $G$.

**Новые характеризации сверхразрешимых групп.** В работе Хупперта [27] доказано, что разрешимая группа $G$ является сверхразрешимой при условии, что все максимальные подгруппы силовских подгрупп перестановочны со всеми членами некоторой фиксированной силовской системы группы $G$. Этот результат дал толчок большому числу исследований, в которых изучалось влияние максимальных подгрупп силовских подгрупп на строение основной группы (см. обзор в [28]). Следующая теорема в данном направлении дает точное описание сверхразрешимых групп $G$ на основе условия $F(G)$-перестановочности максимальных подгрупп силовских подгрупп с максимальными подгруппами из $G$.

**Теорема 3.7.** *Пусть $G$ — группа и $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

(1) *$G$ сверхразрешима.*

(2) *Каждая максимальная подгруппа из $G$ является $X$-перестановочной в $G$.*

(3) *Каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы из $G$, не имеющая сверхразрешимого добавления в $G$, является $X$-перестановочной с каждой максимальной подгруппой из $G$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 3.8** [29, лемма 3.1]. *Пусть $N \leq G$ и $L$ — нормальная подгруппа в $G$. Предположим, что $P/L$ — силовская $p$-подгруппа в $NL/L$ и $M/L$ — максимальная подгруппа в $P/L$. Если $P_p$ — силовская $p$-подгруппа в $P \cap N$, то $P_p$ — силовская $p$-подгруппа в $N$, $D = M \cap N \cap P_p$ — максимальная подгруппа в $P_p$ и $M = LD$.*

Следующая лемма очевидна.

**Лемма 3.9.** *Пусть $P = P_1 \times \cdots \times P_t$ — элементарная абелева $p$-группа, где $|P_i| = p, i = 1, \ldots, t$ и $t > 1$. Если $n$ — количество всех максимальных подгрупп группы $P$, то $n > t$.*

**Лемма 3.10.** *Пусть $G$ — группа, $p, q$ — различные простые делители порядка $|G|$, $P$ — нециклическая силовская $p$-подгруппа из $G$. Если все максимальные подгруппы из $P$ (кроме, возможно, одной) имеют $q$-замкнутое добавление в $G$, то группа $G$ $q$-замкнута.*

Доказательство. Пусть $|P| \neq 1$ и $\{M, M_1, \ldots, M_t\}$ — множество максимальных подгрупп из $P$ таких, что $M_1 \cap \cdots \cap M_t = \Phi(P)$ (см. лемму 3.9). Пусть $T_i$ — $q$-замкнутое добавление к $M_i$ в $G$, $i = 1, \ldots, t$.

Пусть $Q$ — силовская $q$-подгруппа в $T_1$. Понятно, что $Q$ является силовской $q$-подгруппой в $G$ и $Q \trianglelefteq T_1$. Так как $P$ действует транзитивно на множестве силовских $q$-подгрупп группы $G$, то для каждого $i \in \{1, \dots, t\}$ в $P$ найдется такой элемент $x_i$, что $Q^{x_i}$ — силовская $q$-подгруппа в $T_i$. Каждому $i \in \{1, \dots, t\}$ сопоставим некоторый полный набор $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ представителей левых смежных классов по подгруппе $M_i$ в $P$, все элементы которого принадлежат $T_i$. Пусть, кроме того, $S$ — объединение всех таких наборов.

Заметим, что поскольку $Q^{x_i} \trianglelefteq T_i$, то каждый элемент из $g_{i_1}, \dots, g_{i_r}$ имеет вид $g^{x_i}$, где $g \in N_G(Q)$. Ясно, что подгруппа $P$ порождается множеством $S$. Так как при этом $g^{-1}g^{x_i} \in P' \subseteq \Phi(P)$, то в действительности $P$ порождается некоторым набором элементов из $N_G(Q)$ и поэтому $Q \trianglelefteq G = M_1T_1$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.7. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $M$ — максимальная подгруппа в $G$ и $T$ — произвольная подгруппа из $G$. Покажем, что $M$ $X$-перестановочна с $T$. Пусть $|G : M| = p$. Если $\{M_1, \dots, M_t\}$ — силовская база группы $M$ и $\{T_1, \dots, T_l\}$ — силовская база группы $T$, то ввиду [1, I, (4.8), (4.12)] $G$ имеет силовские базы $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ и $\Sigma_1 = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ такие, что $M_i = P_i \cap M$ для всех $i = 1, \dots, t$ и $T_i = Q_i \cap T$ для всех $i = 1, \dots, l$. Более того, системы $\Sigma$ и $\Sigma_1$ сопряжены, т. е. $G$ имеет такой элемент $x$, что $Q_i^x = P_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $P_1$ — силовская $p$-подгруппа из $G$. Тогда $M_2 = P_2, \dots, M_t = P_t$.

Допустим, что $T_1^x \subseteq M_1$. Тогда $T^x \subseteq M_1P_2 \dots P_t = M$, поэтому $T^xM = M = MT^x$.

С другой стороны, если $T_1^x \not\subseteq M_1$, то из того, что $|G : M| = p$, следует $|P_1 : M_1| = p$ и поэтому $P_1 = T_1^xM_1$. Отсюда $T^xM = T_2^x \dots T_l^xT_1^xM_1M_2 \dots M_t = T_2^x \dots T_l^xP_1P_2 \dots P_t = G = MT^x$.

Пусть теперь $N = N_G(\Sigma_1)$. Тогда по [1, I, (5.6)] $N$ покрывает все центральные главные факторы группы $G$. Но по условию $G$ сверхразрешима и поэтому $G' \subseteq F(G)$. Следовательно, $G = F(G)N$. Значит, $x = fn$, где $f \in F(G)$ и $n \in N$, и поэтому $MT^f = T^fM$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Это прямо вытекает из леммы 2.1.

(3) $\Rightarrow$ (1) Допустим, что это утверждение неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка.

(a) *$G/N$ сверхразрешима для каждой неединичной нормальной подгруппы $N$.*

Пусть $P/N$ — нециклическая силовская $p$-подгруппа из $G/N$, $P_1/N$ — максимальная в $P/N$ подгруппа и $M/N$ — произвольная максимальная подгруппа группы $G/N$. Если $G_p$ — силовская $p$-подгруппа из $P$, то $G_p$ — нециклическая силовская $p$-подгруппа из $G$ и $G_pN/N = P/N$. С другой стороны, по лемме 3.8 $P_1 \cap G_p$ — максимальная подгруппа из $G_p$ и $P_1 = N(P_1 \cap G_p)$. Если $P_1 \cap G_p$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, то $TN/N \simeq T/T \cap N$ — сверхразрешимое добавление к $P_1/N$ в $G/N$. В противном случае $P_1 \cap G_p$ $X$-перестановочна с $M$. Значит, по лемме 2.1 $P_1/N$ $XN/N$-перестановочна с $M/N$. Так как $XN/N = F(G)N/N \simeq F(G)/N \cap F(G)$ — нильпотентная нормальная подгруппа в $G/N$, то $P_1/N$ $F(G/N)$-перестановочна с $M/N$. Следовательно, условие (3) справедливо для фактор-группы $G/N$. Но поскольку $|G/N| < |G|$, то $G/N$ сверхразрешима по выбору группы $G$.

(b) *$G$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $H$, и $X = H = C_G(H) = O_p(G) = F(G) \not\subseteq \Phi(G)$ для некоторого простого $p \neq |H|$.*

Пусть $H$ — минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией (см. [26, с. 43]), то ввиду (a) $\Phi(G) = 1$ и $H$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы $G$.

Предположим, что $H$ — неабелева группа. Тогда $X = F(G) = 1$. Пусть $p$ — наименьший простой делитель порядка $|H|$ и $H_p$ — силовская $p$-подгруппа из $H$. Ясно, что $H_p$ не является циклической группой (см. [30, IV, теорема 2.8]). Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа из $G$ такая, что $H_p \subseteq P$. Пусть $N = N_G(H_p)$. Поскольку $H_p = H \cap P \trianglelefteq P$, то $P \leq N$. Так как $H$ неабелева, то $H_p \neq H$ и поэтому $N \neq G$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $N \subseteq M$. Тогда $P \subseteq M$, тем самым $p \nmid |G : M|$. Если все максимальные подгруппы из $P$ обладают свехразрешимыми добавлениями в $G$, то согласно лемме 3.10 группа $G$ $q$-замкнута, где $q$ — наибольший простой делитель порядка $|G|$ группы $G$. Но тогда $F(G) \neq 1$, что противоречит нашему предположению о группе $G$. Таким образом, в $P$ имеется такая максимальная подгруппа $P_1$, которая перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы $G$. В частности, для всех $x \in G$ имеем $P_1M^x = M^xP_1$. Но $p \nmid |G : M^x|$ и поэтому $P_1 \leq M^x$ для всех $x \in G$. Это влечет то, что $P_1 \leq M_G$ и тем самым $H \subseteq M$. По лемме Фраттини $G = HN$ и тогда $G = M$; противоречие. Значит, $H$ — $p$-группа для некоторого простого $p$. Ввиду (a) $G$ разрешима и поэтому ввиду [1, A, (10.6), (15.6)] $X = H = C_G(H) = F(G) = O_p(H)$. Ясно также, что $|H| \neq p$.

(c) *Силовская $p$-подгруппа группы $G$ не является нормальной подгруппой.*

Допустим, что силовская $p$-подгруппа $G_p$ из $G$ нормальна в $G$. Тогда согласно (b) $H = G_p$. Пусть $M$ — максимальная подгруппа в $G$ такая, что $G = [H]M$. Тогда $|G : M| = |H|$. Пусть $H_1$ — максимальная подгруппа из $H$. По условию и лемме 2.1 подгруппа $H_1$ либо имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$, либо $H_1M = MH_1$. В первом случае по выбору группы $G$ имеет место $T \neq G$ и поэтому $G = [H_1]T$, что противоречит минимальности подгруппы $H$. Аналогично приходим к противоречию во втором случае. Следовательно, имеем (c).

(d) *Число $p$ не является наибольшим простым делителем $|G|$.*

Действительно, если $p$ — наибольший простой делитель $|G|$, то согласно (c) и (a) имеет место $O_p(G/H) \neq 1$, что противоречит (b).

*Заключительное противоречие.*

Пусть $M$ — максимальная подгруппа группы $G$ такая, что $H \not\subseteq M$. Тогда $G = [H]M$. Пусть $M_p$ — силовская $p$-подгруппа из $M$ и $P$ — силовская $p$-подгруппа группы $G$, содержащая $M_p$. Пусть $P_1$ — максимальная подгруппа группы $P$ такая, что $M_p \leq P_1$. Поскольку $|H| > p$, группа $P$ не является циклической. Значит, согласно условию и ввиду (b) либо найдется $x \in G$ такое, что $D = P_1M^x = M^xP_1$, либо $P_1$ имеет сверхразрешимое добавление $T$ в $G$. Предположим, что имеет место первое. Тогда поскольку $G = HM$, имеем $x = ba$, где $a \in P$ и $b \in M$, и поэтому $D = P_1M^a$. Так как $P_1 \trianglelefteq P$, то $M_p^a \subseteq P_1$. Допустим, что $D = G$. Тогда $P = P \cap P_1M^a = P_1(P \cap M^a) = P_1M_p^a = P_1$; противоречие. Значит, $D \neq G$ и тем самым $D = M^a$. Но тогда $P_1 \leq M^a$. Из этого следует $|G : M^a| = |G : M| = p = |H|$, что противоречит (b). Следовательно, имеет место второе. Пусть $T_q$ — силовская $q$-подгруппа в $T$, где $q$ — наибольший простой делитель $|G|$. Тогда $T_q \trianglelefteq T$ и $T_q$ является силовской $q$-подгруппой группы $G$. Понятно, что для некоторого $x \in G$ имеет место $T_q \trianglelefteq M^x = N_G(T_q)$. Следовательно, $T \leq M^x$ и поэтому $G = P_1T = P_1M^x = P_1M$, что влечет $P = P_1$. Полученное противоречие завершает доказательство импликации (3) $\Rightarrow$ (1). Теорема доказана.

**Следствие 3.11.** *Группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа из $G$ является $F(G)$-перестановочной в $G$.*

**Следствие 3.12.** *Группа $G$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовской подгруппы из $G$ $F(G)$-перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы $G$.*

Будем говорить, что подгруппа $M$ группы $G$ *имеет непримарный индекс*, если $|G : M|$ делится по крайней мере на два различных простых числа. Подгруппа $H$ группы $G$ называется *2-максимальной подгруппой* этой группы, если $H$ является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы $M$ группы $G$.

**Лемма 3.13** [31, теорема 3]. *Пусть $A$ и $B$ — подгруппы группы $G$ такие, что $G \neq AB$ и $AB^x = B^xA$ для всех $x \in G$. Тогда $G$ имеет такую собственную нормальную подгруппу $N$, что либо $A \leq N$, либо $B \leq N$.*

**Лемма 3.14** [32, теорема 3.4]. *Группа $G$ разрешима, если $G = AB$, где $A$ сверхразрешима, а $B$ — циклическая группа нечетного порядка.*

**Теорема 3.15.** *Пусть $G$ — группа, $X = F(G) \cap G'$ и $\Sigma$ — набор всех таких 2-максимальных подгрупп $E$ группы $G$ для которых фактор-группа $G/E_G$ сверхразрешима и для некоторого простого числа $p$ имеет место $|F(G/E_G)| = |O_p(G/E_G)| > p$. Тогда $G$ сверхразрешима в том и только в том случае, когда для каждой 2-максимальной подгруппы $E$ группы $G$, имеющей непримарный индекс и не принадлежащей $\Sigma$, в $G$ найдется дисперсивное по Оре добавление к $E$, все подгруппы которого $X$-перестановочны с $E$.*

Доказательство. $\Longrightarrow$ Предположим, что это утверждение неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка.

(1) *Группа $G$ не проста.*

Предположим, что $G$ — простая неабелева группа. Тогда $F(G) = 1$ и $X = F(G) \cap G' = 1$. Поскольку группа $G$ не является разрешимой, то согласно [26, гл. 5, теорема 26.3] в группе $G$ имеется несвехразрешимая максимальная подгруппа, скажем $M$. Предположим, что индекс $M$ не является примарным, и пусть $T$ — максимальная в $M$ подгруппа. Согласно условию в $G$ найдется такая подгруппа $A$, что $TA = G$ и все подгруппы из $A$ перестановочны с $T$. Заметим, что $M = M \cap TA = T(M \cap A)$ и поэтому согласно лемме 2.1(11) $|M : T|$ — простое число. Таким образом, индекс каждой максимальной подгруппы из $M$ прост, а значит, по теореме Хупперта $M$ — сверхразрешимая группа. Это противоречие показывает, что $|G : M| = p^\alpha$ для некоторого простого $p$. Понятно, что для некоторой максимальной в $M$ подгруппы $T$ имеет место $(p, |M : T|) = 1$. Согласно условию в группе $G$ имеется такая подгруппа $A$, что $TA = G$ и каждая подгруппа из $A$ перестановочна с $T$. Не теряя общности, мы можем считать, что $A$ — минимальное добавление к $T$ в $G$. Пусть $x \in G$, и пусть $A_1$ — собственная подгруппа группы $A$. Тогда $TA_1$ — собственная в $G$ подгруппа и $x = at$, где $t \in T$ и $a \in A$. Значит, $T(A_1)^a = (A_1)^aT$, и поэтому $((A_1)^aT)^t = (A_1)^xT$ — подгруппа группы $G$. Но тогда согласно лемме 3.13 группа $G$ не является простой. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (1).

(2) *Фактор-группа $G/N$ сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы $N$ из $G$.*

Достаточно проверить, что условие верно для $G/N$. Пусть $E/N$ — произвольная 2-максимальная подгруппа из $G/N$, имеющая непримарный индекс. Тогда согласно условию в $G$ имеется такая подгруппа $T$, что $G = ET$ и любая подгруппа из $T$ $X$-перестановочна с $E$. Пусть теперь $D/N$ — произвольная подгруппа из $TN/N$. Тогда $D/N = (D \cap T)N/N$ и поэтому по лемме 2.1 подгруппа $D/N$ $XN/N$-перестановочна с $E/N$. Значит, поскольку $XN/N = (F(G) \cap G')N/N \leq F(G/N)$ и $G'N/N = (G/N)'$, каждая подгруппа из $TN/N$ является $F(G/N) \cap (G/N)'$-перестановочной с $E/N$.

(3) *В группе $G$ имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа, скажем $L$* ( это прямо вытекает из (2) и того факта, что класс всех сверхразрешимых групп замкнут относительно образования подпрямых произведений).

(4) *Группа $G$ разрешима.*

В силу (2) необходимо лишь показать, что $L$ — абелева группа. Предположим, что это не так, и пусть $L \leq M$, где $M$ — максимальная в $G$ подгруппа. Тогда согласно (3) $F(G) = 1$ и поэтому $X = 1$. Согласно (2) $|G : M| = p$ — простое число. Покажем, что для некоторой максимальной в $M$ подгруппы $T$ одновременно имеем $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$. Действительно, предположим, что $p$ делит $|L|$, и пусть $L_p$ — некоторая силовская $p$-подгруппа в $L$, $P$ — силовская подгруппа группы $G$, которая содержит $L_p$. Тогда $P \leq N = N_G(L_p)$. По лемме Фраттини $G = LN$, следовательно, $M = M \cap LN = L(M \cap N)$. Так как $L$ не является абелевой, то $N \neq G$ и поэтому $N_1 = M \cap N \neq M$. Пусть $T$ — максимальная в $M$ подгруппа, содержащая $N_1$. Тогда $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$. Теперь предположим, что $(|L|, p) = 1$. Понятно, что $L \nsubseteq \Phi(M)$ и поэтому для некоторой максимальной в $M$ подгруппы $T$ имеем $M = LT$ и $p$ не делит $|M : T| = |L|/|L \cap T|$.

Согласно гипотезе в группе $G$ имеется такая подгруппа $A$, что $G = TA$ и каждая подгруппа из $A$ перестановочна с $T$. Не теряя общности, можем считать, что $A$ — минимальное добавление к $T$ в $G$. Тогда $A \cap T \subseteq \Phi(A)$. Поскольку $M = M \cap TA = T(M \cap A)$, согласно лемме 2.1(11) $|M : T| = q$ для некоторого простого $q \neq p$. Тем самым $|G : T| = pq = |A : A \cap T|$. Это означает, что $A$ — $\{p, q\}$-группа. Пусть $A_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $A$. Тогда $D = TA_p$ — подгруппа группы $G$ такая, что $|G : D| = q$. Поскольку $|G : M| = p$ и $M = LT$, видим, что $L \nsubseteq D$. Тогда $D_G = 1$ и поэтому $G$ изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы $S_q$ на $q$ символах. Значит, $D$ — холлова $q'$-подгруппа в $G$, и $G = DZ_q$, где $Z_q$ — группа порядка $q$. Ввиду условия теоремы это означает, что для любой максимальной в $D$ подгруппы $E$ найдется такая подгруппа $A$, что $D = EA$ и любая подгруппа из $A$ перестановочна с $E$. Применяя теперь лемму 2.1(11), видим, что группа $D$ сверхразрешима и поэтому согласно лемме 3.14 группа $G$ разрешима. Это противоречие завершает доказательство (4).

(5) *Для некоторого простого числа $p$ имеет место $X = L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$ и $|L| > p$.*

Согласно (4) группа $G$ разрешима. Кроме того, согласно (2) фактор-группа $G/L$ сверхразрешима. Поскольку класс всех сверхразрешимых групп является насыщенной формацией, $L \nsubseteq \Phi(G)$. Значит, ввиду [1, A, (10.6), (15.6)] для некоторого простого числа $p$ имеет место $L = C_G(L) = F(G) = O_p(G)$. Понятно также, что $|L| > p$ и $L = F(G) \leq G'$. Следовательно, $L = X$.

*Заключительное противоречие.*

Пусть $E$ — максимальная в $G$ подгруппа такая, что $L \nsubseteq E$. Тогда $G = [L]E$ и поэтому согласно (2) подгруппа $E$ сверхразрешима. Пусть $q$ — простой делитель $|E|$, отличный от $p$. Тогда $E$ содержит максимальную подгруппу $E_1$, для которой $|E : E_1| = q$ и $(E_1)_G = 1$. Согласно условию в группе $G$ имеется такая дисперсивная по Оре подгруппа $T$, что $G = E_1T$ и каждая подгруппа из $T$ $X$-перестановочна с $E_1$. Не теряя общности, можем считать, что $T$ — минимальное добавление к $E_1$ в $G$.

Предположим, что $E_1 = 1$, и пусть $L_1$ — максимальная в $L$ подгруппа. Тогда $L_1$ имеет непримарный индекс в $G$ и $L_1 \notin \Sigma$. Следовательно, по условию в $G$ найдется такая подгруппа $V$, что $G = L_1V$ и каждая подгруппа из $V$ является перестановочной с $L_1$. Это, в частности, означает, что $L_1$ перестановочна с некоторой силовской $q$-подгруппой $Q$ группы $G$. Но $Q$ — максимальная в $G$ подгруппа и поэтому $|G : Q| = |L| = |L_1|$. Полученное противоречие показывает, что $E_1 \neq 1$.

Пусть $D = E_1 \cap T$ и $D_p$ — силовская $p$-подгруппа в $D$. Тогда поскольку $|G : E_1| = |L|q$, имеем $|T/D| = p^a q$, где $|L| = p^a > p$. Пусть $r$ — наибольший простой делитель $|G|$. Предположим, что $r = p$. Тогда поскольку фактор-группа $G/L$ сверхразрешима и в силу (5) имеет место $O_p(G/L) = 1$, $L$ — силовская подгруппа в $G$. Это влечет $L \leq T$. Пусть $L_1$ — максимальная в $L$ подгруппа. Тогда согласно условию $A = L_1E_1 = E_1L_1$. Легко видеть, что $|G : A| = pq$ и $A_G = 1$. Следовательно, в группе $G$ имеется такая подгруппа $T_1$, что $AT_1 = G$ и каждая подгруппа из $T_1$ является $L$-перестановочной с $A$. Пусть $Q$ — силовская $q$-подгруппа в $T_1$. Тогда для некоторого $x \in L$ имеет место $B = Q^xA = AQ^x$. Но $|G : B| = p$ и поэтому $LB = G$. Следовательно, $|L| \neq |L \cap B| \neq 1$ и $L \cap B \trianglelefteq G$, что противоречит минимальности $L$. Таким образом, не теряя общности, можем предполагать, что $r = q$.

Пусть $K$ — максимальная в $T$ подгруппа такая, что $|T : K| = p$. Поскольку группа $G$ разрешима, $T$ — $\{p, q\}$-группа ввиду минимальности $T$. Но $p < q$ и поэтому подгруппа $K$ является нормальной в $T$. Предположим, что $D \nsubseteq K$. Тогда $KD = T$ и поэтому $G = E_1T = E_1DK = E_1K$. Но это невозможно, поскольку $T$ — минимальное добавление к $E_1$ в $G$. Следовательно, $D \subseteq K$. Пусть $x$ — элемент из $L$, для которого $V = E_1K^x = K^xE_1$. Так как $G = E_1T$, то $x = te$, где $e \in E_1$, $t \in T$, и поэтому $Y = V^{e^{-1}} = E_1K^t = K^tE_1 = E_1K$. Пусть $Y_p$ — силовская $p$-подгруппа в $Y$, $G_p$ — силовская подгруппа из $G$, которая содержит $Y_p$. Тогда $|G_p : Y_p| = ((|E_p||T_p|)/|D_p|) : ((|E_p||K_p|)/|D_p|) = p$, где $E_p$ — силовская $p$-подгруппа в $E_1$. Теперь заметим, что поскольку $|G : LE_1| = q$, то $|G_p| = |L||E_p|$ и поэтому $L \nsubseteq Y$ и $L \cap Y \neq 1$. Но тогда $G = LY$ и подгруппа $Y \cap L$ нормальна в $G$, что противоречит минимальности $L$. Таким образом, мы должны заключить, что группа $G$ сверхразрешима.

$\Longleftarrow$ Предположим, что $G$ — сверхразрешимая группа. Используя индукцию по $|G|$, покажем, что для каждой 2-максимальной подгруппы $M$ группы $G$, имеющей непримарный индекс и не принадлежащей $\Sigma$, и для каждого минимального добавления $T$ подгруппы $M$ в $G$ справедливо, что $M$ $G'$-перестановочна со всеми подгруппами группы $T$. Пусть $T_1$ — подгруппа в $T$.

Прежде предположим, что $M_G \neq 1$. По индукции доказываемое утверждение верно для $G/M_G$. Заметим, что $TM_G/M_G$ — минимальное добавление к $M/M_G$ в $G/M_G$. Действительно, если $T_0/M_G \leq TM_G/M_G$ и $(T_0/M_G)(M/M_G) = G/M_G$, то $T_0 = T_0 \cap M_GT = M_G(T_0 \cap T)$ и поэтому $T_0M = G = (T_0 \cap T)M$. Следовательно, $T \subseteq T_0$. Значит, $T_0/M_G = TM_G/M_G$ — минимальное добавление к $M/M_G$ в $G/M_G$. Таким образом, подгруппа $M/M_G$ является $(G/M_G)'$-перестановочной с $T_1M_G/M_G$. Но $(G/M_G)' = G'M_G/M_G$ и поэтому согласно лемме 2.1 $M$ $G'$-перестановочна с $T_1$.

Теперь предположим, что $M_G = 1$. Пусть $|G : M| = pq$, где $p > q$. Пусть $\pi = \pi(F(G))$ — множество всех простых делителей $|F(G)|$. Если $|\pi| > 2$ и $R$ — силовская $d$-подгруппа в $F(G)$, где $q \neq d \neq p$, то $R \leq M_G$, что противоречит равенству $M_G = 1$. Значит, $\pi \subseteq \{p, q\}$. Поскольку группа $G$ сверхразрешима, силовская $r$-подгруппа нормальна в $G$, где $r$ — наибольший простой делитель $|G|$. Значит, $r = p$.

Прежде предположим, что $|F(G)| = p$. В этом случае $G = [F(G)]E$ для некоторой максимальной подгруппы $E$ группы $G$ и $C_G(F(G)) = F(G)$. Следовательно, $E$ — циклическая группа. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $M \leq E$. Покажем, что $M$ $G'$-перестановочна с $T_1$. Если $A$ — холловская $p'$-подгруппа в $T_1$, то $T_1 = PA$, где $P = T_1 \cap F(G)$ — силовская $p$-подгруппа в $T_1$. Для некоторого $x \in F(G) = G'$ имеет место $A^x \subseteq E$ и поэтому $MT_1^x = M(T_1 \cap F(G))A^x = (T_1 \cap F(G))A^x M$.

Пусть теперь $|\pi| = 2$, $F_p$ и $F_q$ — силовская $p$-подгруппа и силовская $q$-подгруппа в $F(G)$ соответственно. Понятно, что $G = F(G)M$. Пусть $R$ — силовская $r$-подгруппа в $F(G)$. Предположим, что $|R| > r$. Тогда $D = R \cap M \neq 1$. Поскольку $R$ — характеристическая подгруппа в $F(G)$, $R$ нормальна в $G$. Понятно также, что $|R : D| = r$. Следовательно, $D$ нормальна в $G$ и поэтому $D = 1$, поскольку $M_G = 1$. Таким образом, $|F(G)| = pq$. Предположим, что $q$ делит $|M|$ и что $q$, $p$ делят $|T_1|$. Если $\{M_2, \dots, M_t\}$ — некоторая силовская база группы $M$ и $\{D_1, D_2\}$ — некоторая силовская база группы $T_1$, то согласно [1, I, (4.8), (4.12)] $G$ обладает такими силовскими базами $\Sigma = \{P_1, \dots, P_t\}$ и $\Sigma_1 = \{Q_1, \dots, Q_t\}$, что $M_i \subseteq P_i$ для всех $i = 2, \dots, t$ и $D_i \subseteq Q_i$ для $i = 1, 2$. Более того, найдется элемент $x \in G$ такой, что $Q_i^x = P_i$ для всех $i = 1, \dots, t$. Понятно, что $P_1 = D_1$ — силовская $p$-подгруппа в $G$ и $M_3 = P_3, \dots, M_t = P_t$. Если $D_2^x \subseteq M_2$, то ${T_1}^x M = P_1 M = MT^x$. С другой стороны, если $D_2^x \not\subseteq M_2$, то ввиду равенства $|G : M| = pq$ имеем $|P_2 : M_2| = q$ и поэтому $P_2 = D_2^x M_2$. Значит, $T_1^x M = G = MT_1^x$. Заметим, что согласно [1, VI, 11.10] имеет место $G = G'N_G(\Sigma_1)$ и поэтому $x = fn$, где $f \in G'$ и $n \in N_G(\Sigma_1)$. Следовательно, $MT_1^f = T_1^f M$. Аналогично рассматриваются случаи, когда либо $(|M|, q) = 1$, либо $(|T_1|, p) = 1$.

Наконец отметим, что поскольку группа $G$ сверхразрешима, $G' \leq F(G)$ и поэтому $X = G'$. Следовательно, $M$ $X$-перестановочна со всеми подгруппами из $T$. Теорема доказана.

Заметим, что в сверхразрешимой группе $G = S_3 \times Z_3$ имеется подгруппа порядка 3, которая не перестановочна ни с одной подгруппой порядка 2. Таким образом, условие «имеющей непримарный индекс и не принадлежащей $\Sigma$» в теореме 3.15 не может быть опущено.

**Новые характеризации нильпотентных групп.** Напомним, что подгруппа $H$ группы $G$ называется *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для всех $x \in G$. Следующая лемма очевидна.

**Лемма 3.16.** *Если $K \trianglelefteq G$ и $H$ — абнормальная подгруппа в $G$, то справедливы следующие утверждения:*

(i) *$HK/K$ абнормальна в $G/K$;*

(ii) *если $H \leq T \leq G$, то $H$ абнормальна в $T$;*

(iii) $H = N_G(H)$.

**Теорема 3.17.** *Группа $G$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $G$ имеет нильпотентную абнормальную подгруппу $X$ такую, что любые две силовские подгруппы из $G$ $X$-перестановочны.*

Доказательство. Достаточно лишь показать, что если любые две силовские подгруппы из $G$ $X$-перестановочны, то $G$ нильпотентна. Предположим, что это утверждение неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка. Тогда

(1) *$G/N$ нильпотентна для каждой неединичной нормальной подгруппы $N$ из $G$.*

Пусть $P/N$ и $Q/N$ — силовская $p$-подгруппа и силовская $q$-подгруппа в $G/N$ соответственно. Пусть также $G_p$ — силовская $p$-подгруппа в $P$ и $G_q$ — силовская $q$-подгруппа в $Q$. Тогда $G_p$ и $G_q$ — силовские подгруппы группы $G$. По условию $G_p$ и $G_q$ $X$-перестановочны, поэтому по лемме 2.1 $P/N$ $(XN/N)$-перестановочна с $Q/N$. Поскольку $XN/N \simeq X/N \cap X$ — нильпотентная подгруппа в $G/N$ и по лемме 3.16 $XN/N$ абнормальна в $G/N$, условие теоремы справедливо для $G/N$. Так как $|G/N| < |G|$, то по выбору группы $G$ фактор-группа $G/N$ нильпотентна.

(2) *$G = N_G(P)X$ для каждой силовской подгруппы $P$ группы $G$.*

Согласно условию для каждого $x \in G$ существует такой элемент $h \in X$, что $P(P^x)^h = (P^x)^h P$ и поэтому $xh \in N = N_G(P)$. Значит, $G = NX$.

(3) *$G$ — разрешимая группа.*

Пусть $p$ — простой делитель $|X|$ и $X_p$ — силовская $p$-подгруппа из $X$. Пусть $P$ — силовская $p$-подгруппа из $G$. Согласно (2) $G = NX$, где $N = N_G(P)$, поэтому по лемме 3.3 $PX_p = X_pP$. Значит, $X_p \leq P \leq N$. Так как $X$ нильпотентна, то $X_p \trianglelefteq X$ и поэтому $X_p^G = X_p^{NX} = X_p^N \leq P$. Значит, $G$ имеет абелеву минимальную нормальную подгруппу. Ввиду (1) группа $G$ разрешима.

(4) *$G = [R]M$, где $M$ — нильпотентная максимальная подгруппа из $G$ и $R = C_G(R) = O_p(G)$ — минимальная нормальная подгруппа из $G$, где $p \mid |R|$.*

Ввиду (1) и свойств класса всех нильпотентных групп видим, что $G$ имеет единственную минимальную нормальную подгруппу, скажем $R$, и $R \not\subseteq \Phi(G)$. Таким образом, (4) следует из [1, A, (15.6)].

*Заключительное противоречие.*

По условию $X$ абнормальна в $G$ и поэтому согласно лемме 3.16 имеет место $N_G(X) = X$. Таким образом, $X$ — картерова подгруппа в $G$. Ясно, что $M$ также является картеровой подгруппой в $G$. Следовательно, для некоторого $x \in G$ имеем $X = M^x$. Пусть теперь $Q$ — силовская $q$-подгруппа в $M$, где $q$ — простой делитель $|M|$, отличный от $p$. Тогда $M = N_G(Q)$ и поэтому ввиду (2) $G = MX = MM^x$, что противоречит лемме 3.4. Теорема доказана.

**Следствие 3.18.** *Разрешимая группа $G$ нильпотентна тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы $X$-перестановочны, где $X$ — подгруппа Картера группы $G$.*

**Теорема 3.19.** *Пусть $G$ — группа и $X = F(G)$ — подгруппа Фиттинга группы $G$. Тогда $G$ нильпотентна в том и только в том случае, когда для каждой 2-максимальной подгруппы $E$ группы $G$, имеющей непримарный индекс в $G$, в* *группе $G$ найдется нильпотентное добавление к $E$, все силовские подгруппы которого $X$-перестановочны с $E$.*

Доказательство. Предположим, что для каждой 2-максимальной подгруппы $E$ группы $G$, имеющей непримарный индекс в $G$, в группе $G$ найдется нильпотентное добавление к $E$, все силовские подгруппы которого $X$-перестановочны с $E$. Покажем, что в этом случае группа $G$ нильпотентна. Предположим, что это неверно, и пусть $G$ — контрпример минимального порядка.

(1) *Группа $G$ не проста.*

Предположим, что $G$ — простая неабелева группа. Тогда $X = F(G) = 1$. Пусть $M$ — произвольная максимальная в $G$ подгруппа и $T$ — некоторая максимальная подгруппа в $M$. Предположим, что $M$ имеет непримарный индекс. Тогда согласно условию в $G$ найдется такая нильпотентная подгруппа $A$, что $G = TA$ и все силовские подгруппы из $A$ перестановочны с $T$. Пусть $P$ — произвольная силовская подгруппа группы $A$. Понятно, что $PT = TP \neq G$. Покажем, что для всех $x \in G$ имеет место $P^xT = TP^x$. Пусть $x = at$, где $a \in A$ и $t \in T$. Тогда $P^xT = P^{at}T = P^tT = t^{-1}PTt = t^{-1}TPt = Tt^{-1}Pt = TP^x$ и поэтому согласно лемме 3.13 группа $G$ не проста. Таким образом, $|G : M| = p^a$ для некоторого простого $p$. Понятно, что для некоторой максимальной в $M$ подгруппы $T$ имеет место $(p, |M : T|) = 1$, что, как и выше, приводит к противоречию.

(2) *В $G$ имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа, скажем $L$, и фактор-группа $G/L$ нильпотентна* (см. доказательство теоремы 3.15).

(3) *Группа $G$ разрешима.*

В силу (2) необходимо лишь показать, что $L$ — абелева группа. Предположим, что это не так, и пусть $L \leq M$, где $M$ — максимальная в $G$ подгруппа. Понятно, что $X = F(G) = 1$. Согласно (2) $|G : M| = p$ — простое число. Для некоторой максимальной в $M$ подгруппы $T$ одновременно имеем $M = LT$ и $(|M : T|, p) = 1$ (см. доказательство теоремы 3.15). Согласно условию в группе $G$ имеется такая нильпотентная подгруппа $A$, что $G = TA$ и каждая силовская подгруппа из $A$ перестановочна с $T$. Поскольку $M = M \cap TA = T(M \cap A)$, в $A$ найдется такая силовская подгруппа, скажем силовская $q$-подгруппа $A_q$, что $A_q \leq M$ и $A_q \nsubseteq T$. Значит, $M = TA_q$, и поэтому $|G : T| = pq^a = |A : A \cap T|$. Пусть $A_p$ — силовская $p$-подгруппа группы $A$. Тогда $D = TA_p$ — подгруппа группы $G$ такая, что $|G : D| = q^a$. Поскольку $|G : M| = p$ и $M = LT$, видим, что $L \nsubseteq D$. Тогда $D_G = 1$. Пусть $E$ — максимальная в $D$ подгруппа такая, что $(|D : E|, q) = 1$. Пусть $A$ — нильпотентная подгруппа группы $G$ такая, что $G = EA$ и каждая силовская подгруппа из $A$ перестановочна с $E$. Поскольку $D = D \cap EA = E(D \cap A)$, в группе $A$ найдется такая силовская подгруппа $R$, что $D = RE$. Заметим, что так как $G = DA$ и $R$ нормальна в $A$, то $R^G = R^{DA} = R^D \leq D$. Значит, $D_G \neq 1$. Это противоречие завершает доказательство (3).

*Заключительное противоречие.*

Пусть $L$ — минимальная нормальная подгруппа в $G$. Тогда рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.15, можно показать, что $G = [L]E$, где $E$ — нильпотентная максимальная в $G$ подгруппа, и для некоторого простого $p$ имеет место $L = C_G(L) = O_p(G)$. Это, в частности, означает, что $L$ — силовская подгруппа в $G$. Понятно, что найдутся простое $q \neq p$ и максимальная в $E$ подгруппа $E_1$ такие, что $|E : E_1| = q$. Следовательно, согласно условию группа $G$ имеет нильпотентную подгруппу $T$ такую, что $G = E_1T$. Заметим, что так как $|G : E_1| = p^a q$, где $|L| = p^a$, то $L \leq T$ и поэтому $T \leq L = C_G(L)$. Это противоречие завершает доказательство данного утверждения, а значит, и доказательство данной теоремы, поскольку в нильпотентной группе всякая ее 2-максимальная подгруппа, имеющая непримарный индекс, нормальна.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензенту за полезные замечания.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
**2.** *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 431–460.
**3.** *Stonehewer S. E.* Permutable subgroups of infinite groups // Math. Z. 1972. V. 125, N 1. P. 1–16.
**4.** *Ito N., Szep J.* Uber die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen // Act. Sci. Math. 1962. V. 23, N 1–2. P. 168–170.
**5.** *Maier R., Schmid P.* The embedding of quasinormal subgroups in finite groups // Math. Z. 1973. V. 131, N 3. P. 269–272.
**6.** *Kegel O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78, N 1. P. 205–221.
**7.** *Deskins W. E.* On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. V. 82, N 2. P. 125–132.
**8.** *Schmid P.* Subgroups permutable with all Sylow subgroups // J. Algebra. 1998. V. 207, N 1. P. 285–293.
**9.** *Поляков Л. Я.* Конечные группы с перестановочными подгруппами // Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966. С. 75–88.
**10.** *Maier R.* Endliche metanilpotente Gruppen // Arch. Math. 1972. V. 23, N 1. P. 139–144.
**11.** *Maier R.* Zur Vertauschbarkeit und Subnormalitat von Untergruppen // Arch. Math. 1989. V. 53, N 2. P. 110–120.
**12.** *Su H.* Semi-normal subgroups of finite groups // Math. Mag. 1988. V. 8, N 1. P. 7–9.
**13.** *Wang R.* Some sufficient conditions of a nilpotent group // J. Algebra. 1992. V. 148, N 2. P. 289–294.
**14.** *Foguel T.* On seminormal subgroups // J. Algebra. 1994. V. 165, N 3. P. 633–635.
**15.** *Подгорная В. В.* Полунормальные подгруппы и сверхразрешимость конечных групп // Весцi. НАН Беларуси, сер. физ.-мат. навук. 2000. Т. 4, № 4. С. 22–25.
**16.** *Skiba A. N.* $H$-permutable subgroups // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. 2003. N 4. P. 37–39.
**17.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* $X$-Permutable subgroups. Gomel, 2003. (Preprint/GGU im. F. Skoriny; N 61).
**18.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups. Gomel, 2002. (Preprint/ GGU im. F. Skoriny; N 10).
**19.** *Го Веньбинь, Шам К. П., Скиба А. Н.* $G$-накрывающие системы подгрупп для классов $p$-сверхразрешимых и $p$-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 75–92.
**20.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // SEAMS Bull Math. 2005. V. 29, N 2. P. 240–254.
**21.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Publ. Math. Debrecen. 2006. V. 68, N 3–4. P. 433–449.
**22.** *Al-Sheikahmad A.* Finite groups with given $c$-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. 2004. V. 3, N 3. P. 9–14.
**23.** *Hall P.* On the Sylow systems of a soluble group // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43, N 2. P. 507–528.
**24.** *Arad Z. Michael B. Ward* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. 1982. V. 77, N 1. P. 234–246.
**25.** *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.

**26.** *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

**27.** *Huppert B.* Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 161–169.

**28.** *Skiba A. N.* Finite groups with given systems of generalized permutable subgroups // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2006. N 3. P. 12–31.

**29.** *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* *G*-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Israel J. Math. 2003. V. 138, N 3. P. 125–138.

**30.** *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.

**31.** *Kegel O.* Producte nilpotenter Gruppen // Arch. Math. 1961. V. 12, N 1. P. 90–93.

**32.** *Монахов В. С.* Произведение сверхразрешимой и циклической или примарной группы // Finite Groups (Тр. Гомельск. семинара. Гомель, 1975–1977). Минск: Наука и техника, 1978. С. 50–63.

*Статья поступила 26 января 2006 г.*

*Wenbin Guo (Го Веньбинь)*
*Department of Mathematics, Xuzhou Normal University,*
*221009 Xuzhou, P.R. China*
`yzgwb@pub.yz.jsinfo.net`

*Kar-Ping Shum (Шам Кар-Пинг)*
*Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong,*
*Shatin, Hong Kong, P.R. China (SAR)*
`kpshum@math.cuhk.edu.hk`

*Скиба Александр Николаевич*
*Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,*
*Гомель 246019, Беларусь*
`skiba@gsu.unibel.by`