Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 519.542

КВАЗИРАСПОЗНАВАНИЕ ПРОСТОЙ ГРУППЫ $^2G_2(q)$ ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

А. Хосрави, Б. Хосрави

Аннотация: Пусть G — конечная группа. Доказано, что если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(^2G_2(q))$, где $q = 3^{2n+1}$ для некоторого $n \geq 1$, то G содержит единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен $^2G_2(q)$. В качестве следствия доказано, что если G — конечная группа такая, что $|G| = |^2G_2(q)|$ и $\Gamma(G) = \Gamma(^2G_2(q))$, то $G \cong {}^2G_2(q)$. С помощью этого факта даны новые доказательства некоторых теорем, например, гипотезы Ши и Би. Рассмотрены приложения к проблеме распознавания конечных групп по множеству порядков элементов.

Ключевые слова: квазираспознавание, граф простых чисел, простая группа, порядки элементов.

1. Введение

Для целого n обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых делителей n. Если G — конечная группа, то множество $\pi(|G|)$ обозначается через $\pi(G)$. Построим граф $\Gamma(G)$ простых чисел G следующим образом: $\pi(G)$ — множество его вершин и два различных простых числа p и q соединены ребром (пишем $p \sim q$), если G содержит элемент порядка pq. Пусть $t(G)$ — количество связных компонент $\Gamma(G)$ и $\pi_1(G), \pi_2(G), \dots, \pi_{t(G)}(G)$ — связные компоненты графа $\Gamma(G)$. Иногда мы будем использовать обозначение π_i вместо $\pi_i(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, то всегда предполагаем, что $2 \in \pi_1$. Связные компоненты неабелевых простых групп, имеющих по крайней мере две компоненты связности, перечислены в [1, табл. 1a, 1b, 1c]. Понятие графа простых чисел возникло при изучении некоторых когомологических вопросов, связанных с интегральными представлениями конечных групп. Было доказано, что для каждой конечной группы G выполнено неравенство $t(G) \leq 6$ [2–4] и диаметр $\Gamma(G)$ не более чем 5 (см. [5]). В [6] описаны конечные группы G, удовлетворяющие равенству $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа.

Множество порядков элементов группы G будем обозначать через $\pi_e(G)$. Очевидно, что $\pi_e(G)$ частично упорядочено по делимости. Поэтому оно однозначно определяется множеством $\mu(G)$ максимальных элементов. Обозначим через $\mu_i(G)$ множество таких чисел $n \in \mu(G)$, простые делители которых принадлежат $\pi_i(G)$.

Пусть G — конечная группа такая, что $G \cong H$ в том и только в том случае, когда $\pi_e(G) = \pi_e(H)$. Тогда G называют *распознаваемой по множеству порядков элементов* (см. [7–9]). Конечную простую неабелеву группу P называют

The second author was supported in part by a grant from IPM (N 85200022).

квазираспознаваемой по множеству порядков элементов, если каждая конечная группа G такая, что $\pi_e(G) = \pi_e(P)$, обладает композиционным фактором, изоморфным P (см. [10]). По аналогии с этими понятиями введем определения для графа простых чисел.

Определение 1.1. Говорят, что конечная группа G *распознаваема по графу простых чисел*, если $H \cong G$ для любой конечной группы H такой, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$. Говорят, что конечная неабелева простая группа P *квазираспознаваема по графу простых чисел*, если каждая конечная группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(P)$, имеет композиционный фактор, изоморфный P.

О. А. Алексеева и А. С. Кондратьев [10] доказали, что каждая конечная простая группа, в которой есть по крайней мере три компоненты связности (кроме A_6), квазираспознаваема по графу простых чисел. В настоящей работе мы докажем следующий результат.

Основная теорема. *Простая группа* ${}^2G_2(q)$, *где* $q = 3^{2n+1}$ $(n > 0)$, *квазираспознаваема по графу простых чисел.*

Все рассматриваемые группы конечны, и под простой группой мы понимаем неабелеву простую группу. Все понятия, не определенные ниже, можно найти, например, в [11]. При доказательстве основной теоремы использована классификация конечных простых групп, результаты Уильямса [4], Айвори и Ямаки [2] и А. С. Кондратьева [3] о графе простых чисел простой группы, а также Лючидо [12] о графе простых чисел почти простой группы. Ввиду того, что есть некоторые ошибки в таблицах из [3, 4], мы используем исправленные таблицы простых групп с несвязным графом простых чисел из [1].

Обозначим через (a, b) наибольший общий делитель положительных целых чисел a и b. Пусть m целое положительное и p простое. Тогда через $|m|_p$ обозначается p-часть числа m. Иными словами, $|m|_p = p^k$, если $p^k \| m$ (т. е. $p^k \mid m$, но $p^{k+1} \nmid m$). Пусть p простое и $(a, p) = 1$. Пусть $k \geq 1$ наименьшее положительное целое такое, что $a^k \equiv 1 \pmod p$. Тогда k называют *порядком числа a относительно p* и обозначают через $\mathrm{ord}_p(a)$. Из малой теоремы Ферма легко следует, что $\mathrm{ord}_p(a) \mid (p-1)$. Кроме того, если $a^n \equiv 1 \pmod p$, то $\mathrm{ord}_p(a) \mid n$.

2. Предварительные результаты

Замечание 2.1. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $p \sim q$ в $\Gamma(G/N)$. Тогда $p \sim q$ в $\Gamma(G)$. Действительно, если $xN \in G/N$ имеет порядок pq, то найдется степень x, имеющая порядок pq.

Определение 2.1 [13]. Конечная группа G называется 2-*фробениусовой*, если в ней есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$, где K и G/H — фробениусовы группы с ядрами H и K/H соответственно.

Грюнберг и Кегель доказали следующую структурную теорему для конечных групп с несвязным графом простых чисел.

Лемма 2.1 [4, теорема A]. *Если G — конечная группа, граф простых чисел которой имеет более одной компоненты, то G — одна из следующих групп:*

(a) *фробениусова или 2-фробениусова группа;*

(b) *простая группа;*

(c) *расширение π_1-группы простой группой;*

(d) *расширение простой группы π_1-группой;*

(e) *расширение π_1-группы посредством расширения простой группы с помощью π_1-группы.*

В следующей лемме собраны основные структурные свойства фробениусовой группы [13–15] и 2-фробениусовой группы [13].

Лемма 2.2. **(a)** *Пусть G — фробениусова группа и H, K — фробениусовы дополнение и ядро G соответственно. Тогда $t(G) = 2$, компонентами графа простых чисел группы G являются $\pi(H)$, $\pi(K)$ и G имеет одну из следующих структур:*

(i) *$2 \in \pi(K)$, и все силовские подгруппы H циклические;*

(ii) *$2 \in \pi(H)$, K — абелева группа, H — разрешимая группа, в которой силовские подгруппы нечетного порядка являются циклическими группами, и 2-силовские подгруппы в H суть циклические группы или группы кватернионов;*

(iii) *$2 \in \pi(H)$, K — абелева группа, и существует $H_0 \leq H$ такое, что $|H : H_0| \leq 2$, $H_0 = Z \times SL(2,5)$, $\pi(Z) \cap \{2,3,5\} = \varnothing$ и силовские подгруппы в Z циклические.*

(b) *Если G 2-фробениусова, то $t(G) = 2$. В терминах определения 2.1 $\pi_1 = \pi(G/K) \cup \pi(H)$ и $\pi_2 = \pi(K/H)$.*

Лемма 2.3. *Если G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(^2G_2(q))$, где $q = 3^{2n+1}$ $(n > 0)$, то в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что G/K — π_1-группа, H — нильпотентная π_1-группа и K/H — неабелева простая группа с $t(K/H) \geq 3$ и $G/K \leq \mathrm{Out}(K/H)$. Кроме того, если $j \in \{2,3\}$, то найдется $i \geq 2$ такое, что $\pi_j(^2G_2(q)) = \pi_i(K/H)$.*

Доказательство. Первая часть леммы вытекает непосредственно из предыдущих лемм. Так как $t(G) \geq 2$, то $Z(G/H) = 1$. Кроме того, если $xH \in G/H$ и $xH \notin K/H$, то xH индуцирует на K/H автоморфизм, который тривиален тогда и только тогда, когда $xH \in Z(G/H)$. Поэтому $G/H \leq \mathrm{Aut}(K/H)$ и поскольку $Z(G/H) = 1$, то $G/K \leq \mathrm{Out}(K/H)$. $\square$

Следующая лемма представляет собой известный результат теории чисел.

Лемма 2.4 [16, с. 29]. *Пусть $a > 1$, m и n положительные целые. Тогда*

$$(a^n - 1, a^m - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Лемма 2.5 [3]. *Пусть $q > 1$, m и n положительные целые. Тогда*

$$\left(\frac{q^n - 1}{q^{(n,m)} - 1}, q^m - 1\right) = \left(\frac{n}{(n,m)}\ , q^{(n,m)} - 1\right).$$

Лемма 2.6 [17]. *Единственное решение диофантова уравнения $p^m - q^n = 1$, где p, q простые и $m, n > 1$, таково: $3^2 - 2^3 = 1$.*

Лемма 2.7 [17, 18]. *За исключением соотношений $(239)^2 - 2(13)^4 = -1$ и $(3)^5 - 2(11)^2 = 1$, каждое решение уравнения*

$$p^m - 2q^n = \pm 1, \quad p, q \text{ простые}, \ m, n > 1,$$

имеет показатели $m = n = 2$, т. е. оно получается из единицы $p - q.2^{\frac{1}{2}}$ поля $Q(2^{\frac{1}{2}})$, для которого коэффициенты p, q простые.

Лемма 2.8 (теорема Жигмонди [19]). *Пусть p простое и n положительное целое. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(i) *существует примитивное простое p' для $p^n - 1$, т. е. $p' \mid (p^n - 1)$, но $p' \nmid (p^m - 1)$ для любого $1 \leq m < n$,*

(ii) *$p = 2$, n равно 1 или 6,*

(iii) *p — простое число Мерсенна, и $n = 2$.*

3. Доказательство основной теоремы

Если P — простая конечная группа с несвязным графом простых чисел, то $|\mu_i(P)| = 1$ для $i > 1$ по лемме 4 из [10]. Пусть $\mu_i(P) = \{n_i(P)\}$ для $i > 1$. Очевидно, если G — конечная группа такая, что $t(G) \geq 3$, и P — неабелев композиционный фактор G, то для любого $i \in \{2, \dots, t(G)\}$ существует $j \in \{2, \dots, t(P)\}$ такое, что $\mu_i(G) = \{n_j(P)\}$. О. А. Алексеева и А. С. Кондратьев использовали в [10] этот факт для доказательства квазираспознаваемости некоторых групп по множествам порядков их элементов. Заметим, что с помощью $\Gamma(G)$ мы не можем определить $n_i(G)$. Например, графы простых чисел групп $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_8$ совпадают.

Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов не влечет квазираспознаваемости по графу простых чисел. Например, альтернированная группа A_5 квазираспознаваема по множеству порядков элементов [20], но не квазираспознаваема по графу простых чисел, поскольку она имеет такой же граф простых чисел, как и A_6. Очевидно, что квазираспознаваемость по графу простых чисел влечет квазираспознаваемость по множеству порядков элементов.

Доказательство основной теоремы. Пусть G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(^2G_2(q))$, где $q = 3^{2n+1}$ $(n \geq 1)$. Из [14, XI, теоремы 13.2 и 13.4] или [21] вытекает, что

$$\pi_e(^2G_2(q)) = \{1, 2, 3, 6, 9, \text{ делители } (q-1),\\ (q+1)/2, q - \sqrt{3q} + 1 \text{ и } q + \sqrt{3q} + 1\}. \quad (1)$$

Поэтому $t(G) = 3$ и $\pi_1 = \pi(q(q^2 - 1))$. Кроме того, компоненты G, содержащие только нечетные числа (назовем их *нечетными компонентами*), суть $\pi_2 = \pi(q + \sqrt{3q} + 1)$ и $\pi_3 = \pi(q - \sqrt{3q} + 1)$. Отметим, что в $\Gamma(G)$ вершина 3 соединена только с вершиной 2. К тому же $\pi(G) = \pi(^2G_2(q))$ и если $n \geq 1$, то

$$|^2G_2(3^{2n+1})| = 3^{3(2n+1)}(3^{2(2n+1)} - 1)(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1)(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1)\\ = 3^{3(2n+1)}(3^{2(2n+1)} - 1)(3^{2(2n+1)} - 3^{2n+1} + 1).$$

Очевидно, что $3^{2(2n+1)} \equiv -1 (\mathrm{mod}) 5$, тем самым $5 \nmid |^2G_2(3^{2n+1})|$ и, следовательно, $5 \notin \pi(G)$. Так как $t(G) = 3$, то G по лемме 2 не является ни фробениусовой группой, ни 2-фробениусовой группой. Поэтому из леммы 2.3 вытекает, что G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ таким, что G/K — π_1-группа, H — нильпотентная π_1-группа и K/H — неабелева простая группа. Кроме того, $t(K/H) \geq 3$. Рассмотрим теперь по отдельности все возможности для K/H.

Случай 1. Пусть $K/H \cong A_p$, где p и $p - 2$ простые. Тогда $5 \mid |K/H|$; противоречие, ибо $5 \notin \pi(G)$.

Случай 2. Пусть $K/H \cong A_1(q')$, где $q' = p^\alpha$ и $4 \mid (q' + 1)$.

Нечетные компоненты $A_1(q')$ суть $\pi(q') = \{p\}$ и $\pi((q' - 1)/2)$. Рассмотрим два случая.

(2.1) Если $\pi(3^{2n+1}+3^{n+1}+1)=\{p\}$, то $3^{2n+1}+3^{n+1}+1=p^\beta$ для некоторого $\beta>0$ и $\pi(3^{2n+1}-3^{n+1}+1)=\pi((p^\alpha-1)/2)$. Отсюда

$$\pi((p-1)/2)\subseteq\pi(p^\beta-1)=\pi(3^{n+1}(3^n+1))$$

и аналогично

$$\pi((p-1)/2)\subseteq\pi((p^\alpha-1)/2)=\pi(3^{2n+1}-3^{n+1}+1).$$

Если $x\in\pi((p-1)/2)$, то $x\mid 3^{n+1}(3^n+1)$ и $x\mid 3^{2n+1}-3^{n+1}+1$. Очевидно, что $x\neq 3$ и тем самым $x\mid(3^{n+1}+3)$, откуда $x\mid(3^{2n+1}+4)$. С другой стороны, $x\mid(3^n+1)$, и, значит, $x\mid 3(3^{2n}-1)$. Поэтому $x\mid 7$, так что $(p-1)/2=7^t$ для некоторого $t>0$. Тогда $p=2\times 7^t+1$; противоречие, потому что $3\mid(2\times 7^t+1)$ и $p\neq 3$ простое.

(2.2) Если $\pi(3^{2n+1}-3^{n+1}+1)=\{p\}$, то аналогично получаем противоречие.

Случай 3. Пусть $K/H\cong A_1(q')$, где $q'=p^\alpha$ и $4\mid(q'-1)$.

Компоненты K/H суть $\pi(q')=\{p\}$ и $\pi((q'+1)/2)$. Аналогично случаю 2 рассмотрим два подслучая.

(3.1) Если $\pi(3^{2n+1}+3^{n+1}+1)=\{p\}$, то $3^{n+1}(3^n+1)=p^\beta-1$ для некоторого $\beta>0$. Кроме того,

$$\pi((p^\alpha+1)/2)=\pi(3^{2n+1}-3^{n+1}+1).$$

Согласно предположению $\pi(K/H)\subseteq\pi(G)$ и, следовательно, $\pi(q'-1)\subseteq\pi_1(G)$. Поэтому $\pi(p^\alpha-1)\subseteq\pi(3^{4n+2}-1)\cup\{3\}$ и тем самым $\pi(p-1)\subseteq\pi(3^{4n+2}-1)\cup\{3\}$. С другой стороны,

$$\pi(p-1)\subseteq\pi(p^\beta-1)\subseteq\pi(3^n+1)\cup\{3\}\subseteq\pi(3^{2n}-1)\cup\{3\}.$$

Пусть $3\neq x\in\pi(p-1)$. Тогда

$$x\in\pi(3^{2n}-1)\cap\pi(3^{4n+2}-1).$$

Теперь $x\mid(3^{2n}-1)$ и $x\mid(3^{4n+2}-1)$, откуда

$$x\mid(3^{2n}-1,3^{4n+2}-1)=3^{(2n,4n+2)}-1=3^2-1=8.$$

Поэтому $\pi(p-1)\subseteq\{2,3\}$.

(a) Если $n=1$, то $p=37$ и $\pi((37^\alpha+1)/2)=\{19\}$. Отсюда $(37^\alpha+1)/2=19^t$ для некоторого $t>0$. Из леммы 2.7 вытекает, что $\alpha=t=1$. Заключаем теперь, что $K/H\cong A_1(37)$. Ввиду леммы 2.3 известно, что $G/K\leq\mathrm{Out}(K/H)$. Кроме того, $|\mathrm{Out}(A_1(37))|=2$, $|A_1(37)|=19\times37\times36$ и $|{}^2G_2(3^3)|=3^9(3^6-1)\times 19\times 37$, откуда $\{7,13\}\subseteq\pi(H)$. Вновь используя лемму 2.3, выводим, что H — нильпотентная группа и, значит, $7\sim 13$ в $\Gamma(G)$; противоречие.

(b) Пусть теперь $n\geq 2$. Мы доказали, что $\pi(p-1)\subseteq\{2,3\}$ и тем самым $p=2^t3^s+1$, где $t\geq 1$ и $s\geq 0$.

Получим противоречие в следующих случаях.

(i) Если $s=0$, то $p=2^t+1$. Отсюда

$$p^\beta-1=3^{n+1}(3^n+1)\Rightarrow(2^t+1)^\beta-1=3^{n+1}(3^n+1)\Rightarrow 2^t\mid(3^n+1).$$

Однако легко показать, что если n нечетно, то $4\|(3^n+1)$, а если n четно, то $2\|(3^n+1)$. Поэтому 2^t равно 2 или 4, откуда $p=3$ или $p=5$. Из $3\mid(p^\beta-1)$ вытекает, что $p=5$ и $5^\beta-1=3^{n+1}(3^n+1)$. Тогда $3\mid(5^\beta-1)$, следовательно,

β четно. Мы пришли к противоречию, так как если β четно, то $8 \mid (5^\beta - 1)$ и $8 \nmid (3^n + 1)$.

(ii) Если $s \geq 1$ и $\beta = 1$, то $2^t 3^s = 3^{n+1}(3^n+1)$. Отсюда $s = n+1$ и $3^n+1 = 2^t$. Из леммы 2.6 следует, что единственным решением этого диофантова уравнения является $n = 1$ и $t = 2$. Но эта ситуация обсуждалась в случае (а).

(iii) Если $s \geq 1$ и $\beta \geq 2$, то

$$p^\beta - 1 = 2^t 3^s((2^t 3^s + 1)^{\beta-1} + \cdots + (2^t 3^s + 1) + 1) = 3^{n+1}(3^n + 1).$$

Если $(\beta, 3) = 1$, то, поскольку $((p^\beta - 1)/(p-1), p-1) = (\beta, p-1)$, имеем $3^s = 3^{n+1}$ и тем самым $s = n + 1$. Но в этом случае

$$(2^t 3^s + 1)^{\beta-1} + 1 \geq 2^t 3^s + 1 \geq 2 \times 3^{n+1} + 1 > 3^n + 1;$$

противоречие.

Если $|\beta|_3 = 3^k$ для некоторого $k \geq 1$, то $3^s|\beta|_3 = 3^{s+k} = 3^{n+1}$. Отсюда $s + k = n + 1$. Поэтому

$$(2^t 3^s + 1)^{\beta-1} + 1 \geq (2 \times 3^s + 1)^{3^k-1} + 1 > 2^{3^k-1} 3^{s(3^k-1)} + 1.$$

Заключаем теперь, что $2^{3^k-1} 3^{(n+1-k)(3^k-1)} > 3^n$. По предположению $n = k + s - 1$, $k \geq 1$ и $(k-1)/(3^k-2) < 1$. Поэтому $n > k - 1 + (k-1)/(3^k-2)$, а значит, $(3^k - 2)n > (k-1)(3^k-1)$. Отсюда $(n+1-k)(3^k-1) > n$, поэтому

$$2^{3^k-1} 3^{(n+1-k)(3^k-1)} > 3^n;$$

противоречие.

(3.2) Если $\pi(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1) = \{p\}$, то приходим к противоречию аналогично (3.1), поэтому подробности опускаем.

Случай 4. Пусть $K/H \cong A_1(q')$, где $q' = 2^\alpha$.

Тогда нечетные компоненты K/H суть $\pi(2^\alpha - 1)$ и $\pi(2^\alpha + 1)$. Поэтому

$$\pi(2^{2\alpha} - 1) = \pi(3^{2(2n+1)} - 3^{2n+1} + 1),$$

что невозможно, ибо $3 \in \pi(2^{2\alpha} - 1)$, но $3 \notin \pi(3^{2(2n+1)} - 3^{2n+1} + 1)$.

Случай 5. Пусть $K/H \cong G_2(q')$, где $q' = 3^m$. Тогда

$$\{\pi(3^{2m} + 3^m + 1), \pi(3^{2m} - 3^m + 1)\} = \{\pi(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1), \pi(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1)\}.$$

Поскольку $\pi(K/H) \subseteq \pi(G)$, то

$$\pi(3^{2m} - 1) \subseteq \pi(3^{2(2n+1)} - 1).$$

Пусть $d = (m, 2n+1)$. Из леммы 2.4 вытекает, что

$$(3^{2m} - 1, 3^{2(2n+1)} - 1) = 3^{2d} - 1.$$

Если $d < m$, то по лемме Жигмонди $3^{2m} - 1$ имеет примитивное простое p_0 такое, что $p_0 \mid (3^{2m} - 1)$, но $p_0 \nmid (3^{2d} - 1)$; противоречие, ибо $\pi(3^{2m} - 1) \subseteq \pi(3^{2(2n+1)} - 1)$. Поэтому $d = m$ и тем самым $m \mid (2n+1)$. Пусть $2n + 1 = mt$ для некоторого $t > 0$. Поскольку нечетные компоненты G и K/H совпадают, то

$$\begin{aligned}\pi(3^{2m} + 3^m + 1) \cup \pi(3^{2m} - 3^m + 1) &= \pi(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1) \cup \pi(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1) \\ &= \pi(3^{2(2n+1)} - 3^{2n+1} + 1) = \pi(3^{2mt} - 3^{mt} + 1).\end{aligned}$$

Пусть $x \in \pi(3^{2m} + 3^m + 1)$, откуда $x \in \pi(3^{3m} - 1)$. Тогда $x \in \pi(3^{2mt} - 3^{mt} + 1)$, и мы заключаем, что $x \in \pi(3^{3mt} + 1)$. Так как $\pi(3^{3m} - 1) \subseteq \pi(3^{3mt} - 1)$, имеем $x \mid 2$. Однако x нечетно и тем самым $x = 1$; противоречие.

Случай 6. Пусть $K/H \cong {}^2D_{p'}(3)$, где $p' = 2^m + 1$ $(m \geq 1)$. Поскольку 5 является делителем числа $|{}^2D_3(3)|$, то $m \neq 1$ и тем самым $p' \neq 3$. Нечетные компоненты K/H суть $\pi((3^{p'}+1)/4)$ и $\pi((3^{p'-1}+1)/2)$. Если $x \in \pi((3^{p'}+1)/4)$, то $3^{p'} \equiv -1 \pmod{x}$. Очевидно, $x \neq 3$. Значит, $3^{2p'} \equiv 1 \pmod{x}$, откуда $\mathrm{ord}_x(3)$ — делитель $2p'$. Ясно, что $\mathrm{ord}_x(3) \neq 2$ и $\mathrm{ord}_x(3) = 2p'$. Кроме того,

$$\pi((3^{p'} + 1)/4) \cup \pi((3^{p'-1} + 1)/2) = \pi(q - \sqrt{3q} + 1) \cup \pi(q + \sqrt{3q} + 1) \subseteq \pi(q^3 + 1).$$

Отсюда $x \in \pi(q^3 + 1)$, а это влечет, что $x \mid (3^{6n+3} + 1)$. Значит, $3^{12n+6} \equiv 1 \pmod{x}$. Поэтому $\mathrm{ord}_x(3) \mid (12n+6)$ и тем самым $p' \mid 3(2n+1)$. По предположению $p' \neq 3$ и тем самым $p' \mid (2n+1)$. Отсюда $(3^{p'}+1) \mid (3^{2n+1}+1)$, следовательно, $x \mid (3^{2n+1} + 1)$. Так как $x \in \pi(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1) \cup \pi(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1)$, имеем $x \mid 3^{n+1}$; противоречие, ибо $x \neq 3$.

Случай 7. Пусть $K/H \cong {}^2B_2(q')$, где $q' = 2^{2m+1} > 2$. Двумя из нечетных компонент K/H являются $\pi(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)$ и $\pi(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1)$. Кроме того,

$$(2^{2m+1} + 2^{m+1} + 1)(2^{2m+1} - 2^{m+1} + 1) = 2^{4m+2} + 1.$$

Для любого m будет $5 \mid (2^{4m+2} + 1)$; противоречие с тем, что $5 \nmid |G|$.

Аналогично $K/H \ncong {}^2F_4(q')$, где $q' = 2^{2m+1} > 2$ и $K/H \ncong E_8(q')$. Кроме того, $K/H \ncong S$, где S — спорадическая простая группа, так как 5 делит порядок каждой спорадической простой группы. Аналогично K/H не изоморфна $A_2(2)$, $A_2(4)$, ${}^2A_5(2)$ и $E_7(2)$.

Случай 8. Пусть $K/H \cong F_4(q')$, где $q' = 2^m > 2$. Известно, что $(q'^4 - 1)$ — делитель $|F_4(q')|$ и $5 \mid (q'^4 - 1)$. Поэтому 5 делит $|F_4(q')|$; противоречие, ибо $5 \notin \pi(G)$.

Случай 9. Пусть $K/H \cong {}^2G_2(\alpha)$, где $\alpha = 3^{2m+1}$ $(m \geq 1)$. Тогда нечетные компоненты K/H суть $\pi(3^{2m+1} - 3^{m+1} + 1)$ и $\pi(3^{2m+1} + 3^{m+1} + 1)$. Согласно предположению имеем

$$\begin{aligned} &\pi(3^{2m+1} - 3^{m+1} + 1) \cup \pi(3^{2m+1} + 3^{m+1} + 1) \\ &\qquad = \pi(3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1) \cup \pi(3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1) \end{aligned} \tag{2}$$

и $\pi(3^{2(2m+1)} - 1) \subseteq \pi(3^{2(2n+1)} - 1)$. Пусть $d = (2m + 1, 2n + 1)$. Тогда

$$(3^{2(2m+1)} - 1, 3^{2(2n+1)} - 1) = 3^{2d} - 1$$

по лемме 2.4. Если $d < 2m + 1$, то $3^{2(2m+1)} - 1$ по теореме Жигмонди имеет примитивное простое p_0 такое, что $p_0 \nmid (3^{2d} - 1)$; противоречие. Поэтому $(2m + 1) \mid (2n + 1)$. Пусть $2n + 1 = (2m + 1)t$ для некоторого $t > 0$. Известно, что

$$(3^{2m+1} - 3^{m+1} + 1)(3^{2m+1} + 3^{m+1} + 1) = 3^{2(2m+1)} - 3^{2m+1} + 1,$$

и тем самым из (2) следует, что

$$\pi(3^{2(2m+1)} - 3^{2m+1} + 1) = \pi(3^{2t(2m+1)} - 3^{t(2m+1)} + 1),$$

или

$$\pi(\alpha^2 - \alpha + 1) = \pi(\alpha^{2t} - \alpha^t + 1). \tag{3}$$

Покажем, что $t = 1$. Если p_0 примитивное простое для $\alpha^{6t} - 1$, то p_0 — делитель $\alpha^{2t} - \alpha^t + 1$, так как

$$\alpha^{6t} - 1 = (\alpha^{2t} - \alpha^t + 1)(\alpha^t + 1)(\alpha^{3t} - 1)$$

и $(\alpha^t + 1) \mid (\alpha^{2t} - 1)$. Однако если $t > 1$, то $p_0 \notin \pi(\alpha^2 - \alpha + 1)$; противоречие. Тем самым $t = 1$ и, значит, $q = \alpha$. Итак, $K/H \cong^2 G_2(q)$, а это доказывает квазираспознаваемость ${}^2G_2(q)$.

Доказательство теоремы завершено. □

4. Дополнительные результаты

Заметим, что $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ — граф с двумя вершинами, т. е. $V = \{2, 3\}$ и существует ребро между 2 и 3. Но $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{2^k}) = \Gamma(\mathbb{Z}_6)$ для любого $k > 0$. Кроме того, $S_3 \times \mathbb{Z}_{2^k}$, где $k > 0$, является неабелевой группой, и $\Gamma(S_3 \times \mathbb{Z}_{2^k}) = \Gamma(\mathbb{Z}_6)$. Поэтому найдется бесконечно много неизоморфных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(\mathbb{Z}_6)$. Отметим к тому же, что даже если $|G| = |M|$ и $\Gamma(G) = \Gamma(M)$, то мы не можем заключить, что $G \cong M$.

Следствие 4.1. *Пусть G — конечная группа. Если G — конечная группа, удовлетворяющая $|G| = |{}^2G_2(q)|$, где $q = 3^{2n+1}$ $(n \geq 1)$ и $\Gamma(G) = \Gamma({}^2G_2(q))$, то $G \cong {}^2G_2(q)$.*

Доказательство. По предположению $\Gamma(G) = \Gamma({}^2G_2(q))$. Используя основную теорему, получим, что G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что $K/H \cong {}^2G_2(q)$. Кроме того, $|G| = |{}^2G_2(q)|$, и тем самым $H = 1$ и $G = K$, поэтому $G \cong {}^2G_2(q)$. □

Замечание 4.2. Ши и Би в [22] сделали следующее

Предположение. *Пусть G — группа и M — конечная простая группа. Тогда $G \cong M$ тогда и только тогда, когда* (i) $|G| = |M|$ *и* (ii) $\pi_e(G) = \pi_e(M)$.

Это предположение справедливо для спорадических простых групп [23], альтернированных групп и некоторых простых групп лиева типа [22, 24, 25]. Как следствие основной теоремы докажем справедливость этого предположения для рассматриваемых групп.

Следствие 4.3. *Пусть G — конечная группа. Если $|G| = |{}^2G_2(q)|$, где $q = 3^{2n+1}$ $(n \geq 1)$ и $\pi_e(G) = \pi_e({}^2G_2(q))$, то $G \cong^2 G_2(q)$.*

Очевидно, следствие 4.1 является обобщением предположения Ши и Би, и тем самым следствие 4.3 немедленно вытекает из следствия 4.1.

Теорема 4.4. *Пусть G — конечная группа. Если $\Gamma(G) = \Gamma({}^2G_2(q))$, где $q = 3^{2n+1}$ $(n \geq 1)$, то G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ таким, что $K/H \cong^2 G_2(q)$, G/K является 3-группой и H — нильпотентная $\{2, 3\}$-группа.*

Доказательство. По основной теореме и предыдущим леммам получаем, что G имеет нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ такой, что $K/H \cong {}^2G_2(q)$, H — нильпотентная π_1-группа и G/K — π_1-группа. Согласно предположению имеем $G/K \leq \mathrm{Out}(K/H)$ и каждый элемент из $\mathrm{Out}(K/H)$ является автоморфизмом полей, порядок которого является делителем $2n + 1$. Пусть φ — элемент из G/K порядка m. Тогда $m \mid (2n + 1)$ и φ — автоморфизм полей. Пусть $p \neq 3$ — простой делитель m. Так как каждый автоморфизм полей φ централизует простое подполе, то $p \sim 3$ в $\Gamma(G)$. Заметим, что $p \mid (2n + 1)$ и тем самым p нечетно. Известно также, что если $p' \neq 2, 3$ — простой делитель $|G|$, то согласно

(1) $3 \nsim p'$ в $\Gamma(G)$. Поэтому $p \nsim 3$; противоречие. Следовательно, порядок φ равен $m = 3^{\beta}$, что делит $2n+1$.

Пусть p — простой делитель $|H|$ и P — силовская p-подгруппа в H. Так как H нильпотентна, то $P \operatorname{ch} H$. Кроме того, $H \lhd G$, и тем самым $P \lhd G$. Если $p \neq 2,\ 3$, то $p \nsim 3$ в $\Gamma(G)$. Пусть N — силовская 3-подгруппа в $K/H \cong {}^2G_2(q)$. Тогда N действует сопряжениями на P и поскольку $p \nsim 3$, то N действует без неподвижных точек на P. Далее, NP — группа Фробениуса, и тем самым N является циклической группой. Известно, что в $K/H \cong^2 G_2(q)$ нет элемента порядка $3^a > 9$; противоречие. $\square$

Благодарности

Авторы признательны рецензенту за полезные предложения, приведшие к исправлениям и упрощениям некоторых доказательств и реструктуризации текста, сделавшей его более ясным. Второй автор выражает благодарность Исследовательскому институту теоретической физики и математики (IPM), Тегеран, Иран, за финансовую поддержку. Мы посвящаем эту статью нашей семье — Зорайе, Бахману и Бехнаму за из бесконечную любовь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 420–432.
2. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic // J. Algebra. 1993. V. 155, N 2. P. 335–343.
3. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
4. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
5. *Lucido M. S.* The diameter of the prime graph of a finite group // J. Group Theory. 1999. V. 2, N 2. P. 157–172.
6. *Hagie M.* The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 9. P. 4405–4424.
7. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
8. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
9. *Mazurov V. D., Shi W.* Groups whose elements have given orders // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1999. V. 261. P. 532–537.
10. *Алексеева О. А., Кондратьев А. С.* Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
11. *Conway J., Curtis R., Norton S., Parker R., Wilson R.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
12. *Lucido M. S.* Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. V. 102. P. 1–22.
13. *Gruenberg K. W., Roggenkamp K. W.* Decomposition of the augmentation ideal and of the relation modules of a finite group // Proc. London Math. Soc. 1975. V. 31, N 2. P. 149–166.
14. *Blackburn N., Huppert B.* Finite Groups. III. Berlin: Springer-Verl., 1982.
15. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
16. *Sierpiński W.* Elementary theory of numbers. Warsaw: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1964. (Monogr. Mat.; T. 42).
17. *Khosravi A., Khosravi B.* A new characterization of some alternating and symmetric groups. II // Houston J. Math. 2004. V. 30, N 4. P. 465–478.
18. *Crescenzo P.* A Diophantine equation which arises in the theory of finite groups // Adv. Math. 1975. V. 17. P. 25–29.

19. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.
20. *Shi W., Yang W.* A new characterization of A_5 and the finite groups in which every non-identity element has prime order (Chinese) // J. Southwest-China Teacher College. 1984. V. 1. P. 36–40.
21. *Brandl R., Shi W.* A characterization of finite simple groups with abelian Sylow 2-subgroup // Ricerche Mat. 1993. V. 42, N 1. P. 193–198.
22. *Shi W., Bi J.* A characteristic property for each finite projective special linear group // Lecture Notes in Math. 1990. V. 1456. P. 171–180.
23. *Shi W.* A new characterization of the sporadic simple groups // Group theory: Proc. of the group theory conf. Singapore, 1987. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1989. P. 531–540.
24. *Shi W.* Pure quantitative characterization of finite simple groups. I // Progr. Natural Sci. 1994. V. 4, N 3. P. 316–326.
25. *Shi W.* A new characterization of some simple groups of Lie type // Contemp. Math. 1989. V. 82. P. 171–180.

Статья поступила 27 октября 2005 г., окончательный вариант — 9 февраля 2006 г.

Amir Khosravi
Faculty of Mathematical Sciences and Computer Engineering,
University For Teacher Education,
599 Taleghani Ave., Tehran 15614, IRAN

Behrooz Khosravi
Dept. of Pure Math., Faculty of Math. and Computer Sci.,
Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic),
424, Hafez Ave., Tehran 15914, IRAN,
and Institute for Studies in Theoretical Physics and Mathematics (IPM)
khosravibbb@yahoo.com