Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 517.98

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА НА ПРОСТРАНСТВЕ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ НА ПОЛИКРУГЕ

С. Стевич

Аннотация: Изучается интегральный оператор вида

$$T_g(f)(z) = \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) g(\zeta_1, , \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \dots \zeta_n$$

на пространстве аналитических функций на единичном поликруге U^n в $\mathbb{C}^n$. Доказано, что этот оператор ограничен в пространстве со смешанной нормой

$$\mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n) = \left\{ f \in H(U^n) \mid \int_{[0,1)^n} M_p^q(f,r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}\, dr_j < \infty \right\},$$

где $p, q \in [1, \infty)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ таковы, что $\alpha_j > -1$ при любом $j = 1, \dots, n$ тогда и только тогда, когда $\sup_{z \in U^n} \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)|g(z)| < \infty$. Доказано также, что этот оператор компактен тогда и только тогда, когда $\lim_{z \to \partial U^n} \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|)|g(z)| = 0$.

Ключевые слова: аналитическая функция, пространство со смешанной нормой, интегральный оператор, поликруг, ограниченность, компактность.

1. Введение

Пусть U — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, U^n — единичный поликруг в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$, $H(U^n)$ — множество аналитических функций $f : U^n \to \mathbb{C}$. Пространство Блоха $\mathscr{B} = \mathscr{B}(U)$ состоит из всех аналитических функций f на U таких, что

$$b(f) = \sup_{z \in U} (1 - |z|^2)|f'(z)| < \infty.$$

В [1] введен следующий интегральный оператор:

$$T_g(f)(z) = \int_0^z f(\zeta) g'(\zeta)\, d\zeta, \tag{1}$$

там же показано, что T_g ограничен на пространстве Харди H^2 тогда и только тогда, когда $g \in BMOA$. Этот результат был распространен на пространства

H^p с $1 \le p < \infty$ в [2], где компактность T_g на H^p также характеризовалась в терминах символа g.

В [3] оператор (1) изучался на весовом пространстве Бергмана

$$\mathscr{A}^p_\omega(U) = \left\{ f \in H(U) \mid \int\limits_U |f(z)|^p \omega(z)\, dm(z) < \infty \right\}$$

с весом $\omega(r)$, отличным от стандартного $(1-r)^\alpha$. Недавно возрос интерес к исследованию весовых пространств Бергмана с весами, отличными от стандартных (см., например, [3–9] и библиографию там).

Теорема A [3]. *Пусть ω — положительная радиальная весовая функция на единичном круге и существует константа C такая, что*

$$\omega(r) \ge \frac{C}{1-r} \int\limits_r^1 \omega(s) ds, \quad 0 < r < 1.$$

Если $g \in \mathscr{B}$, то T_g ограничен на $\mathscr{A}^p_\omega$ и $\|T_g\|_{\mathrm{op}} \le C(p)\|g\|_{\mathscr{B}}$ для $p \ge 1$. Здесь $\|T_g\|_{\mathrm{op}}$ — операторная норма T_g.

Эта теорема послужила толчком для определения нами и изучения в [10] следующего семейства интегральных операторов $T_{\vec{g}}$ на U^n:

$$T_{\vec{g}}(f)(z) = \int\limits_0^{z_1} \cdots \int\limits_0^{z_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \prod_{j=1}^n g'_j(\zeta_j)\, d\zeta_j, \tag{2}$$

где $f(z) = \sum\limits_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha z^\alpha$ — аналитическая функция на U^n (α — мультииндекс из $\mathbb{Z}^n_+$). Здесь g_j, $j = 1, \dots, n$, — аналитические функции на единичном круге. Легко видеть, что

$$T_{\vec{g}}(f)(z) = \prod_{j=1}^n z_j \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\tau_1 z_1, \dots, \tau_n z_n) \prod_{j=1}^n g'_j(\tau_j z_j)\, d\tau_j.$$

Если $g_j(\zeta_j) = \ln \frac{1}{1-\zeta_j}$, $j = 1, \dots, n$, то оператор $T_{\vec{g}}(f)$ переходит в оператор

$$\vec{\mathscr{C}}(f)(z) = \prod_{j=1}^n z_j \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(\tau_1 z_1, \dots, \tau_n z_n) \prod_{j=1}^n (1 - \tau_j z_j)^{-1} d\tau_1 \dots d\tau_n,$$

являющийся естественным обобщением оператора Чезаро $\mathscr{C}$, определенного на единичном круге.

Оператор Чезаро на единичном круге изучался многими авторами (см., например, [3, 11–22] и библиографию там). Если $g_j(\zeta_j) = \zeta_j$, $j = 1, \dots, n$, то $T_{\vec{g}}(f)$ — оператор интегрирования.

В настоящей статье мы продолжаем исследование некоторых интегральных операторов, заданных на аналитических функциях на U^n, начатое в работах [4, 10, 23, 24].

В дальнейшем мы используем сокращение $z \cdot w$ для $(z_1 w_1, \dots, z_n w_n)$ при $z, w \in \mathbb{C}^n$ и $e^{i\theta}$ для $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$; $d\tau = d\tau_1 \dots d\tau_n$; $d\theta = d\theta_1 \dots d\theta_n$, где r, s, τ —

векторы в $\mathbb{C}^n$. Запись $0 \le r < 1$, где $r = (r_1, \dots, r_n)$, означает, что $0 \le r_j < 1$ для $j = 1, \dots, n$.

Пусть $\mathscr{B}_S$ — подпространство пространства Блоха, состоящее из аналитических функций f на U таких, что

$$\|f\|_{\mathscr{B}_S} = \sup_{z \in U} |1 - z||f'(z)| < \infty.$$

В [10] доказан следующий результат.

Теорема B. *Если $g_j \in \mathscr{B}_S$, $j = 1, \dots, n$, то существует такая константа C, зависящая только от p и n, что*

$$\int\limits_{[0,2\pi]^n} |T_{\vec{g}}(f)(r \cdot e^{i\theta})|^p d\theta \le C \prod_{j=1}^{n} r_j^p \|g_j\|_{\mathscr{B}_S}^p \int\limits_{[0,2\pi]^n} |f(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta$$

для $0 < p < \infty$ и для любой $f \in H(U^n)$.

Доказательство теоремы B в случае $0 < p \le 1$ представляет собой n-мерный аналог доказательства основного результата в [14], хотя идеи восходят к Харди и Литтлвуду [25].

Из теоремы B вытекает

Следствие 1. *Если $g_j \in \mathscr{B}_S$, $j = 1, \dots, n$, то оператор $T_{\vec{g}}$ ограничен на $H^p(U^n)$ для $0 < p < \infty$. Кроме того,*

$$\|T_{\vec{g}}(f)\|_{H^p(U^n)} \le C \prod_{j=1}^{n} \|g_j\|_{\mathscr{B}_S} \|f\|_{H^p(U^n)}.$$

В частности, оператор Чезаро ограничен на пространствах $H^p(U^n)$ для $0 < p < \infty$.

Для $p, q \in (0, \infty)$ и положительных борелевских мер μ_j, $j = 1, \dots, n$, определенных на подмножествах из $(0, 1)$, весовое пространство $\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)$ состоит из всех функций f, аналитических на U^n и таких, что

$$\|f\|_{\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)} = \left[\int\limits_{[0,1)^n} \left(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |f(r \cdot e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^{n} d\mu_j(r_j) \right]^{1/q} < \infty.$$

В частности, интерес представляют абсолютно непрерывные меры вида $d\mu_j(r_j)$ $= (1 - r_j)^a r_j^b \, dr_j$. При $a = 0$, $b = 1$ и $p = q$ пространство $A_\mu^{p,q}(U^n)$ становится пространством Бергмана. Для $d\mu_j(r_j) = (1 - r_j)^{\alpha_j} \, dr_j$ обозначим это пространство через $\mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n) = \mathscr{A}_\alpha^{p,q}$ и будем называть его *пространством со смешанной нормой.*

Следствие 2. *Если $g_j \in \mathscr{B}_S$, $j = 1, \dots, n$, то оператор $T_{\vec{g}}$ ограничен на $\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)$ для $0 < p, q < \infty$. Кроме того, существует константа C, зависящая только от p, q и n, такая, что*

$$\|T_{\vec{g}}(f)\|_{\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)} \le C \prod_{j=1}^{n} \|g_j\|_{\mathscr{B}_S} \|f\|_{\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)}.$$

В частности, оператор Чезаро ограничен на пространстве $\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)$ для $0 < p, q < \infty$.

Отметим, что в следствии 2 даны только достаточные условия ограниченности оператора (2) на $\mathscr{A}_\mu^{p,q}(U^n)$.

В этой работе мы распространим оператор (2) и укажем необходимое и достаточное условие того, чтобы распространенный оператор был ограниченным на пространстве со смешанной нормой.

Распространение оператора (2) определим следующим образом:

$$T_g(f)(z) = \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_n} f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) g(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\, d\zeta_1 \ldots \zeta_n. \tag{3}$$

Здесь $g \in H(U^n)$.

Заметим, что оператор (2) получается итерированием одномерного оператора (1). Этого нет в случае оператора (3) (который не имеет столь очевидной связи с оператором (1)). В данной работе мы изучаем ограниченность и компактность оператора (3) на пространстве со смешанной нормой $\mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n)$.

Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $g \in H(U^n)$. Тогда оператор $T_g : \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n) \to \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n)$ ограничен в том и только в том случае, если*

$$\sup_{z \in U^n} |g(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|) < \infty.$$

Теорема 2. *Пусть $g \in H(U^n)$. Тогда оператор $T_g : \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n) \to \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(U^n)$ компактен в том и только в том случае, если*

$$\lim_{z \to \partial U^n} |g(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|) = 0.$$

2. Вспомогательные результаты

В этом пункте мы докажем несколько вспомогательных результатов, используемых далее в доказательствах основных теорем. Некоторые из них, возможно, известны знатокам в соответствующей области, однако мы докажем их, чтобы предоставить удобство читателю и избежать специфических ссылок.

Запись $L(f) \asymp R(f)$ означает, что существуют положительные константы C и C', не зависящие от f, такие, что величины $L(f)$ и $R(f)$ удовлетворяют неравенствам

$$CR(f) \le L(f) \le C'R(f)$$

для любой голоморфной f.

Далее через C будут обозначаться положительные константы, возможно, различные в разных случаях.

Для $f \in H(U^n)$ положим

$$\partial_n f(z) = \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}.$$

Лемма 1. *Пусть $f \in H(U^n)$ такова, что $f(z) = 0$, если $\prod_{j=1}^{n} z_j = 0$. Тогда*

$$\int_{[0,1)^n} M_p^q(f,r) \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j}\,dr \asymp \int_{[0,1)^n} M_p^q(\partial_n f,r) \prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{q+\alpha_j}\,dr \tag{4}$$

для $p, q \in [1,\infty)$ и $\alpha_j > -1$, $j = 1,\dots,n$.

Доказательство. Пусть

$$I = \int_0^1 M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1}\,dr_1.$$

Предположим сначала, что $f \in H(\overline{U^n})$. Интегрируя по частям и используя соотношение $f(0,z_2,\dots,z_n) \equiv 0$ в U^{n-1}, получим

$$I = \int_0^1 M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1}\,dr_1 = \frac{1}{\alpha_1+1}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_1} M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1+1}\,dr_1.$$

В точках $z = r\cdot e^{i\theta}$, где f отлична от нуля (почти всюду), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r_1}|f(r\cdot e^{i\theta})|^p = p|f(r\cdot e^{i\theta})|^{p-1}\frac{\partial}{\partial r_1}|f(r\cdot e^{i\theta})|$$
$$\le p|f(r\cdot e^{i\theta})|^{p-1}\left|\frac{\partial f(r\cdot e^{i\theta})}{\partial r_1}\right| = p|f(r\cdot e^{i\theta})|^{p-1}\left|\frac{\partial f(r\cdot e^{i\theta})}{\partial z_1}\right|.$$

По теореме о мажорированной сходимости получаем

$$\frac{\partial}{\partial r_1}M_p^p(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r_1}|f(r\cdot e^{i\theta})|^p\,d\theta \le \frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cdot e^{i\theta})|^{p-1}\left|\frac{\partial f(r\cdot e^{i\theta})}{\partial z_1}\right|\,d\theta.$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $p/(p-1)$ и p (при $p>1$), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r_1}M_p^p(f,r) \le pM_p^{p-1}(f,r)M_p(\partial f/\partial z_1, r). \tag{5}$$

Случай $p=1$ очевиден. Обратимся к случаю $1<p<\infty$. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial r_1}M_p^q(f,r) = \frac{q}{p}(M_p^p(f,r))^{q/p-1}\frac{\partial}{\partial r_1}M_p^p(f,r).$$

Используя последнее равенство и (5), приходим к оценке

$$\frac{\partial}{\partial r_1}M_p^q(f,r) \le qM_p^{q-1}(f,r)M_p(\partial f/\partial z_1, r).$$

Следовательно,

$$I \le \frac{q}{\alpha_1+1}\int_0^1 M_p^{q-1}(f,r)M_p(\partial f/\partial z_1, r)(1-r_1)^{\alpha_1+1}\,dr_1$$
$$\le \frac{q}{\alpha_1+1} I^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^1 M_p^q(\partial f/\partial z_1, r)(1-r_1)^{\alpha_1+q}\,dr_1\right)^{1/q},$$

здесь мы использовали неравенство Гёльдера с показателями $q/(q-1)$ и q при $q>1$. Если $q=1$, то последнее неравенство очевидно. Отсюда

$$\int\limits_0^1 M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1}\,dr_1 \le \left(\frac{q}{\alpha_1+1}\right)^q \int\limits_0^1 M_p^q(\partial f/\partial z_1,r)(1-r_1)^{\alpha_1+q}\,dr_1.$$

Умножая это неравенство на $(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_2$, интегрируя результат по частям по $[0,1)$ и применяя теорему Фубини, получаем, что

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1}\,dr_1(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_2$$
$$\le \left(\frac{q}{\alpha_1+1}\right)^q \int\limits_0^1\int\limits_0^1 M_p^q(\partial f/\partial z_1,r)(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_2(1-r_1)^{\alpha_1+q}\,dr_1.$$

Применяя ту же процедуру к интегралу

$$\int\limits_0^1 M_p^q(\partial f/\partial z_1,r)(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_2$$

и используя тот факт, что

$$M_p^q(\partial f/\partial z_1,r)\big|_{r_2=0}=0,$$

поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}(z_1,0,z_2,\dots,z_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_1+h,0,z_2,\dots,z_n)-f(z_1,0,z_2,\dots,z_n)}{h}=0,$$

придем к неравенству

$$\int\limits_0^1 M_p^q(\partial f/\partial z_1,r)(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_2 \le \left(\frac{q}{\alpha_2+1}\right)^q \int\limits_0^1 M_p^q(\partial^2 f/\partial z_1\partial z_2,r)(1-r_2)^{\alpha_2+q}\,dr_2.$$

Тем самым

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 M_p^q(f,r)(1-r_1)^{\alpha_1}(1-r_2)^{\alpha_2}\,dr_1dr_2$$
$$\le \prod_{j=1}^2\left(\frac{q}{\alpha_j+1}\right)^q \int\limits_0^1\int\limits_0^1 M_p^q(\partial^2 f/\partial z_1\partial z_2,r)(1-r_1)^{\alpha_1+q}(1-r_2)^{\alpha_2+q}\,dr_1dr_2.$$

Повторяя ту же процедуру при $r_3,\dots,r_n$, придем к требуемому результату с константой

$$C=\prod_{j=1}^n\left(\frac{q}{\alpha_j+1}\right)^q.$$

Если $f\in H(U^n)$, то следует использовать функции $f(\rho z)$, где $\rho\in[0,1)$, и теорему о монотонном предельном переходе. Итак, доказано существование положительной константы C такой, что

$$\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(f,r)\prod_{j=1}^n(1-r_j)^{\alpha_j}\,dr \le C\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(\partial_n f,r)\prod_{j=1}^n(1-r_j)^{q+\alpha_j}\,dr.$$

Докажем теперь, что существует положительная константа C такая, что

$$\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(\partial_n f, r)\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{q+\alpha_j}\,dr \le C\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(f, r)\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j}\,dr.$$

Из неравенства (14) в [26] (если положить в нем $\gamma = (1,\dots,1)$) вытекает, что найдется положительная не зависящая от f константа такая, что

$$\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^p\int\limits_{[0,2\pi]^n}|\partial_n f(r\cdot e^{i\theta})|^p\,d\theta \le C\int\limits_{[0,2\pi]^n}\left|f\left(\frac{1+r_1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\frac{1+r_n}{2}e^{i\theta_n}\right)\right|^p d\theta.$$

Возводя это неравенство в степень q/p, получаем

$$\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^q\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}|\partial_n f(r\cdot e^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{q/p}$$
$$\le C\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}\left|f\left(\frac{1+r_1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\frac{1+r_n}{2}e^{i\theta_n}\right)\right|^p d\theta\Bigg)^{q/p}.$$

Умножая последнее неравенство на $\prod\limits_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j}$, приходим к оценке

$$\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{q+\alpha_j}\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}|\partial_n f(r\cdot e^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{q/p}$$
$$\le C\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}\left|f\left(\frac{1+r_1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\frac{1+r_n}{2}e^{i\theta_n}\right)\right|^p d\theta\prod_{j=1}^{n}(1-r)^{\alpha_j}\,dr_j\Bigg)^{q/p}. \quad (6)$$

Интегрируя неравенство (6) по $r\in[0,1)^n$ и производя замену переменных $s_j = \frac{1+r_j}{2}$, $j=1,\dots,n$, получим

$$\int\limits_{[0,1)^n}\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}|\partial_n f(r\cdot e^{i\theta})|^p\,d\theta\Bigg)^{q/p}\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{q+\alpha_j}\,dr_j$$
$$\le C\int\limits_{[0,1)^n}\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}\left|f\left(\frac{1+r_1}{2}e^{i\theta_1},\dots,\frac{1+r_n}{2}e^{i\theta_n}\right)\right|^p d\theta\Bigg)^{q/p}\prod_{j=1}^{n}(1-r_j)^{\alpha_j}\,dr_j$$
$$\le C\int\limits_{\prod_{j=1}^{n}[1/2,1)}\Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n}|f(s_1e^{i\theta_1},\dots,s_ne^{i\theta_n})|^p\,d\theta\Bigg)^{q/p}\prod_{j=1}^{n}(1-s_j)^{\alpha_j}\,ds_j \le C\|f\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha},$$

что и требовалось.

Замечание 1. В случае $p=q\in(0,1)$ в [26] доказан следующий результат. Пусть $p\in(0,1]$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ с $\alpha_j>-1$ для $j=1,\dots,n$, m — фиксированное положительное целое, и пусть $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in(\mathbb{Z}_+)^n$. Если $f\in H(U^n)$, то $f\in\mathscr{A}^p_\alpha$ тогда и только тогда, когда

$$\left[\prod_{j=1}^{n}(1-|z_j|)^{\gamma_j}\right]\frac{\partial^{|\gamma|}f}{\partial z_1^{\gamma_1}\dots\partial z_n^{\gamma_n}}(z)\in\mathscr{L}^p_\alpha \quad \text{при } |\gamma|=m.$$

Кроме того,

$$\|f\|_{\mathscr{A}^p_\alpha} \asymp \sum_{|\mathbf{k}|=0}^{m-1} \left| \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(0) \right| + \sum_{|\mathbf{k}|=m} \left\| \left[\prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|^2)^{k_j} \right] \frac{\partial^m f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} \right\|_{\mathscr{L}^p_\alpha}.$$

Имеет ли место лемма 1 в случае $p \neq q$, где p или q лежат и интервале $(0,1)$, остается неизвестным.

Следующая лемма доказана в [24].

Лемма 2. *Пусть $f \in H^p(U^n)$, $p > 0$. Тогда*

$$|f(z)| \leq \frac{C\|f\|_{H^p(U^n)}}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1-|z_i|)^{1/p}}, \quad z \in U^n,$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от f.

Применяя лемму 2 к функции $f\left(\frac{1+r}{2} \cdot e^{i\theta}\right)$, выводим

Следствие 3. *Пусть $f \in H^p(U^n)$, $p > 0$, и $z = r \cdot e^{i\theta}$. Тогда*

$$|f(z)|^p \leq \frac{CM_p^p\left(f, \frac{1+r_1}{2}, \dots, \frac{1+r_n}{2}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1-|z_j|)}, \quad z \in U^n, \tag{7}$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от f.

Лемма 3. *Пусть $f \in \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$. Тогда*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\frac{\alpha_j+1}{q}+\frac{1}{p}}} \|f\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \tag{8}$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от f (т. е. значение в точке является непрерывным функционалом на $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha$).

Доказательство. Пусть $f \in \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$. Можно считать, что

$$\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(f,r) \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\alpha_j}\, dr = 1.$$

Отсюда и из монотонности интегральных средних $M_p^q(f,r)$ по каждой переменной, т. е. по $r_1, \dots, r_n$, вытекает, что

$$M_p^q(f,R) \int\limits_{[R,1)^n} \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\alpha_j}\, dr \leq 1$$

для любого $R \in (0,1)^n$, в частности для $R = \left(\frac{1+r_1}{2}, \dots, \frac{1+r_n}{2}\right)$. Отсюда

$$M_p^q\left(f, \frac{1+r_1}{2}, \dots, \frac{1+r_n}{2}\right) \leq \frac{C}{\prod\limits_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\alpha_j+1}} \tag{9}$$

с некоторой положительной константой C, не зависящей от f.

Комбинируя (7) и (9), приходим к (8).

Замечание 2. Ввиду оценки (8) сходимость в пространстве $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$ влечет равномерную сходимость на компактах в U^n.

Лемма 4. *Пусть $g \in H(U^n)$. Тогда $T_g : \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n) \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$ компактно в том и только в том случае, если для любой ограниченной последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$, сходящейся к нулю равномерно на компактных подмножествах в U^n, имеет место сходимость $\|T_g f_k\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Предположим, что T_g компактен, и пусть $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha$ с $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} < \infty$ и $f_k \to 0$ равномерно на компактных подмножествах в U^n при $k \to \infty$. Допустим, что найдутся подпоследовательность $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ и $\delta > 0$ такие, что $\|T_g(f_{k_m})\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \geq \delta$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Ввиду компактности T_g последовательность $(T_g(f_{k_m}))_{m\in\mathbb{N}}$ обладает подпоследовательностью $(T_g(f_{k_{m_l}}))_{l\in\mathbb{N}}$, сходящейся в $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha$, допустим, к h. Поскольку функционалы значения в точке на $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$ равномерно ограничены на компактах (см. (8)), для любого компакта $K \subset U^n$ найдется положительная константа C_K, не зависящая от f, такая, что

$$|(T_g(f_{k_{m_l}}) - h)(z)| \leq C_K \|T_g(f_{k_{m_l}}) - h\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \quad \text{для всех } z \in K.$$

Отсюда $T_g(f_{k_{m_l}}) - h \to 0$ равномерно на компактах в U^n при $l \to \infty$. Так как T_g непрерывен в топологии равномерной сходимости, имеем $T_g(f_{k_{m_l}}) \to 0$ при $l \to \infty$ для любого $z \in U^n$. Значит, предельная функция h равна 0. Значит,

$$\lim_{l\to\infty} \|T_g(f_{k_{m_l}})\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} = 0$$

вопреки тому, что $\|T_g(f_{k_{m_l}})\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \geq \delta > 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_g(f_n)\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} = 0,$$

что и требовалось.

Обратно, пусть $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность в шаре $\mathscr{K}_M = B_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha}(0, M)$ (с центром в нуле и радиуса M) пространства $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$. Так как $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|h_k\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \leq M < \infty$, ввиду (8) $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена на компактных подмножествах в U^n и тем самым нормальна по теореме Монтеля. Поэтому можно выделить подпоследовательность $(h_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах в U^n к некоторой $h \in H(U^n)$. По теореме Фату

$$\|h\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} = \int\limits_{[0,1)^n} M^q_p(\liminf_{j\to\infty} h_{k_j}, r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}\, dr_j$$
$$\leq \liminf_{j\to\infty} \int\limits_{[0,1)^n} M^q_p(h_{k_j}, r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}\, dr_j \leq M^q,$$

откуда $h \in \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$ и $\|h\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \leq M$. Значит, последовательность $(h_{k_j} - h)_{j\in\mathbb{N}}$ такова, что $\|h_{k_j} - h\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \leq 2M < \infty$, и сходится к 0 на компактных подмножествах в U^n при $j \to \infty$. Согласно предположениям имеем $T_g(h_{k_j}) \to T_g(h)$ в $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha$ при $j \to \infty$. Следовательно, $T_g(\mathscr{K}_M)$ относительно компактно, и это завершает доказательство.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Допустим сначала, что

$$\sup_{z\in U^n} |g(z)| \prod_{j=1}^n (1-|z_j|) < \infty.$$

Заметим, что $T_g(f)(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}^n$ такого, что $\prod\limits_{j=1}^{n} z_j = 0$. Применяя лемму 1 к функции $T_g(f)$, получим

$$\|T_g(f)\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \le C \left\| \partial_n T_g(f) \prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|) \right\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} = C \left\| fg \prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|) \right\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|T_g(f)\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} &\le C \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |(fg)(r\cdot e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{(2\pi)^n} \Bigg)^{q/p} \prod_{j=1}^{n} (1-r_j)^{\alpha_j+q}\, dr_j \\ &\le C \sup_{z\in U^n} \left(|g(z)| \prod_{j=1}^{n} (1-|z_j|) \right)^q \|f\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha}, \end{aligned}$$

откуда вытекает ограниченность.

Пусть теперь $T_g : \mathscr{A}^{p,q}_\alpha \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha$ ограничен. Возьмем пробную функцию

$$f_w(z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1-|w_j|}{(1-z_j\overline{w}_j)^{\frac{1}{p}+\frac{\alpha_j+1}{q}+1}},$$

где $w \in U^n$. Очевидно, что $f_w \in H(U^n)$. Покажем, что $f_w \in \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$. Достаточно доказать, что

$$f_{w_1}(z_1) = \frac{1-|w_1|}{(1-z_1\overline{w}_1)^{\frac{1}{p}+\frac{\alpha_1+1}{q}+1}} \tag{10}$$

принадлежит пространству $\mathscr{A}^{p,q}_{\alpha_1}(U)$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|f_{w_1}\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_{\alpha_1}} &= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1-|w_1|}{(1-z_1\overline{w}_1)^{\frac{1}{p}+\frac{\alpha_1+1}{q}+1}} \right|^p \frac{d\theta_1}{2\pi} \right)^{q/p} (1-r_1)^{\alpha_1}\, dr_1 \\ &= (1-|w_1|)^q \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{|1-r_1|w_1|e^{i\theta_1}|^{1+\frac{p(\alpha_1+1)}{q}+p}} \frac{d\theta_1}{2\pi} \right)^{q/p} (1-r_1)^{\alpha_1}\, dr_1 \\ &\le (1-|w_1|)^q \int\limits_0^1 \left(\frac{C}{(1-r_1|w_1|)^{\frac{p(\alpha_1+1)}{q}+p}} \right)^{q/p} (1-r_1)^{\alpha_1}\, dr_1 \\ &= (1-|w_1|)^q C^{q/p} \int\limits_0^1 \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}}{(1-r_1|w_1|)^{\alpha_1+1+q}}\, dr_1 \\ &= (1-|w_1|)^q C^{q/p} \int\limits_0^{|w_1|} + \int\limits_{|w_1|}^1 \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}}{(1-r_1|w_1|)^{\alpha_1+1+q}}\, dr_1. \end{aligned} \tag{11}$$

В неравенстве (11) мы использовали известные оценки (см., например, [27]).

С другой стороны,

$$\int\limits_0^{|w_1|} \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}}{(1-r_1|w_1|)^{\alpha_1+1+q}}\, dr_1 \le \int\limits_0^{|w_1|} \frac{dr_1}{(1-r_1)^{q+1}} = \frac{1}{q}\frac{1}{(1-|w_1|)^q} - \frac{1}{q}, \tag{12}$$

$$\int\limits_{|w_1|}^{1} \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}}{(1-r_1|w_1|)^{\alpha_1+1+q}}\,dr_1 \le \int\limits_{|w_1|}^{1} \frac{(1-r_1)^{\alpha_1}}{(1-|w_1|)^{\alpha_1+1+q}}\,dr_1 = \frac{1}{(\alpha_1+1)(1-|w_1|)^q}. \quad (13)$$

Из (11)–(13) вытекает включение $f_{w_1} \in \mathscr{A}^{p,q}_{\alpha_1}(U)$, что и требовалось.

Поскольку T_g ограничен, по лемме 1 и следствию 3 найдется положительная константа C такая, что

$$\begin{aligned} C\|T_g\|^q &\ge \|T_g(f_w)\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \ge \int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(\partial_n T_g(f_w)) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j+q}\,dr_j \\ &\ge \int\limits_{\prod_{j=1}^n [(1+|w_j|)/2,(3+|w_j|)/4]} M_p^q(f_w g, r) \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j+q}\,dr_j \\ &\ge C_1 M_p^q\left(f_w g, \frac{1+|w_1|}{2}, \dots, \frac{1+|w_n|}{2}\right) \prod_{j=1}^n (1-|w_j|)^{\alpha_j+q+1} \\ &\ge C_1 |g(w)|^q \prod_{j=1}^n |f_w(w_j)|^q (1-|w_j|)^{\alpha_j+q+1+q/p} \\ &\ge C_1 |g(w)|^q \prod_{j=1}^n \frac{(1-|w_j|)^q}{(1-|w_j|^2)^{q+\alpha_j+1+q/p}} \prod_{j=1}^n (1-|w_j|)^{\alpha_j+q+1+q/p} \\ &\ge C_2 |g(w)|^q \prod_{j=1}^n (1-|w_1|)^q. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как $w \in U^n$ произвольно, из (14) приходим к требуемому результату.

Доказательство теоремы 2. Пусть T_g компактен. Заметим, что функции f_w, определенные в теореме 1, сходятся к нулю равномерно на компактах при $w \to \partial U^n$. Тогда по лемме 4 $\|T_g(f_w)\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \to 0$ при $w \to \partial U^n$. Из доказательства теоремы 1 видно, что существует положительная константа C такая, что

$$|g(w)| \prod_{j=1}^n (1-|w_j|) \le C\|T_g(f_w)\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \to 0$$

при $w \to \partial U^n$, откуда

$$\lim_{w\to\partial U^n} |g(w)| \prod_{j=1}^n (1-|w_j|) = 0.$$

Обратно, пусть

$$\lim_{z\to\partial U^n} |g(z)| \prod_{j=1}^n (1-|z_j|) = 0.$$

По лемме 4 достаточно показать, что если $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — произвольная ограниченная последовательность в $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(U^n)$, сходящаяся к нулю равномерно на компактах в U^n, то $\|T_g(f_m)\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \to 0$ при $m \to \infty$.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|g(z)| \prod_{j=1}^n (1-|z_j|) < \varepsilon$$

для любого $z \in U^n$ такого, что $\operatorname{dist}(z, \partial U^n) < \delta$. Отсюда и из включения $g \in H(U^n)$ вытекает, что

$$\sup_{z\in U^n} |g(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|) = L < \infty.$$

Пусть $E_\delta = \{z \in U^n \mid \operatorname{dist}(z, \partial U^n) < \delta\}$. По лемме 1 имеем

$$\begin{aligned}
\|T_g(f_m)\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} &= \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |(T_g f_m)(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta \Bigg)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j} \, dr_j \\
&\le C \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |(f_m g)(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta \Bigg)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j + q} \, dr_j \\
&\le C \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |\chi_{E_\delta}(f_m g)(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta \Bigg)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j + q} \, dr_j \\
&+ C \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |\chi_{U^n \setminus E_\delta}(f_m g)(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta \Bigg)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j + q} \, dr_j \\
&\le C \|f_m\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \Bigg(\sup_{z\in E_\delta} \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|) |g(z)| \Bigg)^q \\
&+ C \int\limits_{[0,1)^n} \Bigg(\int\limits_{[0,2\pi]^n} |\chi_{U^n \setminus E_\delta}(f_m)(r \cdot e^{i\theta})|^p \, d\theta \Bigg)^{\frac{q}{p}} \\
&\times \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j} \, dr_j \Bigg(\sup_{z\in U^n} \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|) |g(z)| \Bigg)^q \\
&\le \varepsilon^q C \|f_m\|^q_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} + C L^q \sup_{z\in U^n \setminus E_\delta} |f_m(z)|^q. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Так как множество $U^n \setminus E_\delta$ компактно как замкнутое подмножество в U^n, из равномерной сходимости последовательности f_m вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_m(z)| < \varepsilon$ для любых $z \in U^n \setminus E_\delta$ и $m \ge m_0$. Отсюда, из (15) и леммы 4 выводим, что оператор $T_g : \mathscr{A}^{p,q}_\alpha \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha$ компактен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pommerenke Ch.* Schlichte Funktionen und analytische funktionen von beschränkter mittlerer oszillation // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 591–602.
2. *Aleman A., Siskakis A.* An integral operator on H^p // Complex Variables. 1995. V. 28. P. 149–158.
3. *Aleman A., Siskakis A.* Integration operators on Bergman spaces // Indiana Univ. Math. J. 1997. V. 46. P. 337–356.
4. *Chang D. C., Stević S.* The generalized Cesàro operator on the unit polydisk // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 2. P. 293–308.
5. *Kriete T. L., MacCluer B. D.* Composition operators on large weighted Bergman spaces // Indiana Univ. Math. J. 1992. V. 41. P. 755–788.
6. *Lin P., Rochberg R.* Hankel operators on the weighted Bergman spaces with exponential type weights // Integral Equations Operator Theory. 1995. V. 21, N 4. P. 460–483.
7. *Siskakis A.* Weighted integrals of analytic functions // Acta Sci. Math. 2000. V. 66. P. 651–664.

8. *Stević S.* On an area inequality and weighted integrals of analytic functions // Results. Math. 2002. V. 41. P. 386–393.
9. *Stević S.* Composition operators on the generalized Bergman space // J. Indian Math. Soc. 2002. V. 69, N 1–4. P. 61–64.
10. *Chang D. C., Stević S.* Estimates of an integral operator on function spaces // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 3. P. 423–432.
11. *Danikas N., Siskakis A.* The Cesàro operator on bounded analytic functions // Analysis. 1993. V. 13. P. 195–199.
12. *Giang D. V., Móricz F.* The Cesàro operator is bounded on the Hardy space H^1 // Acta Sci. Math. 1995. V. 61. P. 535–544.
13. *Hardy G. H.* Notes on some points in the integral calculus LXVI // Messenger of Math. 1929. V. 58. P. 50–52.
14. *Miao J.* The Cesàro operator is bounded on H^p for $0 < p < 1$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 4. P. 1077–1079.
15. *Siskakis A.* Composition semigroups and the Cesàro operator on $H^p(D)$ // J. London Math. Soc. 1987. V. 36. P. 153–164.
16. *Siskakis A.* Semigroups of composition operators in Bergman spaces // Bull. Austral. Math. Soc. 1987. V. 35. P. 397–406.
17. *Siskakis A.* The Cesàro operator is bounded on H^1 // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 110, N 2. P. 461–462.
18. *Siskakis A.* On the Bergman space norm of the Cesàro operator // Arch. Math. 1996. V. 67. P. 312–318.
19. *Stempak K.* Cesàro averaging operators // Proc. Royal Soc. Edinburgh. Sect. A. 1994. V. 124. P. 121–126.
20. *Stević S.* The generalized Cesàro operator on Dirichlet spaces // Studia Sci. Math. Hungar. 2003. V. 40, N 1–2. P. 83–94.
21. *Stević S.* A note on the generalized Cesàro operator on Bergman spaces // Indian J. Math. 2004. V. 46, N 1. P. 129–136.
22. *Xiao J.* Cesàro-type operators on Hardy, BMOA and Bloch spaces // Arch. Math. 1997. V. 68. P. 398–406.
23. *Stević S.* Cesàro averaging operators // Math. Nachr. 2003. V. 248–249. P. 1–5.
24. *Stević S.* The generalized Libera transform on Hardy, Bergman and Bloch spaces on the unit polydisc // Z. Anal. Anwendungen. 2003. Bd 22, N 1. S. 179–186.
25. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. 1932. Bd 34. S. 403–439.
26. *Stević S.* Weighted integrals of holomorphic functions on the polydisc // Z. Anal. Anwendungen. 2004. Bd 23, N 4. S. 775–782.
27. *Duren P.* Theory of H^p spaces. New York: Acad. Press, 1970.

Статья поступила 23 ноября 2005 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Science,
Knez Mihailova 35/I, 11000 Beograd, Serbia
sstevic@ptt.yu; sstevo@matf.bg.ac.yu